Análisis de Funciones

FUNCIONES ELEMENTALES
LÍMITES Y CONTINUIDAD
DERIVADAS

Matemáticas 1º de Bachillerato Ciencias y Tecnología

Profesor: Jorge Escribano
Colegio Inmaculada Niña
Granada
www.coleinmaculadanina.org
www.lasmatesdejorge.wikispaces.com

TEMA 7.- FUNCIONES ELEMENTALES

1.- INTRODUCCIÓN

Si bien la idea de función ya aparece en los escritos de Nicole Oresme (s. XIV), Galileo Galilei (s. XVI) o Descartes (principios del s. XVII), ni Newton ni Leibniz, creadores por separado de una de las herramientas más potentes de las matemáticas, el cálculo diferencial e integral, trabajaron en la segunda mitad del s. XVII con el concepto de función que tenemos en la actualidad.

No fue hasta principios del s. XVIII cuando aparecieron las primeras definiciones "formales" de función:

Una función de una magnitud variable es una expresión analítica, compuesta por esta magnitud y por constantes

J. Bernouilli, 1718

Una función es una curva, dibujada por un movimiento libre de la mano

L.Euler, 1748

Cuando unas cantidades dependen de otras de tal forma que al variar las últimas también varían las primeras, entonces las primeras se llaman funciones de las segundas

L.Euler, 1755

Cualquier cantidad, cuyo valor depende de una o de otras varias cantidades, se llama función de estas últimas, independientemente de si se conocen o no las operaciones que hay que realizar para pasar de éstas a la primera

S. La Croix, 1797

Una función de x es un número que se da a cada x y que varía constantemente con la x. El valor de la función puede estar dado o por una expresión analítica o por una condición queda el procedimiento para probar todos los números. La dependencia puede existir y quedarse desconocida

N.I. Lobachevsky, 1834

y es función de x, si a cada valor de x le corresponde un valor completamente determinado de la y; además no es importante el método con el que ha sido establecida la correspondencia señalada

P. Dirichlet, 1837

Y la definición que aparece en la mayoría de los libros de texto de hoy en día:

Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$

E. Goursat, 1923

1.- FUNCIONES: CLASIFICACIÓN Y DOMINIOS

Volviendo a esta última idea de función:

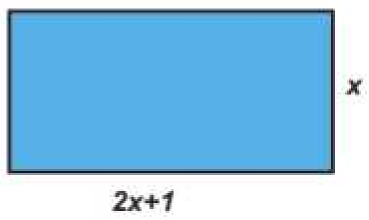
*Una **función real de variable real** f es una regla que asigna a cada número real x perteneciente a un cierto conjunto D, un <u>único</u> número real y.*

Formalmente lo podemos representar por

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow R \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Donde *D* es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente, *x*, llamado ***Dominio***, y *R* es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente, *y*, llamado ***Recorrido***.

Fijémonos por ejemplo en el rectángulo de la figura:



Donde *x* representa la altura del triángulo.

La función que relaciona en dicho triángulo la altura con su perímetro es $P(x) = 2x + 2(2x+1) = 6x + 2$

Mientras que la función que relaciona en dicho triángulo la altura con su área es $A(x) = x(2x+1) = 2x^2 + x$

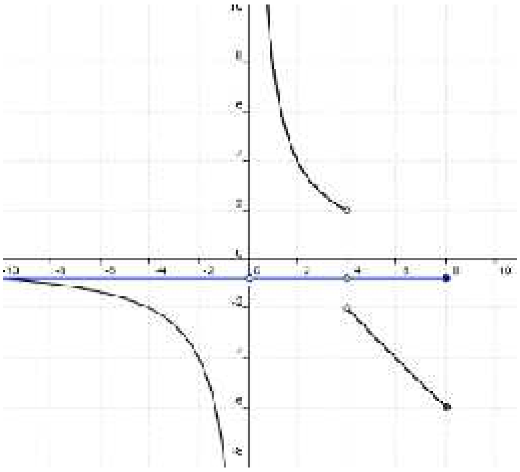
Así, un rectángulo como el anterior de altura 2 cm. tendrá un perímetro de *P(2) = 14 cm*, y un área de $A(2) = 10\ cm^2$.

Por supuesto, el dominio y el recorrido de ambas funciones son los números reales a partir del 0, es decir, $[0, +\infty] = \mathbb{R}_0^+$, puesto que la variable independiente corresponde a un número mayor o igual que 0.

Pero si analizásemos por si sola la función $f(x) = 6x + 2$, su dominio y su recorrido serían todos los números reales, $\mathbb{R}$.

Por tanto, el dominio de una función no sólo depende de su expresión analítica, sino de lo que dicha función significa.

Gráficamente, el dominio de una función se obtiene proyectando su gráfica sobre el eje OX, es decir, estudiando los valores del eje OX que tienen su punto correspondiente *(x,y)* en la gráfica de *f*. El recorrido se obtiene igual pero sobre el eje OY:



El Dominio de esta función (señalado en azul) es $D_f = (-\infty,8] - \{0,4\} = (-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,8]$

Mientras que el Recorrido es

$$R_f = (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$$

En este primer punto vamos a estudiar los dominios de las funciones atendiendo a su expresión algebraica, pero primero necesitamos clasificar los diferentes tipos de funciones:

FUNCIONES ELEMENTALES

- **Algebraicas**
  - **Polinómicas**
    - **Lineales:** $y = ax+b$
    - **Cuadráticas:** $y = a x^2 + b x + c$
    - **Potenciales:**
      - **Pares** $x^4, x^6, \ldots$
      - **Impares** $x^3, x^5, \ldots$
  - **Racionales:**
    - **Prop. Inversa:** $f(x) = \frac{k}{x}$
    - $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
  - **Irracionales (con radicales):** $f(x) = \sqrt[n]{x}$
  - **Definidas a Trozos**
    Algunas con nombre propio
    - **Valor absoluto:** $y = |x|$
    - **Parte Entera:** $y = E[x]$
    - …..
- **Trascendentes**
  - **Exponenciales:** $y = a^x \quad (a>0)$
  - **Logarítmicas:** $y = \log_a x \quad (a>0)$
  - **Trigonométricas:** *senx, cosx, tgx*
  - **Inversas de las Trigonométricas:** *arcsenx, arccosx, arctgx*

<u>*Cálculo de los Dominios Fundamentales*</u>

- ***Funciones Polinómicas, radicales de índice impar, exponenciales, seno y coseno***
  $D_f = \mathbb{R}$

- ***Racionales*** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$
  $D_f = \mathbb{R} - \{x / Q(x) = 0\}$

- ***Radicales con índice par*** $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ *, n par*
  $D_f = \{x / g(x) \geq 0\}$

- ***Logarítmicas*** $f(x) = log_a(g(x))$
  $D_f = \{x / g(x) > 0\}$

- ***Función tangente f(x) = tgx***
  $D_f = \mathbb{R} - \{x / cos\, x = 0\} = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\text{®}}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ejemplo:

Calcular el dominio de:

$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$ $\quad b)\ f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ $\quad c)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$d)\ f(x) = log_2(3x+2)$ $\quad e)\ f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x+1}}$ $\quad f)\ f(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{x+4}}$

$g)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2 - 6x + 8}}$

Solución:

a) $D_f = \mathbb{R}$ por ser una función polinómica

b) Como es una función racional, igualamos el denominador a 0:
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Es una función radical de índice par, luego el radicando debe ser mayor o igual que 0
Resolvemos la inecuación $x^2 - 4 \geq 0$
Para ello resolvemos la ecuación correspondiente y estudiamos en qué intervalos es positivo:
$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Y por tanto el dominio $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

d) La función que hay dentro del logaritmo tiene que ser positiva y por tanto

$$3x+2>0 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad D_f=\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$$

e) Es una raíz de índice impar, y por tanto su dominio coincidirá con el de la función que hay dentro, que es racional. Igualamos el denominador a 0:

$$x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1 \;\Rightarrow\; D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

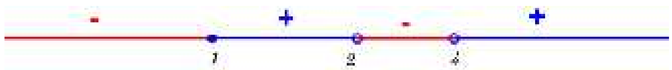
f) Por un lado es una función racional, luego el denominador no puede dar 0. Además el denominador es una función radical, luego el radicando debe ser positivo. Por tanto:

$$x+4>0 \quad \Rightarrow \quad x>-4 \quad \Rightarrow \quad D_f=(-4,+\infty)$$

g) El radicando tiene que ser positivo, luego resolvemos la inecuación $\dfrac{x+1}{x^2-6x+8}\geq 0$

Para ello igualamos cada parte a 0 y estudiamos el signo en cada intervalo, teniendo en cuenta que los valores que anulen al denominador tampoco estarán en el dominio:

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1 \\ x^2-6x+8=0 \;\Rightarrow\; x=2,x=4 \end{array}\right\}\Rightarrow$$



Y por tanto el dominio será $D_f=[-1,2)\cup(4,+\infty)$

Ejercicios

1.- Calcular los dominios de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x-5}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$ $\qquad c)\ f(x)=cos(2x)$ $\qquad d)\ f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-3}}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$ $\qquad f)\ f(x)=log_2(x^2+x-2)$ $\qquad g)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$ $\qquad h)\ f(x)=ln\left(\dfrac{x}{x^2-4}\right)$

$i)\ f(x)=\sqrt{2x-1}$ $\qquad j)\ f(x)=\dfrac{x^2+3}{5x-x^2}$ $\qquad k)\ f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$ $\qquad l)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

2.- Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado *x* y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular el volumen en función de *x*: *V(x)*. Indicar el tipo de función a la que pertenece y dominio de esta función.

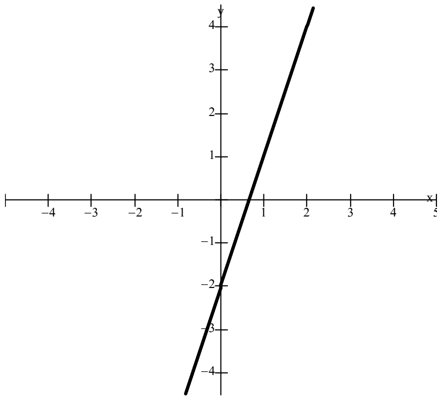
<u>2.- FUNCIONES POLINÓMICAS</u>

<u>*2.1.- Funciones Lineales*</u>

Son funciones cuya ley es un polinomio de primer grado, es decir, $f(x) = mx + n$

Sus gráficas son rectas y para representarlas basta con obtener dos puntos por los que pasen.

Por ejemplo: la función $f(x) = 3x - 2$ pasa por los puntos (0,-2) y (1,1), así que su gráfica sería:



El Dominio y el Recorrido de todas estas funciones son todos los números Reales.

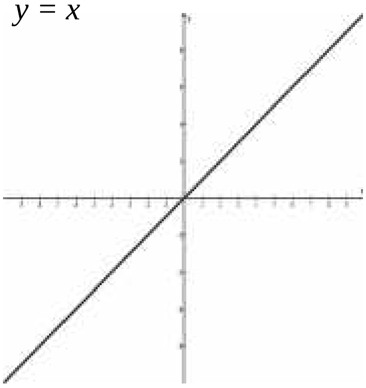
Si la *pendiente* de la recta (*m*) es positiva, la función será creciente, mientras que si *m* es negativa, será decreciente.

A *n* se le llama *ordenada en el origen*, e indica el punto donde la gráfica corta al eje Y.

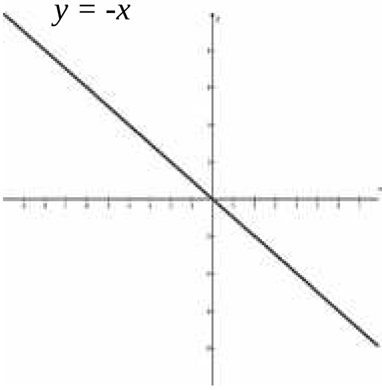
Cuanto más se acerque *m* a cero, más horizontal será la recta. Las rectas con pendiente 0 son horizontales, mientras que las rectas verticales son de la forma $x = a$.

Algunos ejemplos son:

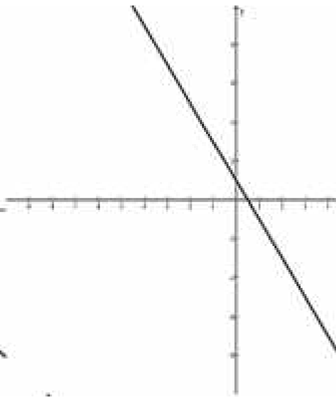
$y = x$



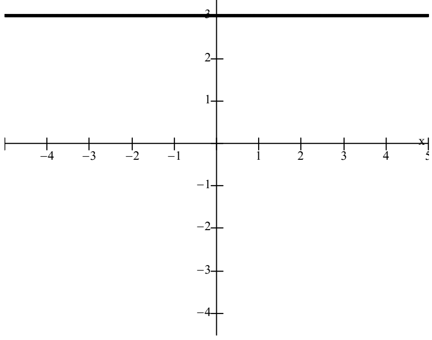
$y = -x$



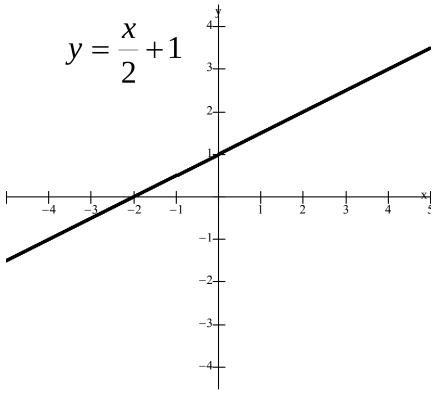
$y = -2x+1$



$y = 3$



$y = \frac{x}{2} + 1$



2.2.- Parábolas

Son funciones cuya ley es un polinomio de segundo grado, es decir:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sus gráficas son parábolas y para representarlas se calcula su vértice y los puntos de corte con el eje X.

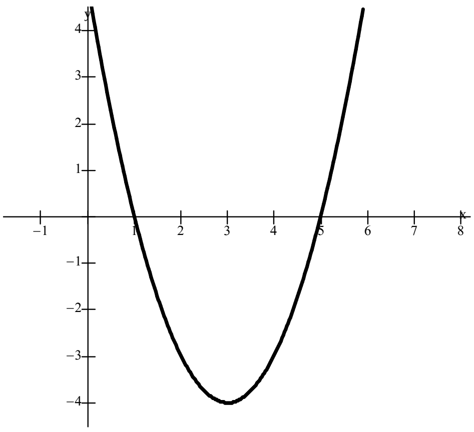
La primera coordenada del vértice se calcula mediante la fórmula $\frac{-b}{2a}$, mientras que la segunda se calcula sustituyendo la primera en la función.

Los puntos de corte con el eje X se obtienen igualando la función a 0 y resolviendo la ecuación de 2º grado correspondiente.

Así por ejemplo, representamos la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Su vértice será: $\frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$, $f(3) = -4$, es decir, el punto V(3,-4)

Si resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$, obtenemos como soluciones de la misma x = 1 y x = 5, luego cortará al eje X en los puntos (1,0) y (5,0). Con todo ello su representación gráfica será:



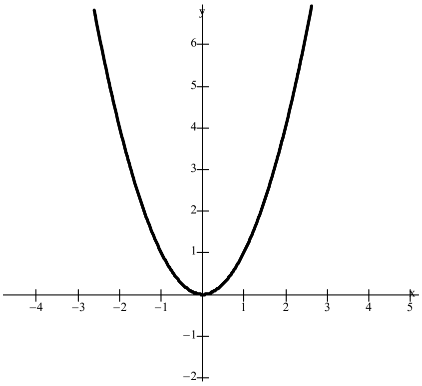
Como propiedad común, el dominio de todas estas funciones es todos los números Reales. En este caso el recorrido es $[-4,+\infty)$, aunque éste variará de una función a otra.

Otra característica común es que si *a > 0*, la parábola es convexa y su vértice corresponde a un mínimo absoluto, mientras que si *a < 0*, la parábola es cóncava y su vértice será un mínimo absoluto.

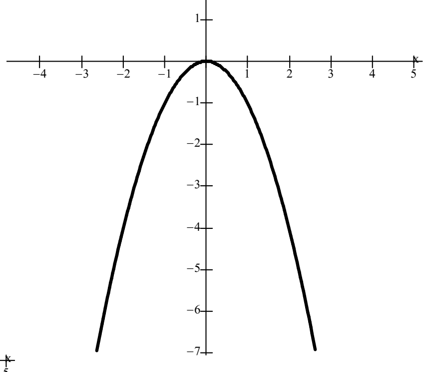
Si no tiene puntos de corte con el eje X o sólo tiene uno (el vértice) conviene darle un par de valores (uno anterior y otro posterior al vértice) para dibujarla más exactamente.

Algunos ejemplos son:

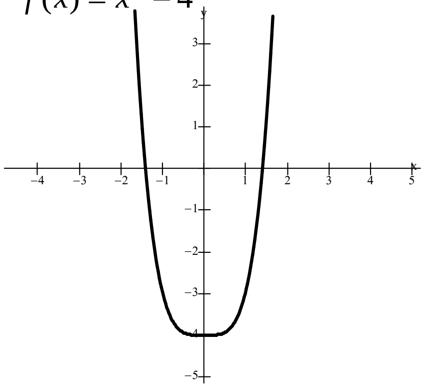
$f(x) = x^2$



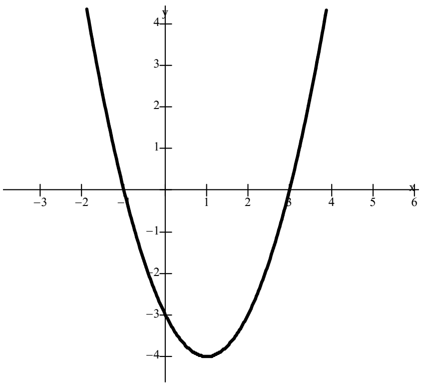
$f(x) = -x^2$



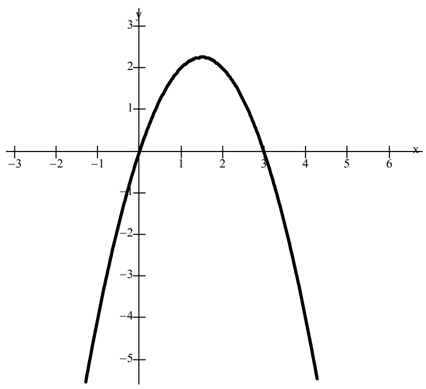
$f(x) = x^2 - 4$



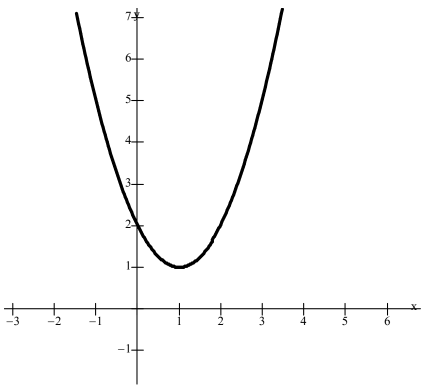
$f(x) = x^2 - 2x - 3$



$f(x) = -x^2 + 3x$



$f(x) = x^2 - 2x + 2$



Ejercicios:

1.- Representa las funciones:

$a)\ f(x) = -x^2 + 4$ $\qquad b)\ f(x) = -2x^2 + 4x$

$c)\ f(x) = 2x^2 - 10x + 8$ $\qquad d)\ f(x) = x^2 + 2x - 2$

$e)\ f(x) = x^2 - 3x \ ,\ x \geq 0$ $\qquad f)\ f(x) = (x-2)^2 \ ,\ x \in [0,4]$

$g)\ f(x) = -2x^2 + 8x - 4 \ ,\ 1 \leq x < 3$ $\qquad h)\ f(x) = x^2 + 2x + 2 \ ,\ (-\infty, 1]$

2.- La altura *a* (en metros) que alcanza un objeto al lanzarlo según el tiempo *t* (en segundos) que está en el aire viene dada por la expresión:

$$a(t) = 50t - 5t^2$$

a) Representa gráficamente dicha función
b) ¿Cuánto tiempo está el objeto en el aire? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿En qué instante?

3.- El beneficio B (en euros) que obtiene una empresa por la fabricación de q unidades de un determinado producto, viene dado por la función:

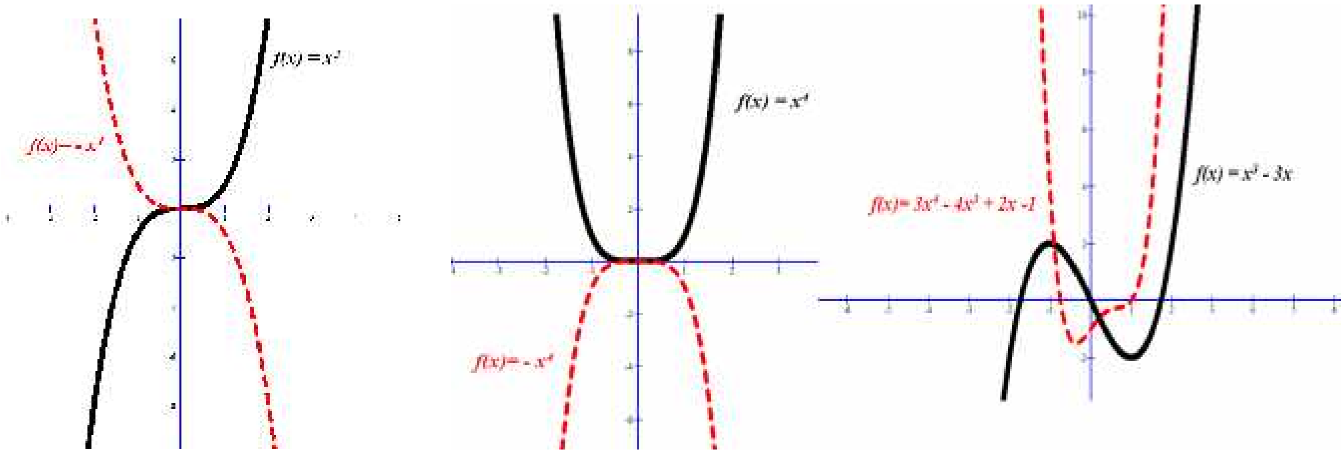
$$B(q) = -q^2 + 500q - 40000$$

¿Cuánto ganará por la fabricación de 50 unidades? ¿Y por 200? Representa gráficamente dicha función e indica el intervalo de producción de unidades para obtener beneficios. ¿Cuántas debe producir para que dicho beneficio sea máximo?

2.3.- Funciones polinómicas de grado superior

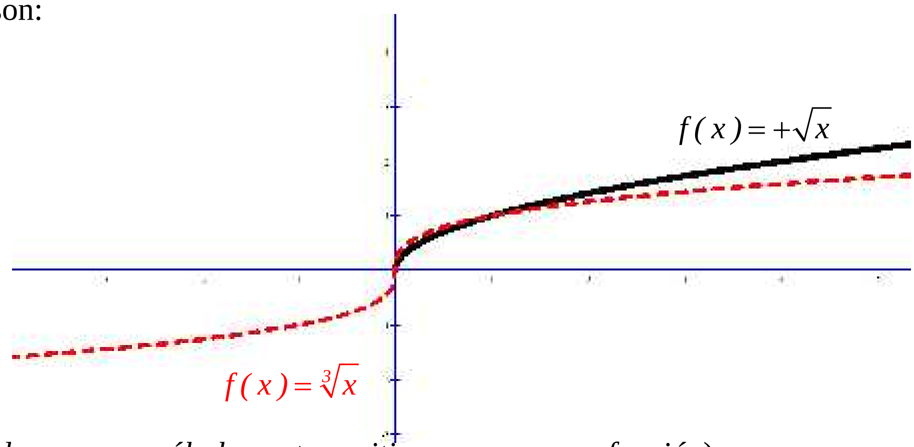
Son funciones cuya ley es un polinomio de grado superior a dos. No tienen características comunes, salvo que su dominio son todos los números reales.

Algunos ejemplos son:



3.- FUNCIONES RADICALES

Son funciones con raíces en su expresión algebraica. Recordemos que si el índice es impar, su dominio son todos los números reales, mientras que si el índice es par, el radicando debe ser positivo. Las más sencillas son:



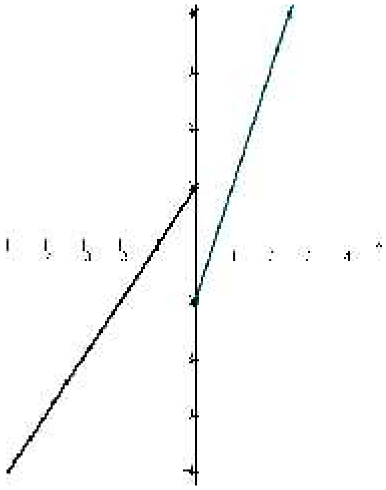
(De la raíz cuadrada cogemos sólo la parte positiva para que sea función)

<u>4.- FUNCIONES A TROZOS</u>

Son funciones definidas por distintas leyes por intervalos, de manera que el dibujo de la función completa será una mezcla de las diversas funciones que componen la función representadas cada una de ellas en el intervalo (del eje X) correspondiente.

Por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 2x-1 & x\geq 0 \end{cases}$$

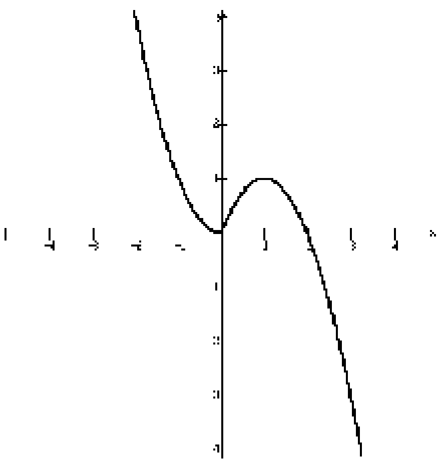


Al primer trozo de recta le hemos dado los valores (aunque podrían ser cualesquiera) (0,1) y (-1,0), mientras que para el segundo trozo los valores calculados han sido (0,-1) y (1,1). Como el 0 está incluido en el segundo trozo, se señala con un punto, dejando un hueco en el (0,1) que sería hasta donde llegaría (casi) el primer trozo de la función.

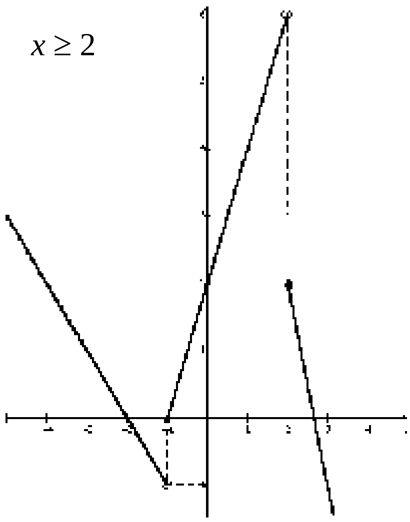
Es de destacar que el tipo de función que aparezca en cada trozo puede en principio ser cualquiera, y puede haber tantos trozos como queramos, de manera que nos podemos encontrar con funciones formadas por dos trozos de parábola, dos rectas y una parábola, ...

Algunos ejemplos podrían ser:

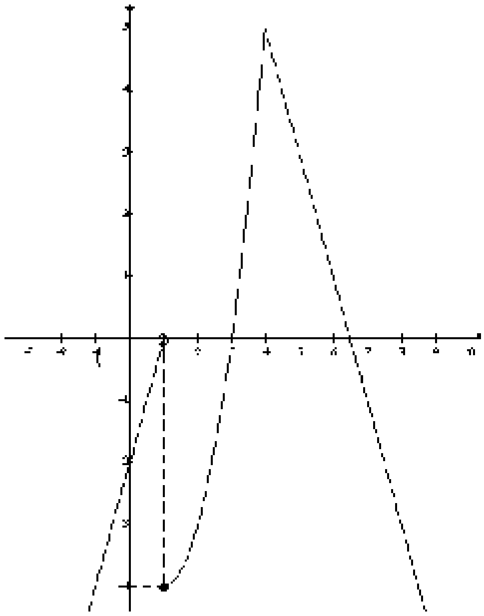
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x^2+2x & x\geq 0 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & x<-1 \\ 2x+2 & -1\leq x<2 \\ -3x+8 & x\geq 2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 2x-2 & x<1 \\ x^2-2x-3 & 1\le x\le 4 \\ -2x+13 & x>4 \end{cases}$$



Ejercicios:

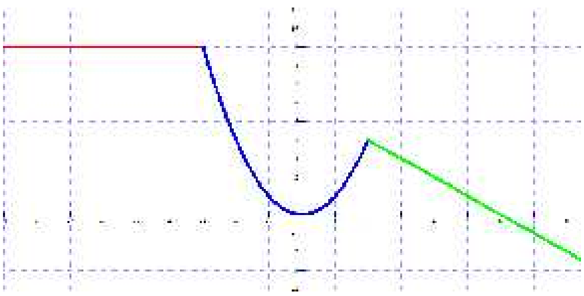
1.- Representa las funciones:

$a)\ f(x)=\begin{cases} -2x+1 & x\le -1 \\ -x^2 & x>-1 \end{cases}$ $b)\ f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ x^2-2x & 0\le x<3 \\ -2x+9 & x\ge 3 \end{cases}$ $c)\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3 & x<0 \\ -\sqrt{x} & 0\le x<4 \\ x-6 & x\ge 4 \end{cases}$

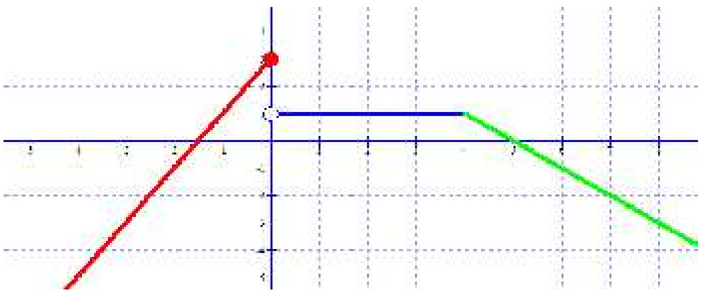
$d)\ f(x)=\begin{cases} -1 & x\le -1 \\ x^3 & -1<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$ $e)\ f(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ x^2-2x+2 & 0\le x\le 3 \\ x-2 & x>3 \end{cases}$ $f)\ f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & x\le -1 \\ -x^4 & x>-1 \end{cases}$

2.- Halla la expresión analítica de las siguientes funciones:

a)



b)



3.- La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representar la función que describe este enunciado y determinar su expresión analítica, como función definida por ramas.

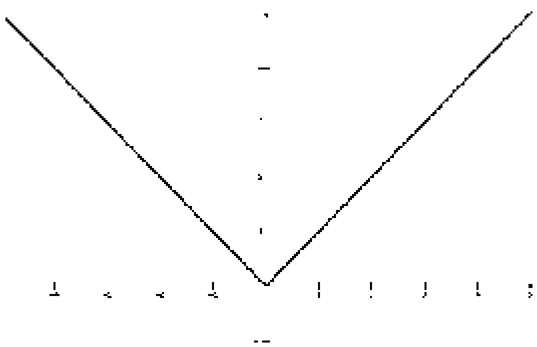
b) Indicar su dominio y su recorrido

5.- FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Es un caso particular de función a trozos. El valor absoluto de un número, $|x|$, lo deja igual si éste es positivo y le cambia el signo si es negativo.

Es decir, en general: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Si la dibujamos como una función a trozos, su gráfica sería:

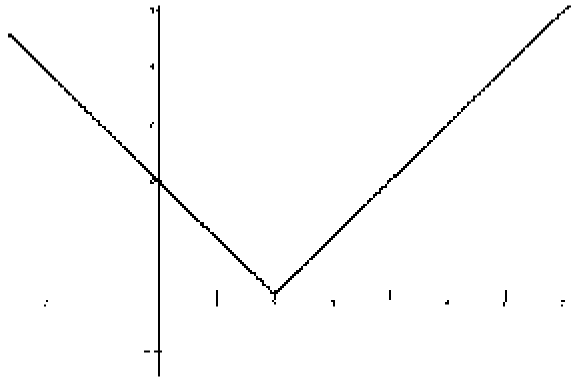


Como propiedades, aparte de que su dominio son todos los números Reales, destacar el hecho de que su recorrido son sólo los positivos (y el cero), algo que resulta obvio si tenemos en cuenta que el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.

A partir de ella podemos obtener los valores absolutos de otras funciones, como por ejemplo:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x-2 \geq 0 \\ -x+2 & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -x+2 & x < 2 \end{cases}$$

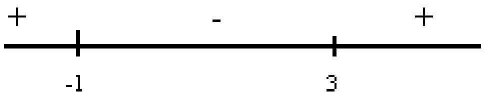
Y cuyo dibujo sería algo como:



Algo más complicadas resultan los valores absolutos de parábolas.

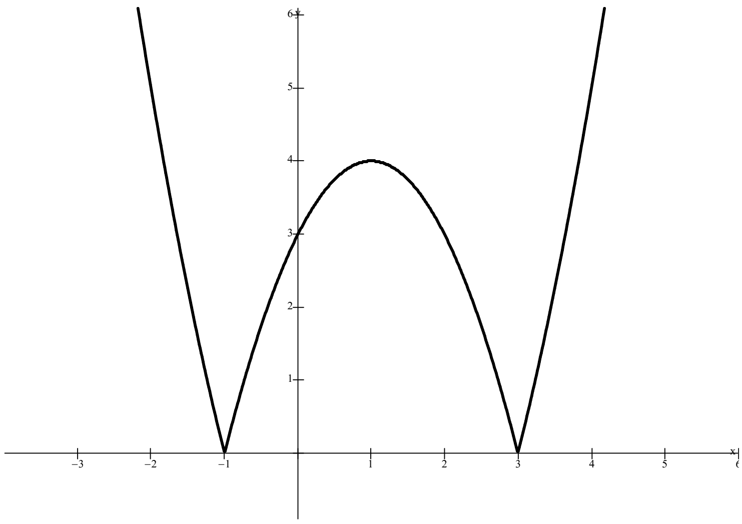
Por ejemplo, para representar $\left|x^2-2x-3\right|$, primero resolvemos la ecuación $x^2-2x-3=0$, obteniendo como soluciones de la misma *x = -1* y *x = 3*. Estos dos valores dividen a la recta en tres intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,3)$ y $(3,+\infty)$. Tomamos un punto de cada intervalo para ver en cuál de ellos el polinomio es positivo y en cuál es negativo, lo que nos dirá en que trozos del eje X la parábola se queda como está y en cuáles se cambia de signo.

En nuestro caso:



Y por tanto, la función quedaría por trozos: $\left|x^2-2x-3\right| = \begin{cases} x^2-2x-3 & x \le -1 \\ -x^2+2x+3 & -1 < x < 3 \\ x^2-2x-3 & x \ge 3 \end{cases}$

Y su gráfica correspondiente:



Ejercicio:

Representar las funciones:

$a)\ |3x-2|$ $\quad b)\ |4-x|$ $\quad c)\ |x^2-1|$ $\quad d)\ |-x^2+6x|$ $\quad e)\ |x^2-2x-8|$ $\quad f)\ x\cdot|x|$

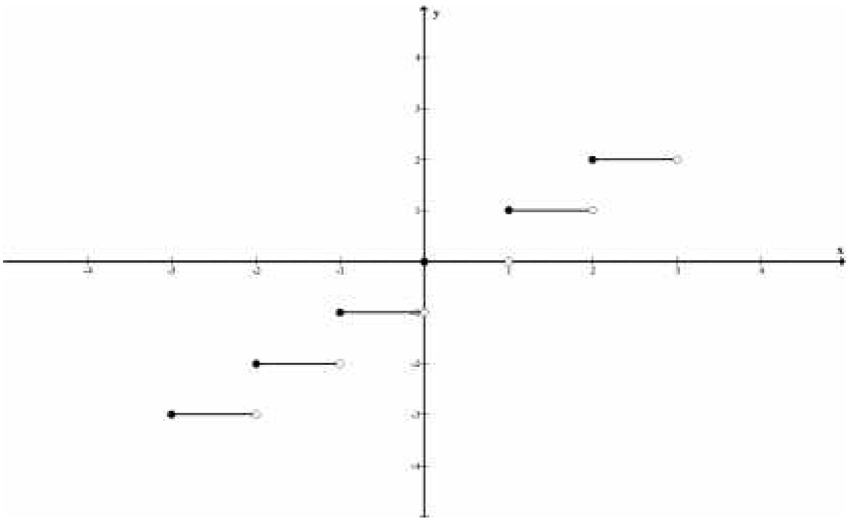
$g)\ 3-|x+2|$ $\quad h)\ x+|2x-6|$ $\quad i)\ x^2-|2x|+1$ $\quad j)\ \dfrac{x}{|x|}$ $\quad k)\ |x^3|$

Dos Funciones Especiales:

Función Parte Entera:

Se define como aquella que aplica a cada número real *x* el mayor número entero que es menos o igual que *x*.

Se representa por $y = Ent(x)$, y su representación gráfica será:



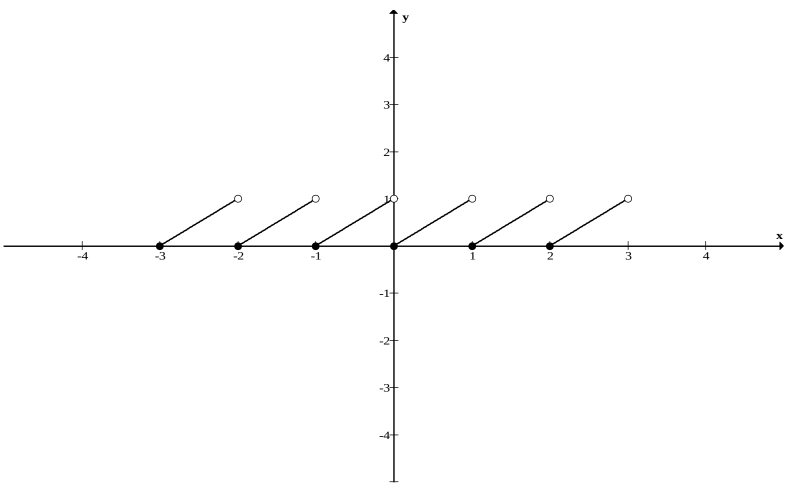
Como propiedades, aparte de que su dominio son todos los números Reales, destacar el hecho de que su recorrido son sólo los números enteros *Z*, lo que resulta obvio pues la parte entera de cualquier número siempre será un número entero.

Función Parte Decimal:

Se define como aquella que aplica a cada número real *x* el propio número menos su parte entera, es decir:

$Dec(x) = x - Ent(x)$

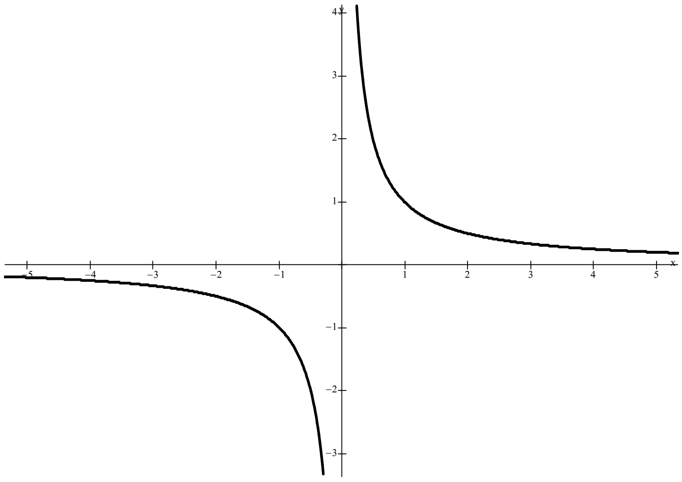
Gráficamente:



6.- FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

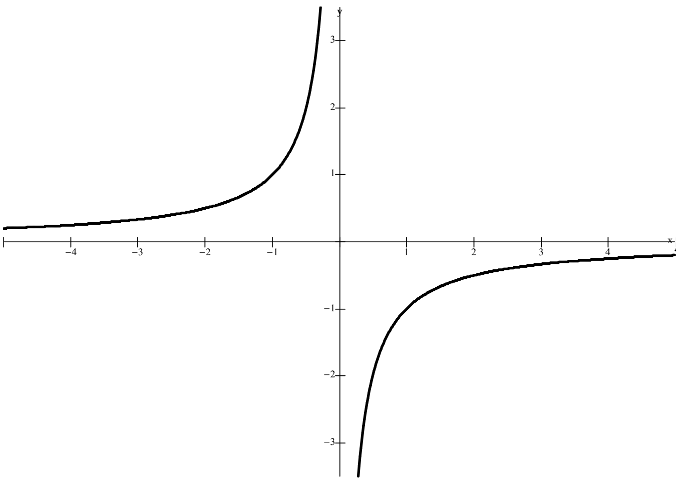
Son funciones cuya ley es del tipo: $f(x) = \frac{k}{x}$, donde k es un número real.

Por ejemplo, si le damos valores a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, obtenemos una gráfica como la siguiente:



Claramente, y como propiedades comunes a todas estas funciones, su dominio y su recorrido son todos los números reales menos el 0. Sus gráficas son hipérbolas con las asíntotas en los ejes: todas tienen una asíntota horizontal en el eje X y otra vertical en el eje Y

Si ahora dibujamos la función $f(x) = \frac{-1}{x}$, obtenemos la siguiente gráfica:

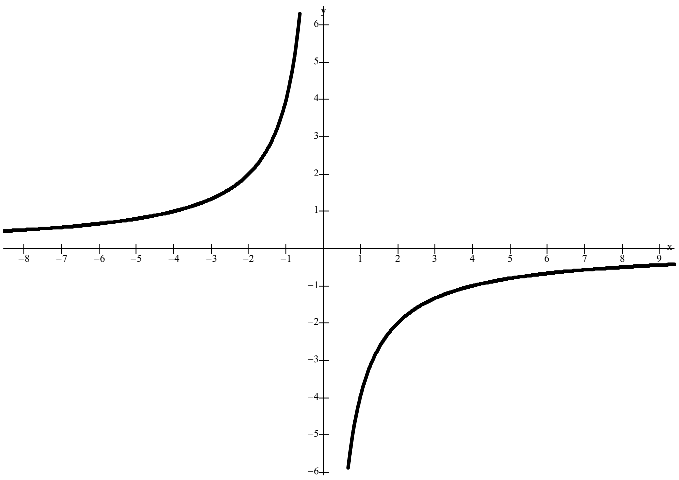


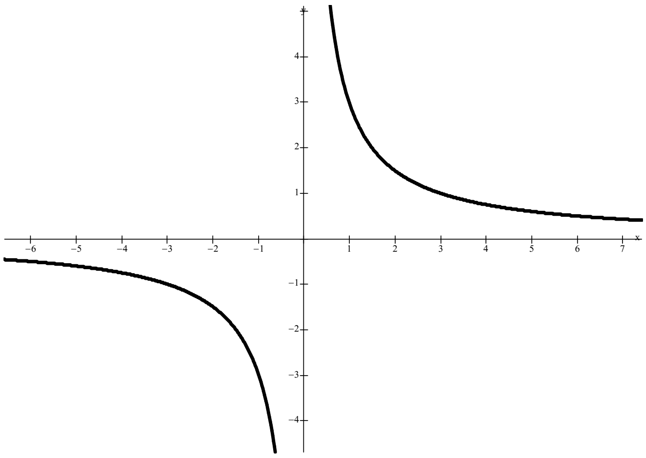
Cuya diferencia fundamental con la anterior es su monotonía (ésta es creciente y la otra era decreciente)

En general, si k es positivo la función va a ser decreciente, mientras que si k es negativo, será decreciente. Con este dato, y sabiendo la “pinta” que van a tener, bastará darle un par de valores (p. ej. el 1 y el –1) para poder dibujarlas correctamente.

Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{-3}{x} \qquad\qquad f(x) = \frac{4}{x}$$





Ejercicio:
Representar las funciones:

$a)\ f(x) = \dfrac{3}{4x}$ $\quad b)\ f(x) = \dfrac{-1}{2x}$ $\quad c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & x < 0 \\ \dfrac{-2}{x} & x > 0 \end{cases}$ $\quad d)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ \dfrac{-1}{x} & 0 < x < 1 \\ -2x+1 & x \ge 1 \end{cases}$

<u>7.- FUNCIONES EXPONENCIALES</u>

Son funciones cuya ley es una potencia, es decir, del tipo

$f(x) = a^x$

Donde *a* es cualquier número positivo.

Por ejemplo, $f(x) = 2^x$

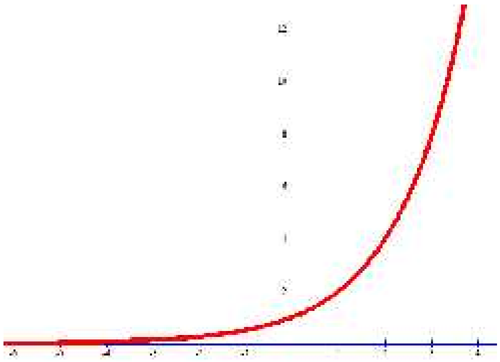
Si le damos valores a esta función, obtenemos una tabla como la siguiente:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
f(x)	1	2	4	8	1/2	1/4	1/8

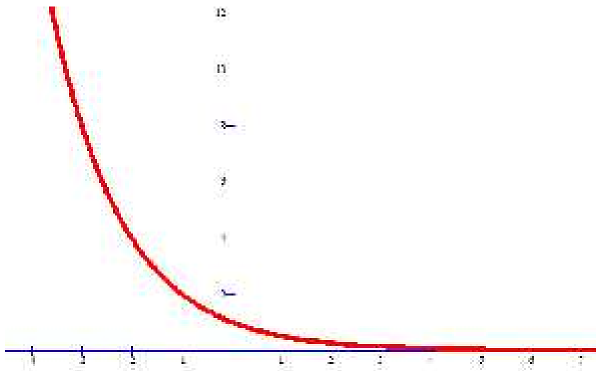
Nota: conviene recordar cómo se hacen las potencias negativas, mediante la propiedad:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Su gráfica sería:

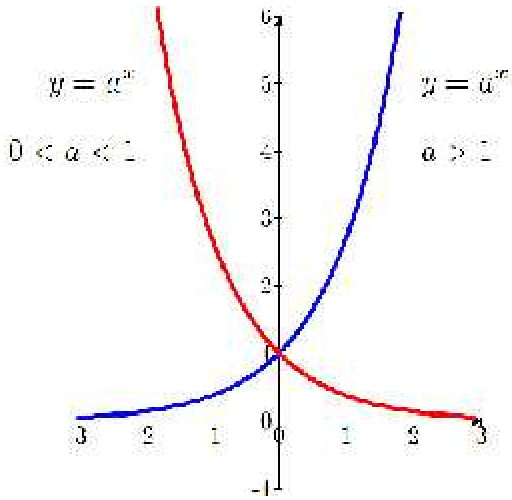


De la misma manera podemos representar la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, obteniendo:



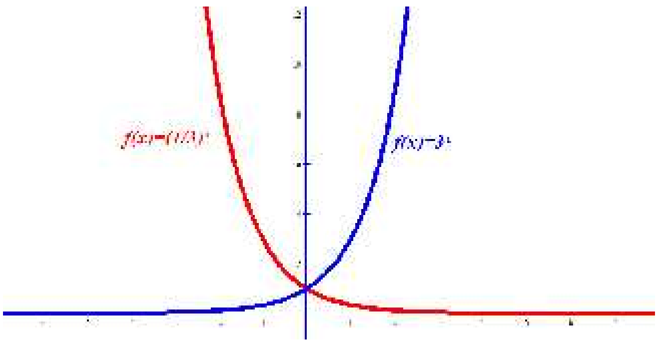
En general vemos por tanto que el dominio de todas estas funciones son todos los números reales y el recorrido los positivos (sin contar el 0).

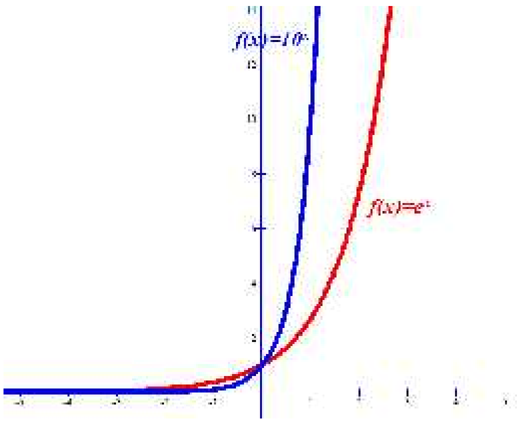
Además, si *a > 1*, la función es creciente, mientras que si *a < 1*, la función es decreciente. Todas tienen una asíntota horizontal en el eje X (por la izquierda o la derecha según sean crecientes o decrecientes) y todas son convexas.



Para dibujarlas no hace falta hacer una tabla de valores, pues todas pasan por el punto (0,1) y por el punto (1,*a*), luego sabiendo la “pinta” que tienen y estos puntos podemos representarlas gráficamente sin problemas.

Así por ejemplo:





La función exponencial suele aparecer en aquellos fenómenos en los que hay una tasa de crecimiento o decrecimiento constante. Por ejemplo:

- *Desintegración Radiactiva*: $C(t)=C_0 \cdot e^{-\lambda t}$, siendo C_0 la masa inicial, λ la constante de desintegración y *t* el tiempo (es la llamada *ley de Rutherford*)
- *Evolución de una población*: $P(t)=P_0 \cdot e^{kt}$, siendo P_0 la población inicial, k la constante de crecimiento y t el tiempo (poblaciones *Malthusianas*)
- *Ley de enfriamiento de Newton*: si T_0 es la temperatura inicial con la que introducimos un cuerpo en una ambiente a temperatura T_a (grados), al cabo de un tiempo t la temperatura del cuerpo es

$$T(t)=T_a+(T_0-T_a)\cdot e^{-kt}$$

Donde k es la constante de enfriamiento particular de cada cuerpo.
Esta ley tiene por ejemplo aplicación en medicina forense para determinar el instante de fallecimiento de una persona.

Ejercicios:

1.- Representar las funciones:

$a)\ f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{4^x} \qquad c)\ f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^x$

$d)\ f(x)=e^{|x|} \qquad e)\ f(x)=\begin{cases} (1'25)^x & x<0 \\ -x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$

2.- De una función $f(x)=k\cdot a^x$ se sabe que $f(0)=5$ y $f(3)=40$

a) Calcular *k* y *a*

b) Calcular $f(-2)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$

3.- El radio es un elemento radiactivo. Una muestra de radio se descompone por emisión de radiaciones de acuerdo con la ecuación:

$$m(t) = 10 \cdot e^{-4'36 \cdot 10^{-4} t}$$

Donde m es la masa de la muestra en gramos y t el tiempo en años.

a) ¿Cuántos gramos de radio hay inicialmente en la muestra?

b) ¿Cuántos habrá al cabo de 1.000 años? ¿Y de 10.000?

8.- FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Conviene antes de definirlas indicar la definición de logaritmo en base *a* de un número, a saber:

$$\boxed{\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x}$$

Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

$\log_5 25 = 2$ porque $5^2 = 25$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$ porque $3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\log_{10} 0'0001 = -4$ porque $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0'0001$

Como logaritmos especiales están el logaritmo en base 10, que se llama logaritmo decimal y se representa por *log* , y el logaritmo Nperiano que es el logaritmo en base *e* (2’71...) y se representa por ln.

Algunas propiedades interesantes de los logaritmos son:

$a) \log_a 1 = 0$

$b) \log_a a = 1$

$c) \log_a x^n = n \log_a x$

$d) \log_a xy = \log_a x + lob_a y$

$e) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Destacar fundamentalmente las dos primeras propiedades que nos servirán para representar las funciones logarítmicas.

Las funciones logarítmicas son aquellas cuya ley es del tipo:

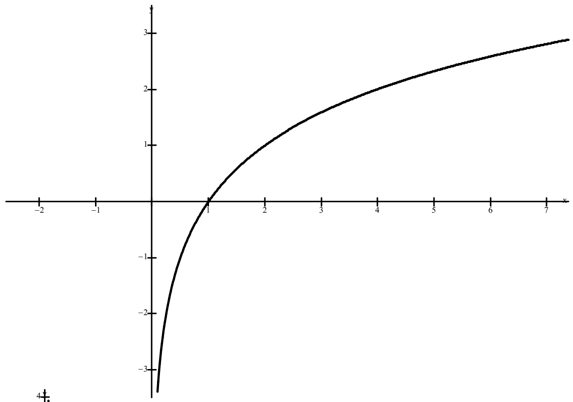
$f(x) = \log_a x$, con *a* un número real positivo.

Como propiedad fundamental, y teniendo en cuenta la definición de logaritmo, el dominio de todas estas funciones son los números reales positivos (sin contar el cero).

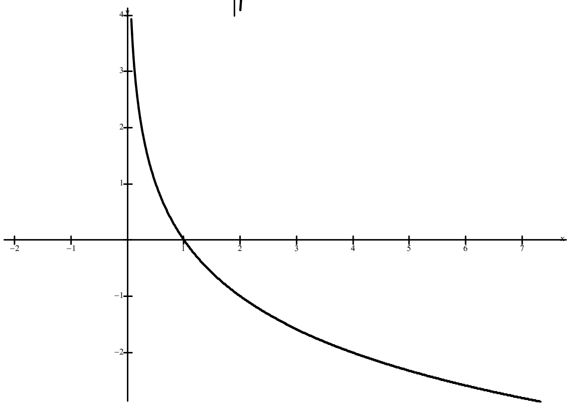
Vamos a representar por ejemplo la función $f(x) = \log_2 x$, para la que obtenemos la siguiente tabla de valores:

x	1	2	4	8	1/2	1/4	1/8
f(x)	0	1	2	3	-1	-2	-3

Su gráfica sería por tanto:

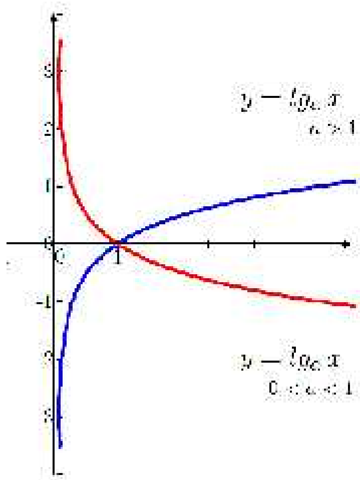


De la misma manera podemos representar la función $f(x) = \log_{1/2} x$, obteniendo:



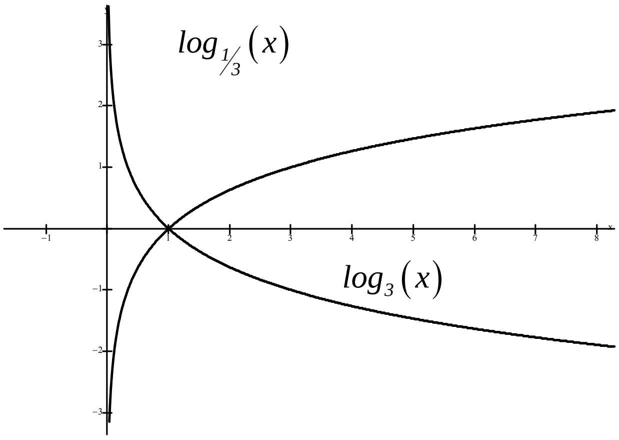
En general, además del dominio antes mencionado, el recorrido de todas las funciones de este tipo son todos los números reales.

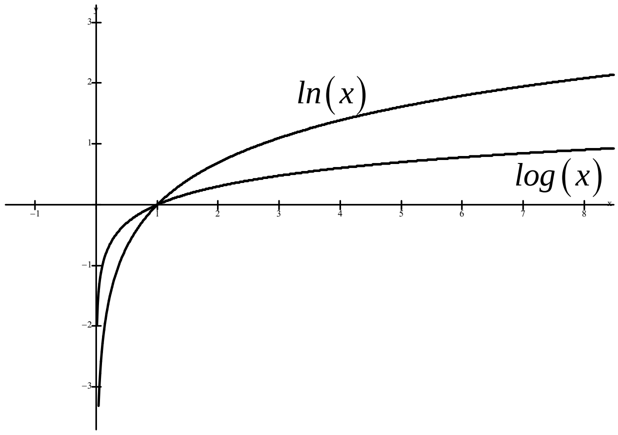
Además, si *a > 1*, son crecientes y cóncavas, mientras que si *a < 1*, son decrecientes y convexas. (Todas tienen una asíntota vertical en el eje Y, que irá hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si son crecientes o decrecientes)



Conociendo esto, y que todas ellas pasan por los puntos *(1,0)* y *(a,1)*, podemos representar cualquier función logarítmica.

Por ejemplo:





Una de las aplicaciones más conocidas de las funciones logarítmicas es la medición de la magnitud de los terremotos en la *escala Richter*. En dicha escala, un terremoto de magnitud cero es aquel cuya medida sismográfica es de 10^{-3} mm. a una distancia de 100 km. del epicentro. De esta manera, un terremoto cuya lectura sismográfica a 100 km del epicentro sea de x mm tendrá una magnitud expresada por la función

$$M(x) = log\left(\frac{x}{10^{-3}}\right)$$

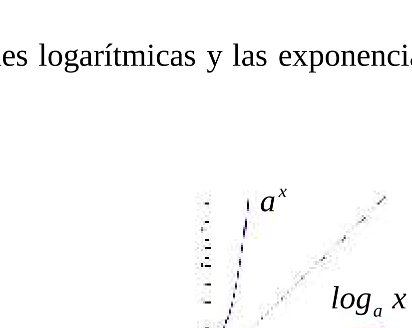
Cada incremento en una unidad en la magnitud de un terremoto en esta escala, indica una intensidad 10 veces mayor (por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es 100 veces mayor en intensidad que uno de magnitud 4)

En *acústica*, la intensidad sonora se mide en decibelios. Un decibelio es la décima parte del logaritmo decimal del cociente entre la intensidad de un sonido y una intensidad umbral tomada como referencia.

Es importante destacar por otra parte que las funciones logarítmicas y las exponenciales son funciones inversas, es decir:

$$log_a a^x = x \quad ; \quad a^{log_a x} = x$$

Sus gráficas correspondientes son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante:



Esto permite resolver ecuaciones sencillas con exponenciales.

Así, para despejar *x* en la ecuación $e^x = 5$, tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros de la ecuación: $\quad ln\, e^x = ln5 \quad \Rightarrow \quad x = ln5 \approx 1'61$

Otros ejemplos serían: $\quad 10^x = 4 \quad \Rightarrow \quad log\,10^x = log\,4 \quad \Rightarrow \quad x = log\,4 \approx 0'6$

$$7^x = 8 \quad \Rightarrow \quad ln7^x = ln8 \quad \Rightarrow \quad x\,ln7 = ln8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ln8}{ln7} \approx 1'07$$

Ejemplos:

En un cultivo de 50 bacterias se observó que a las 2 horas había 400. Si la población de bacterias en el cultivo sigue un crecimiento según la función

$P(t) = 50 \cdot e^{kt}$ *(t es el tiempo en horas)*

Calcular la tasa de crecimiento k

Solución:

Como $P(2) = 400 \quad \Rightarrow \quad 400 = 50 \cdot e^{2k} \quad \Rightarrow \quad e^{2k} = 8 \quad \Rightarrow \quad 2k = ln8 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{ln8}{2} \approx 1'04$

Ejercicios:

1.- Representar las funciones:

$$a)\ f(x) = log_{3/4}\, x \qquad b)\ f(x) = log_{4/3}\, x \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 0 \\ ln\, x & x > 0 \end{cases}$$

2.- La función que describe el crecimiento del coste (en euros) de un artículo es $C(t) = 0'05 \cdot e^{0'097t}$, siendo *t* el tiempo en años transcurrido desde el año 2000.

a) ¿Cuánto valía dicho artículo en el año 2000?
b) ¿Cuánto vale ahora?
c) Aproximadamente, ¿en qué año valdrá 50 céntimos?

9.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

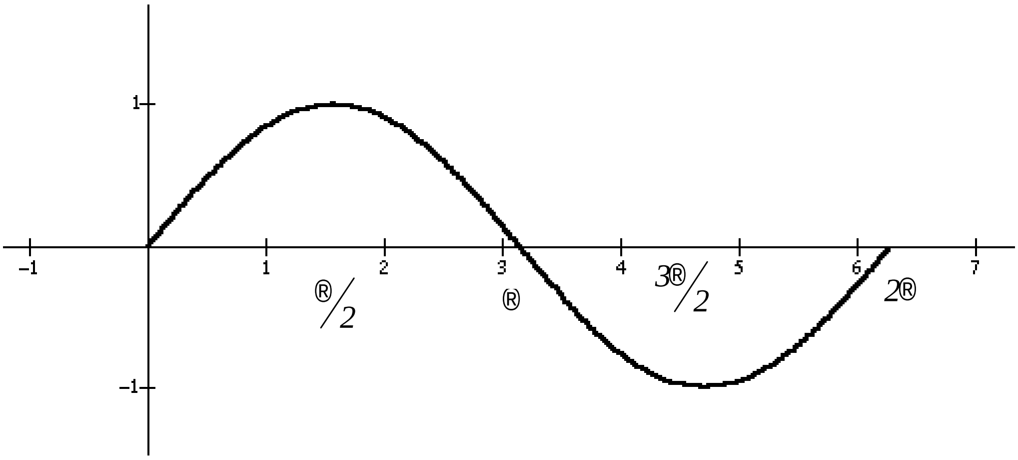
Son funciones cuya ley es una razón trigonométrica.

Las funciones trigonométricas más habituales son ***senx*** y ***cosx***

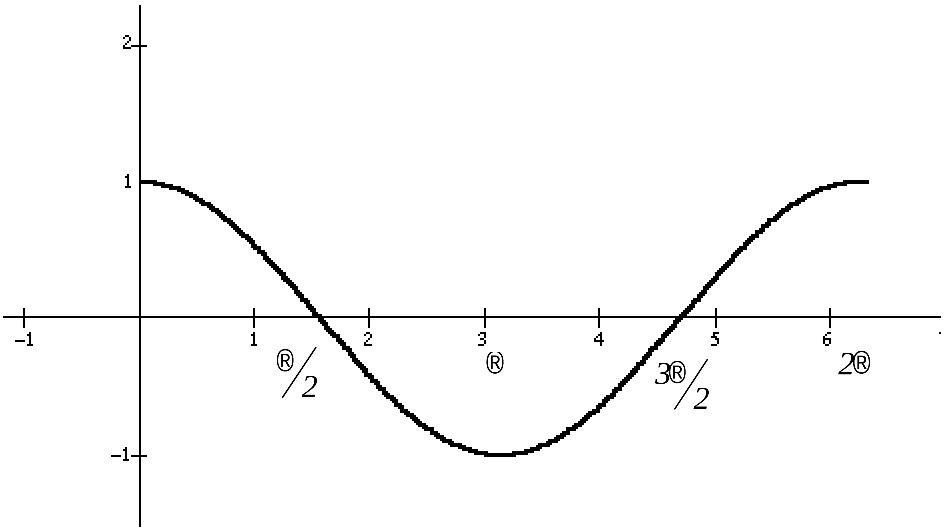
Destacar que, aunque el dominio de éstas funciones son todos los números reales, son periódicas de periodo 2® , lo que significa que se van repitiendo y por tanto lo que haga su gráfica en el intervalo de 0 a 2® , será lo mismo que haga en cualquier intervalo de la misma amplitud (de 2® a 4® , de 4® a 6® , de −2® a 0, ...)

Sus gráficas, que se obtienen con una simple tabla de valores y recordando cuestiones básicas de trigonometría, son las siguientes:

f(x) = sen x



f(x) = cosx

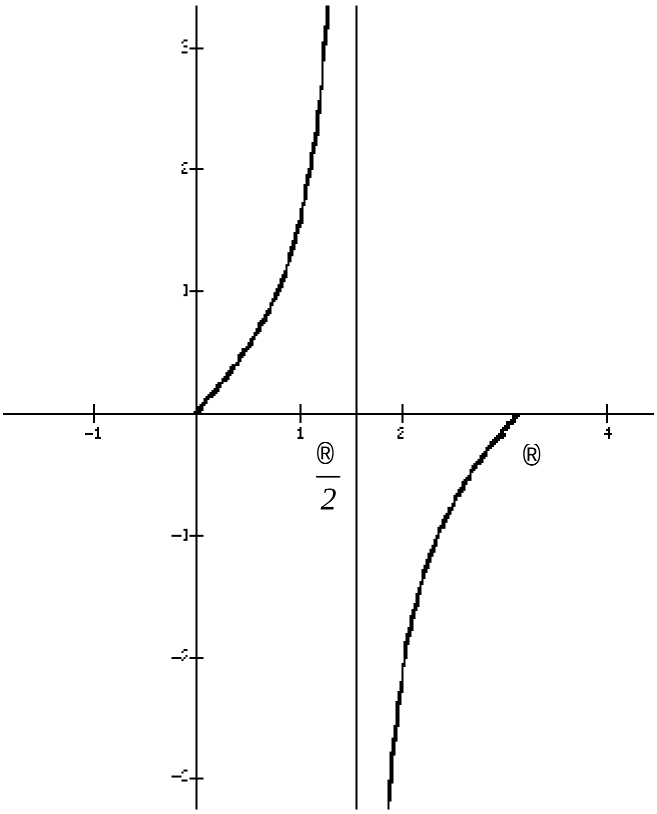


Por otra parte está la función tangente, es decir: $f(x) = tgx = \frac{senx}{\cos x}$, cuyo dominio, a diferencia de las anteriores, serán todos los números reales menos aquellos puntos donde el coseno valga 0, es decir, los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{-\pi}{2},\ \frac{-3\pi}{2}$$

En todos estos puntos la función tangente tendrá asíntotas verticales. Además, el periodo de esta función es π, con lo que bastará representarla en el intervalo de 0 a π.

Su gráfica es:

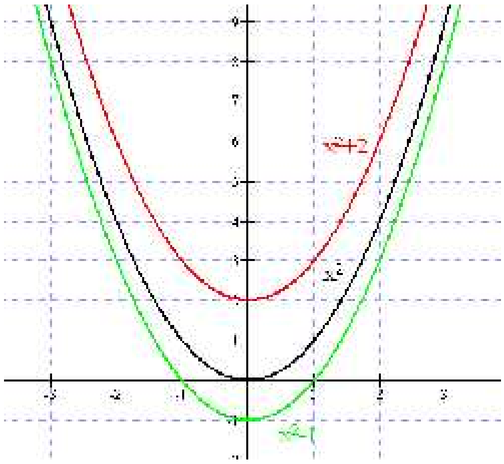


10.- TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Se trata de representar, a partir de las familias de funciones elementales, otras funciones relacionadas con ellas.

a) Representar $f(x)+h$ a partir de $f(x)$

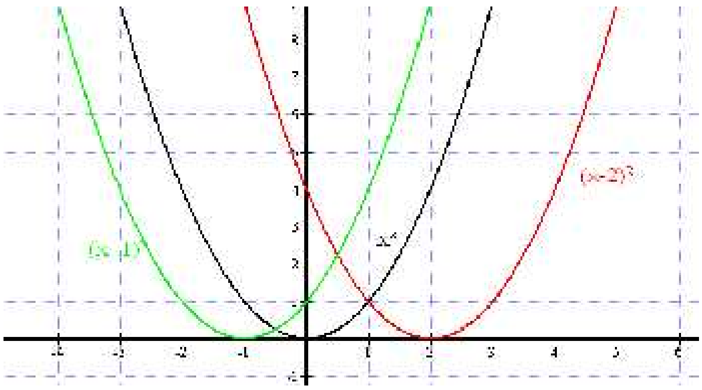
La gráfica de $f(x)$ se desplaza h unidades hacia arriba si h es positivo y h unidades hacia abajo si h es negativo:



Ejercicio: representar x^3+1 ; e^x-2 ; $\cos x-1$

b) Representar $f(x+h)$ a partir de $f(x)$

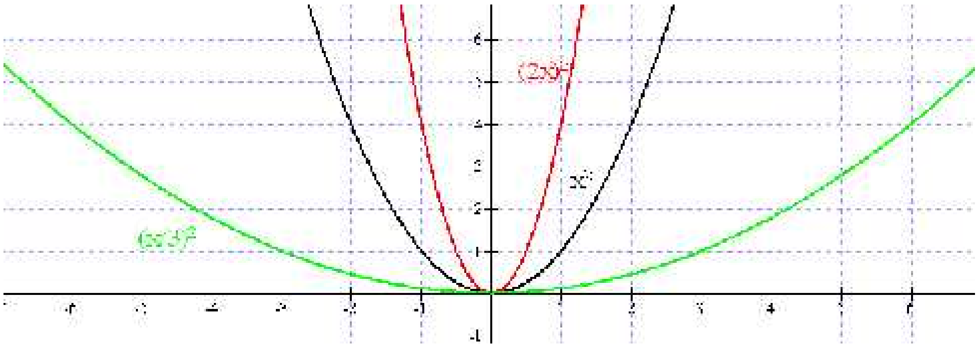
La gráfica de $f(x)$ se desplaza h unidades hacia la izquierda si h es positivo y h unidades hacia la derecha si h es negativo:



Ejercicio: representar $e^{x+1}; \ln(x-2); |x-3|$

c) Representar $f(kx)$ a partir de $f(x)$

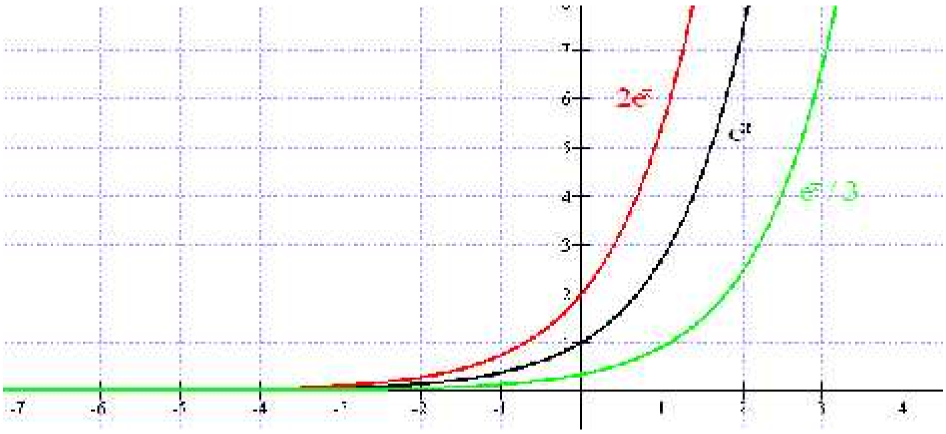
Se divide la distancia al eje OY por *k* (si *k* está dividiendo se multiplica dicha distancia):



Ejercicio: representar $e^{2x}\,; sen(2x); \left(\frac{x}{3}\right)^3; cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

d) Representar $kf(x)$ a partir de $f(x)$

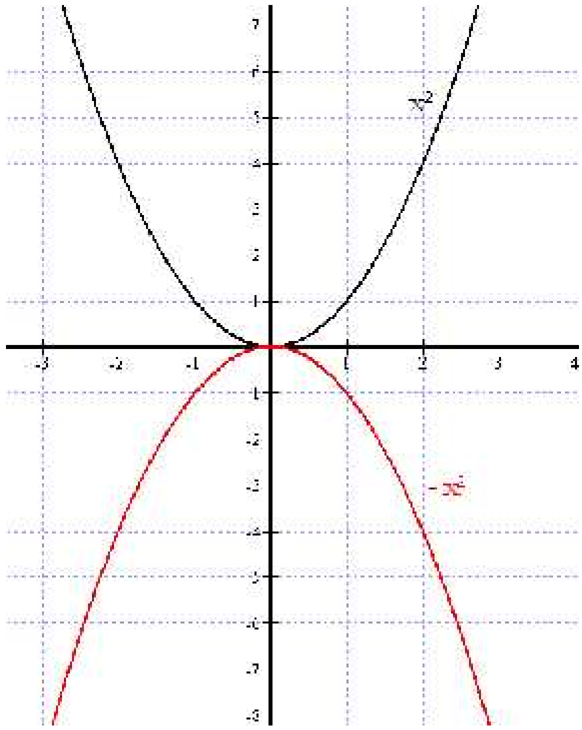
Se multiplican (o dividen) por *k* todas las ordenadas (valores del eje Y) de la gráfica de *f(x)*:



Ejercicio: representar $2\log_2(x);\ 3\sqrt{x}\ ;\ \frac{x^2}{3}$

e) Representar $-f(x)$ a partir de $f(x)$

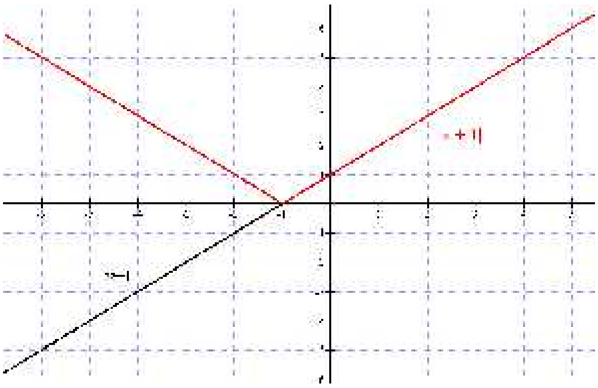
Es un caso particular del anterior cuando *k* = *-1*. La gráfica de $-f(x)$ y la de $f(x)$ son simétricas respecto al eje OX:



Ejercicio: representar $-e^x ; -Ln(x) ; -Ent(x)$

f) Representar $|f(x)|$ a partir de $f(x)$

La parte negativa de la función (la parte de la gráfica de $f(x)$ que está por debajo del eje OX), pasa a positiva por simetría respecto a dicho eje:



Ejercicio: representar $|\cos(x)|$; $|x^3|$; $|\log_3(x)|$

EJERCICIOS

1.- Calcula los dominios de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$ $\quad b)\ f(x)=\sqrt{x-4}$ $\quad c)\ f(x)=\dfrac{x+7}{x^2+1}$

$d)\ f(x)=log(x+5)$ $\quad e)\ f(x)=cos\left(\dfrac{2x-3}{5}\right)$ $\quad f)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-7}}$

$g)\ f(x)=e^{\frac{3x}{x-1}}$ $\quad h)\ f(x)=ln\left(4x^2-12x+5\right)$ $\quad i)\ f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

$$j)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x<0\\ 2^x & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{x-1} & x>1\end{cases} \qquad k)\ f(x)=\begin{cases}3x^2-3 & x<1\\ \dfrac{1}{x^2-4} & x\ge 1\end{cases}$$

2.- Representar gráficamente las siguientes funciones:

1) f(x) = $-x^2+4x+5$ $\quad$ 2) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x<-1\\ 2x^2 & -1\le x<2\\ 8 & 2\le x\end{cases}$ $\quad$ 3) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si\ x\ge 0\\ x^2-x+1 & si\ x<0\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}2/x & x<0\\ Lnx & 0<x<1\\ -x+1 & x\ge 1\end{cases}$ $\quad$ 5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3^x} & x<0\\ 4x-x^2 & 0\le x<4\\ 2x-8 & x\ge 4\end{cases}$ $\quad$ 6) $f(x)=|3x-5|$

7) $f(x)=\begin{cases}x & si\ x<2\\ -2x & si\ x>2\end{cases}$ $\quad$ 8) $f(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x\le 0\\ 1 & si\ 0<x<3\\ 5x-2 & si\ x\ge 3\end{cases}$

9) $f(x)=|x^2-2x-3|$ $\quad$ 10) $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\le -2\\ 2 & -2<x<2\\ x & x\ge 2\end{cases}$

$$11)\ f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x<0 \\ 3x+1 & 0\le x<1 \\ \left(1/4\right)^x & x\ge 1 \end{cases} \qquad 12)\ f(x)=\left|-x^2+8x-12\right|$$

$$13)\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le 0 \\ x^2-2x & x>0 \end{cases} \qquad 14)\ f(x)=\begin{cases} -x & x\le 1 \\ 2^x & x>1 \end{cases} \qquad 15)\ f(x)=\begin{cases} 1 & x\le -1 \\ -x^2+2 & -1<x<1 \\ \log_2 x & x\ge 1 \end{cases}$$

$$16)\ f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x\le 0 \\ x^2-4x & x>0 \end{cases} \qquad 17)\ f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le 1 \\ 3^x & x>1 \end{cases} \qquad 18)\ f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ -x^2+1 & 0<x<1 \\ \log_2 x & x\ge 1 \end{cases}$$

$$19)\ f(x)=4|x|-x^2 \qquad 20)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3^x} & x\le 0 \\ -x^2+2x+3 & 0<x<3 \\ 2x-6 & x\ge 3 \end{cases}$$

$$21)\ f(x)=\begin{cases} 2^x & x\le 0 \\ x^2-2x & 0<x<3 \\ \log_3 x & x\ge 3 \end{cases} \qquad 22)\ \mathrm{f}(x)=\left|x^2-4x-5\right| \qquad 23)\ f(x)=\begin{cases} 3^x & x\le 0 \\ x^2-2x & 0<x<2 \\ -x^2+6x-8 & x\ge 2 \end{cases}$$

$$24)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & x<0 \\ \log_2 x & 0<x<2 \\ -x^2+4x-3 & x\ge 2 \end{cases} \qquad 25)\ f(x)=\left|-x^2+x+6\right|$$

$$26)\ g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^x} & x\le 0 \\ x^2-2x & 0<x<2 \\ 3x-6 & x\ge 2 \end{cases} \qquad 27)\ \mathrm{f}(x)=x^2-4|x|+4$$

$$28)\ f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 2 \\ -x+5 & 2<x<5 \\ -x^2+10x-24 & x\ge 5 \end{cases} \qquad 29)\ \left|x^2-2x-8\right| \qquad 30)\ f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-3 & x<-1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ -2/x & x>1 \end{cases}$$

3.- Un cañón lanza un disparo cuya trayectoria viene dada por $y = -3x^2 + 18x$, con x e y en cientos de metros. Calcula la altura máxima del proyectil y el alcance del disparo

4.- Una población de insectos crece de acuerdo con la función $y = 1 + 2e^t$, siento t el tiempo en meses e y el número de insectos en miles.

a) ¿Cuántos insectos hay inicialmente?
b) ¿Y al cabo de un mes?
c) ¿Cuánto tiempo pasará para que haya 10.000 insectos?

5.- En un trabajo de investigación sobre el rendimiento (en una escala de 0 a 100) durante 24 horas de funcionamiento de cierta válvula, los ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la función

$$R(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 75 \qquad (t \text{ en horas})$$

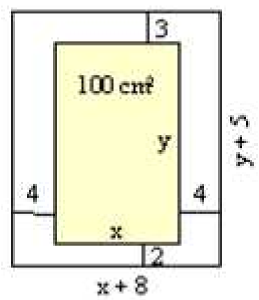
Representa gráficamente la función e indica el rendimiento de la válvula al iniciar su funcionamiento y al finalizarlo. ¿En qué momento tiene máximo rendimiento y cuál es?

6.- Un fondo de inversión genera una rentabilidad R que depende de la cantidad invertida x (en cientos de euros) según la función:

$$R(x) = 0'8x - 0'002x^2 - 5$$

¿Cuál será la rentabilidad si invierto 15.000 €? ¿Cuánto debo invertir si quiero una rentabilidad de 3.000 €? ¿Cuánto debo invertir para obtener la máxima rentabilidad? ¿Cuál será ésta?

7.- Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.

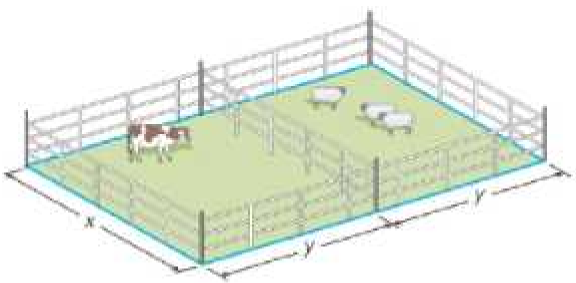


Encuentra la fórmula que te permite calcular la superficie del cartel en función de x, $S(x)$.

Indica qué tipo de función es.

¿Cuál sería el área del cartel si la zona impresa fuese cuadrada?

8.- Un granjero dispone de 120 m de valla para la construcción de dos cercados idénticos con un lado común, tal y como se muestra en la figura:



a) Expresar el área *A(x)* en función de la anchura *x*

b) ¿Cuál es el dominio de *A(x)?*

c) ¿Para qué valor de *x* el área encerrada será máxima?

9.- Si tomamos, vía oral, un comprimido de 100 mg de un medicamento para el asma, y éste es el único medicamento que tomamos, entonces la cantidad *C* (en mg) de medicamento presente en el flujo sanguíneo después de *t* minutos viene dada por la expresión:

$$C(t) = 100\left(1 - 0'9^t\right)$$

a) Determinar la cantidad de medicamento que habrá en la sangre 5 minutos después de la toma

b) ¿Cuántos minutos tendrán que pasar aproximadamente para que el organismo asimile la mitad del medicamento?

10.- Una tienda de productos de belleza ha comprobado que el número de unidades de un determinado perfume vendidas cada mes depende del precio de venta de acuerdo con la expresión:

$$N(x) = 270 - 3x \qquad (x \text{ es el precio por unidad en euros})$$

a) Determinar la función *I(x)* que representa los ingresos obtenidos cada mes en función del precio por unidad (Ingresos = nº unidades * precio/unidad)

b) ¿Cuál será el precio por unidad que hace máximos estos ingresos?

c) ¿Cuántas unidades se venderán con ese precio?

11.- El carbono 14, isótopo del carbono que se usa para la datación de restos arqueológicos, se desintegra de acuerdo con la función $C(t) = C_0 \cdot e^{-0'000121t}$ (*t* en años). ¿Cuántos años han de pasar para que la cantidad inicial de carbono 14, C_0, se reduzca a la mitad (periodo de semidesintegración)? ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial quedará tras 10.000 años?

12.- Representar las siguientes funciones a partir de las que se indican:

1) e^{x-2} a partir de e^{x} 2) $(x+2)^3$ a partir de x^3

3) $|x|-1$ a partir de $|x|$ 4) $-\log_2 x$ a partir de $\log_2 x$

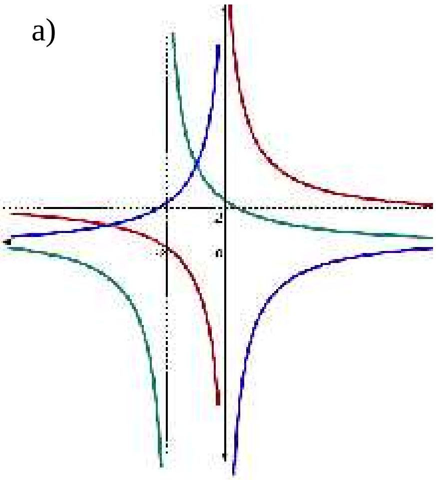
5) $\dfrac{6}{x}$ a partir de $\dfrac{1}{x}$ 6) $\dfrac{1}{x-1}+2$ a partir de $\dfrac{1}{x}$

7) $-e^{x+3}+1$ a partir de e^{x} 8) $3\sqrt{x+4}$ a partir de $\sqrt{x}$

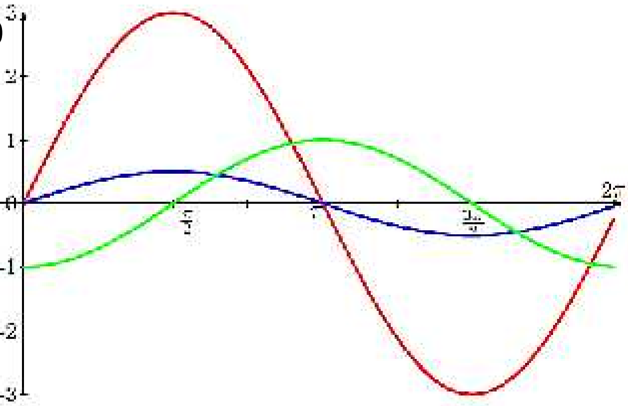
9) $|ln(x+1)|$ a partir de *lnx* 10) $2sen\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ a partir de *senx*

13.- Indicar a qué funciones corresponden las siguientes gráficas:

a)



b)

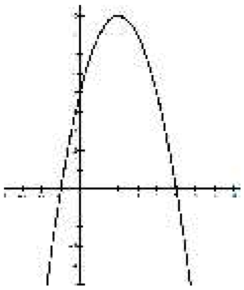


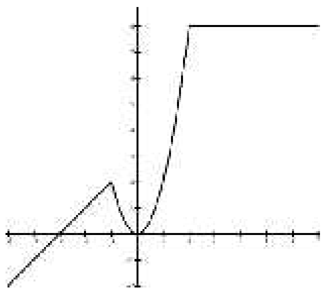
<u>Soluciones:</u>

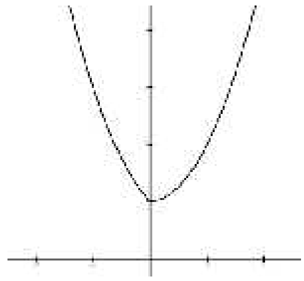
1.- $a)\ \mathbb{R}-\{2,3\}$ $\quad b)\ [4,+\infty)$ $\quad c)\ \mathbb{R}$ $\quad d)\ (-5,+\infty)$ $\quad e)\ \mathbb{R}$ $\quad f)\ (-\infty,-3]\cup(7,+\infty)$ $\quad g)\ \mathbb{R}-\{1\}$

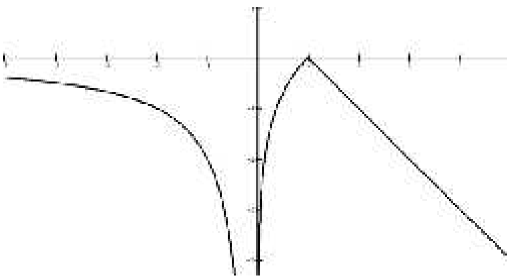
$h)\ \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ $\quad i)\ \mathbb{R}$ $\quad j)\ \mathbb{R}-\{-1,1\}$ $\quad k)\ \mathbb{R}-\{2\}$

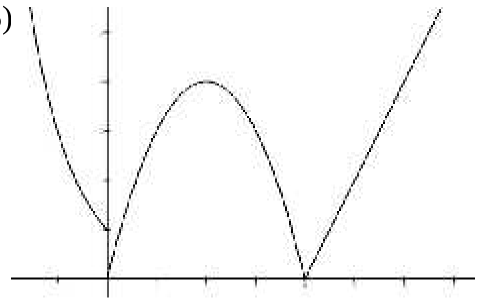
2.-

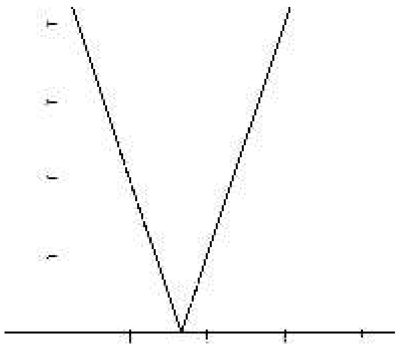
1) 

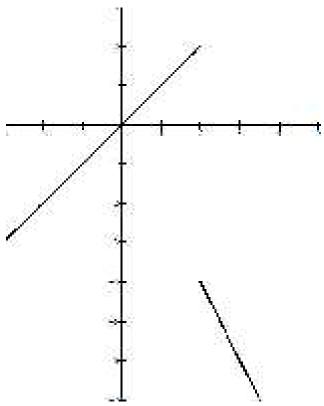
2) 

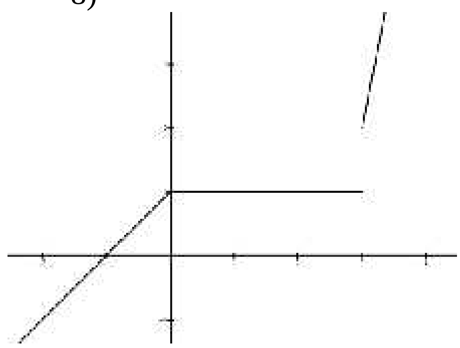
3) 

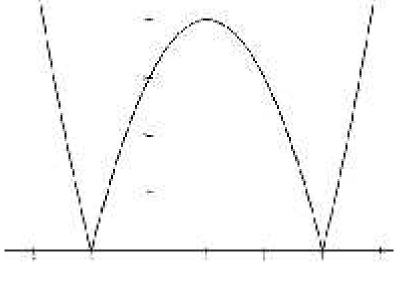
4) 

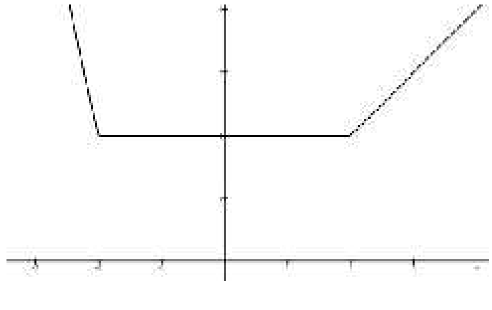
5) 

6) 

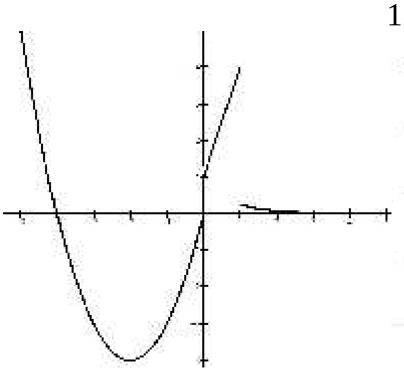
7) 

8) 

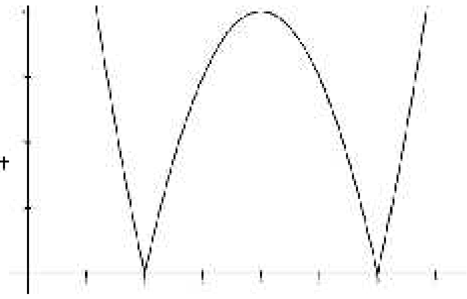
9) 

10) 

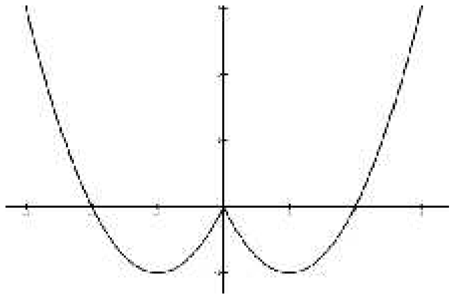
11)



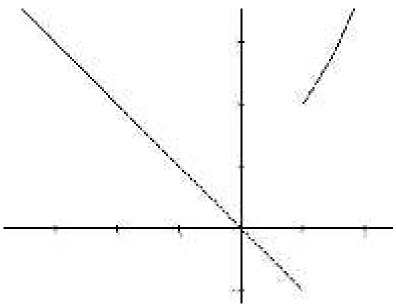
12)



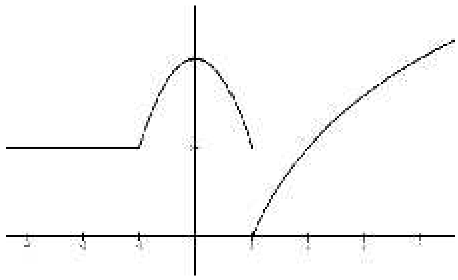
13)



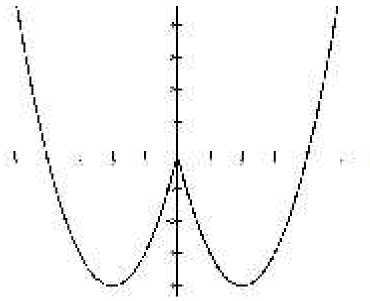
14)



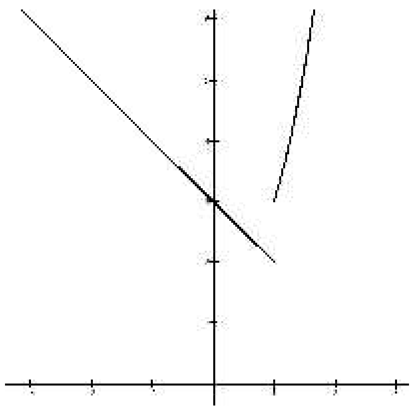
15)



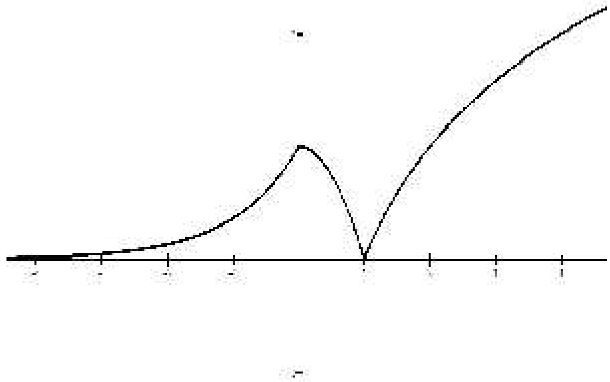
16)



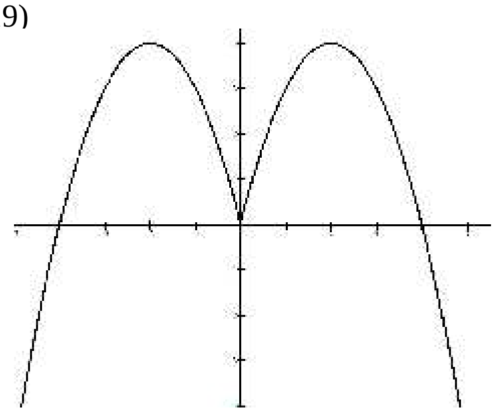
17)



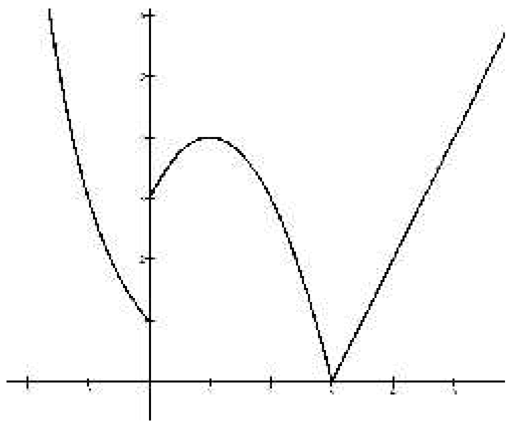
18)



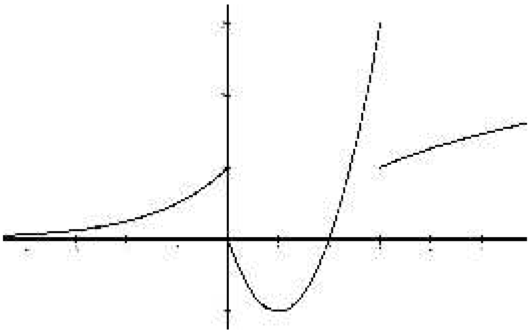
19)



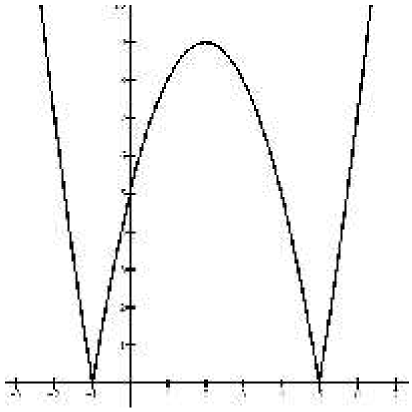
20)



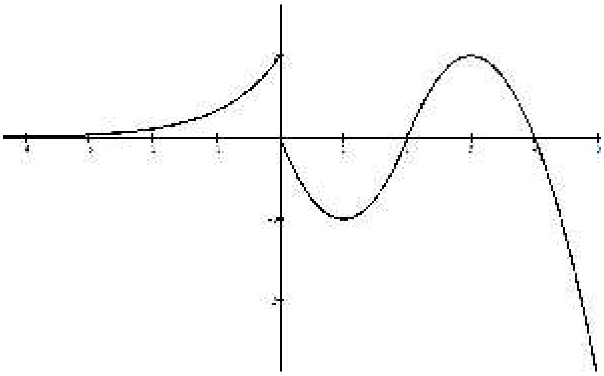
21)



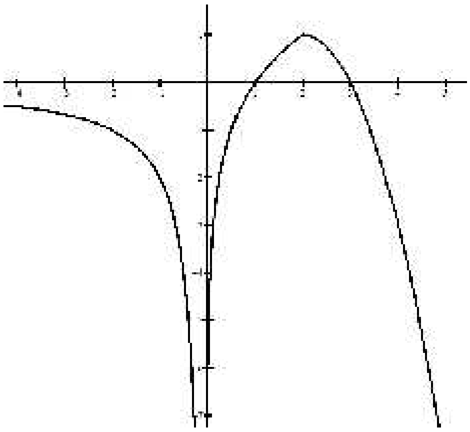
22)



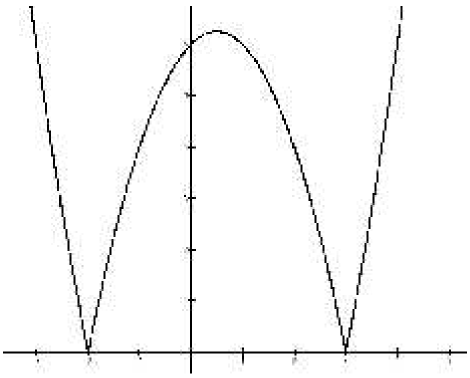
23)



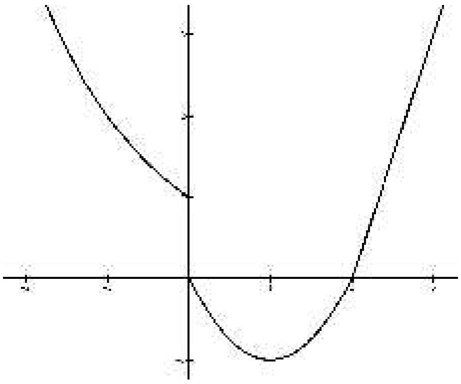
24)



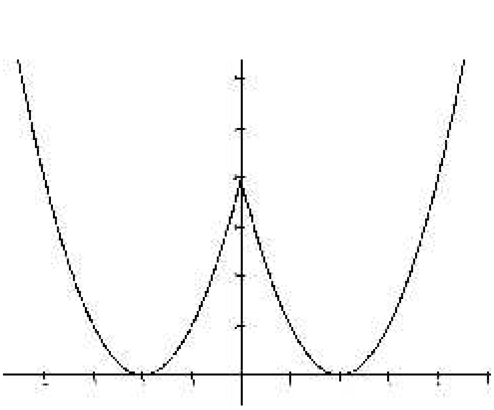
25)



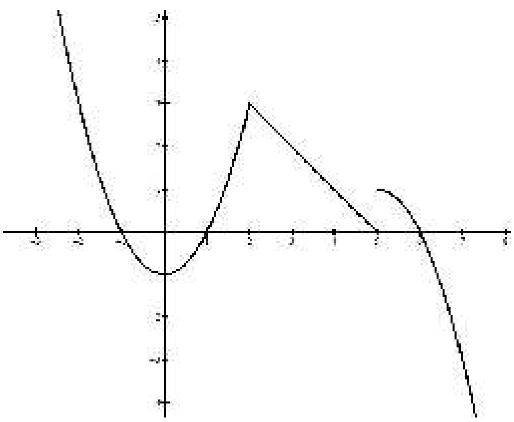
26)

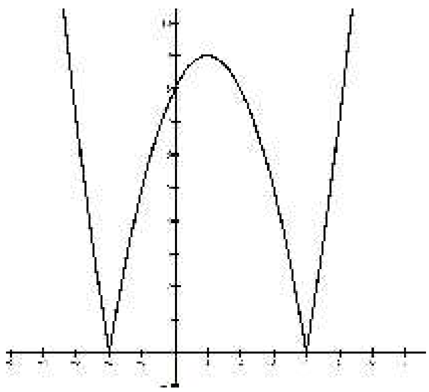


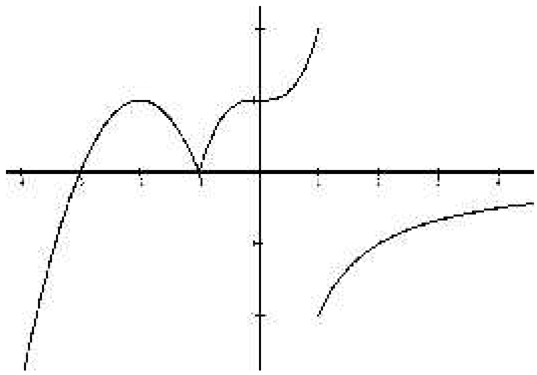
27)



28)



29) 

30) 

3.- altura 2700 m y alcance 600 m

4.- a) 3000 insectos b) ≈ 6436 insectos c) ≈ un mes y medio

5.- Al inicio, 75; al final, 51. El máximo rendimiento a las 10 horas y es de 100

6.- 7.000 € ; 5000 € ; 20.000 € con una rentabilidad de 7.500 €

7.- $S(x) = 5x + \frac{800}{x} + 140$; si fuese cuadrada, $x = y = 10$, $S(10) = 270\ cm^2$

8.- a) $A(x) = -x^2 + 60x$ b) (0,120) c) $x = 30m$

9.- a) ≈ 40’95 mg b) ≈ 6’58 minutos

10.- a) $I(x) = -3x^2 + 270x$ b) 45 €/u c) 135 unidades

11.- ≈ 5728’5 años; ≈ un 30%

13.- a) roja: $\frac{1}{x} + 2$ verde: $\frac{1}{x+2}$ azul: $-\frac{1}{x}$

b) roja: $3senx$ verde: $sen\left(x - \frac{\text{®}}{2}\right)$ azul: $\frac{1}{2}senx$

TEMA 8.- LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.- INTRODUCCIÓN A LA IDEA DE LÍMITE

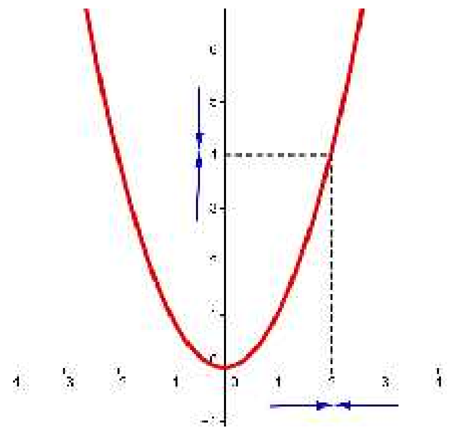
Más allá de la definición formal y rigurosa de límite establecida por *Weierstrass* en 1872, demasiado abstracta y elevada para este nivel de 1º de Bachillerato y que dejaremos para cursos posteriores, nos centraremos en la idea formulada de manera más imprecisa pero más intuitiva por *DÁlembert* (finales del siglo XVIII) y *Cauchy* (1821).

Esta idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de entender: "es el valor al que se aproxima la función, f(x), cuando el valor de la variable independiente, x, se aproxima a dicho punto".

Así, si en la función $f(x) = x^2$ le damos a la variable *x* valores próximos al 2, tanto inferiores como superiores a 2, la función se aproxima al valor 4.

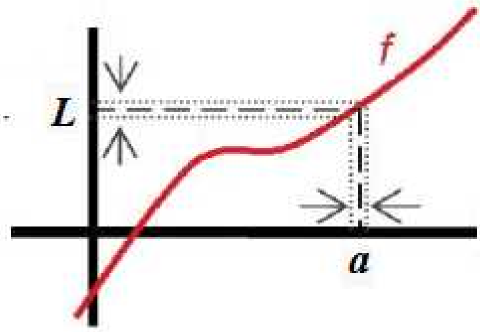
x	f(x)
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
...	...
↓	↓
2	4

x	f(x)
2,1	4.41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
...	...
↓	↓
2	4



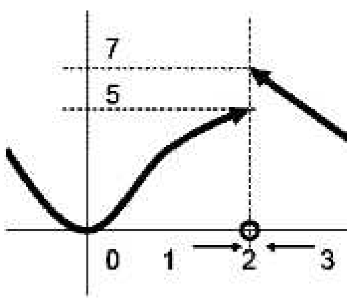
Más formalmente, la definición de ***límite de una función en un punto:***

Diremos que el límite cuando "x" tiende a "a" de una función f es L, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *si al tomar la variable independiente valores próximos al número a (tanto menores como mayores) los correspondientes valores de f(x) se aproximan al número L.*



Así, en el ejemplo anterior, escribiremos $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

Pero si ahora nos fijamos en una función como ésta:



vemos que si nos acercamos al 2 por valores más pequeños que él, la función se acerca al 5, mientras que si nos acercamos por valores mayores que 2, la función se acerca al 7.

Esto obliga a distinguir dos límites, según nos acerquemos por un lado u otro. Son los llamados ***límites laterales***.

El *límite lateral por la izquierda* es el valor al que se acerca la función cuando la variable se acerca a un punto por valores *menores* que él. Se escribe $\lim_{x \to a^-} f(x)$

En nuestro ejemplo: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$

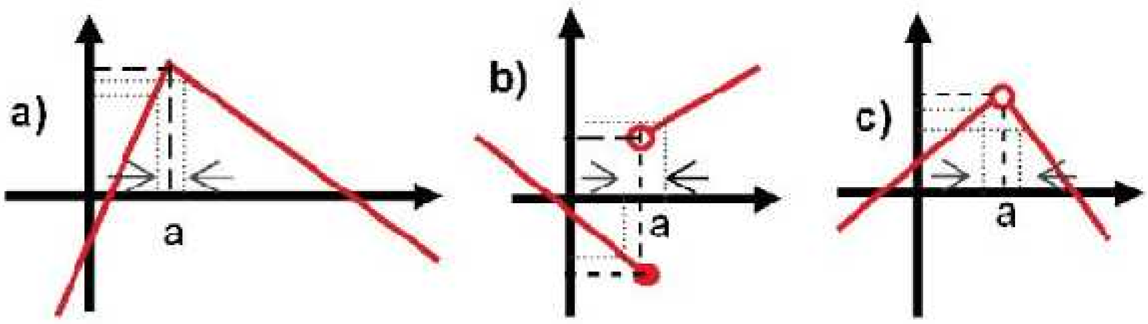
El *límite lateral por la derecha* es el valor al que se acerca la función cuando la variable se acerca a un punto por valores *mayores* que él. Se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x)$

En nuestro ejemplo: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$

Teorema: *Para que exista el límite de una función en un punto, los límites laterales deben existir y ser iguales, es decir,*

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Veamos algunos ejemplos gráficos:



En los ejemplos *a)* y *c)* los límites laterales coinciden y la función tiene límite en *a*. Sin embargo en el gráfico *b)* los límites laterales son distintos y por tanto la función no tiene límite en ese punto.

Es importante destacar que en la idea de límite importa lo que pasa ***cerca*** de *a*, pero no lo que pasa ***en*** *a*. De hecho, como vemos en el gráfico *c)* anterior, el punto ni siquiera tiene porqué estar en el dominio de la función para que ésta tenga límite en él.

Ejercicio: Representar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & x < 0 \\ -x + 1 & 0 \le x < 1 \\ \ln x & x \ge 1 \end{cases}$

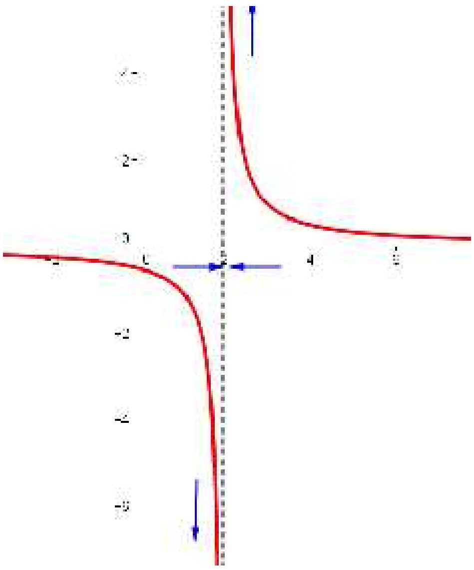
A la vista de su gráfica calcular sus límites en $a = 0$ y en $a = 1$.

<u>2.- LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO</u>

A veces nos encontramos con que al acercarse x a un valor a, la función toma valores cada vez más grandes (positivos o negativos). Diremos en este caso que la función se acerca a $\pm\infty$, según sean positivos o negativos los valores que toma la función, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Veamos por ejemplo la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$



$x \to 2^-$	$\frac{1}{x-2}$		$2^+ \leftarrow x$
1.9	-10	10	2.1
1.99	-100	100	2.01
1.9999	-10^4	10^4	2.0001

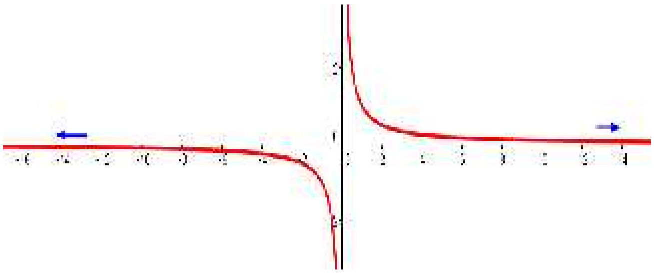
Si le damos valores próximos a 2 por su izquierda, la función toma valores cada vez más grandes y negativos, mientras que si le damos valores próximos a 2 por su derecha, la función toma valores cada vez más grandes y positivos.

Por tanto, en nuestro ejemplo: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Otras veces queremos estudiar el comportamiento de una función cuando los valores de x se hacen "tan grandes" como queramos. Esto lo expresamos como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Si nos fijamos por ejemplo en la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

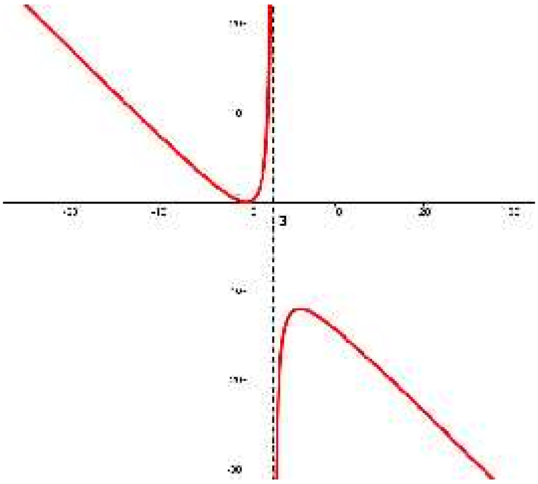


$x \to -\infty$	$\frac{1}{x}$		$x \to +\infty$
-10^2	$-0{,}01$	$0{,}01$	10^2
-10^4	$-0{,}0001$	$0{,}0001$	10^4
-10^{12}	-10^{-12}	10^{-12}	10^{12}

Vemos que los valores que toma la función son cada vez más pequeños, es decir, en este caso:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

Veamos algunos ejemplos gráficos para aclarar estas ideas:

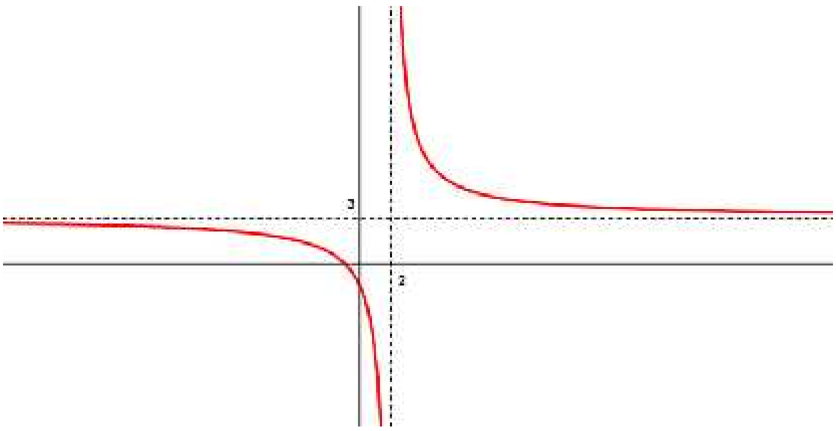


$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

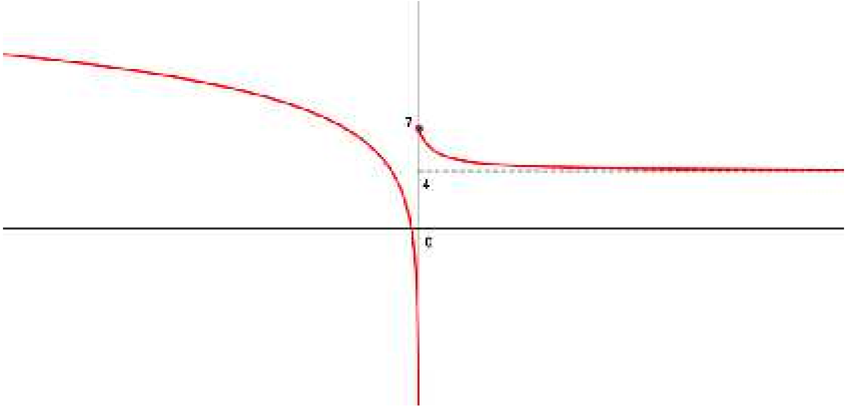


$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$$



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 7$

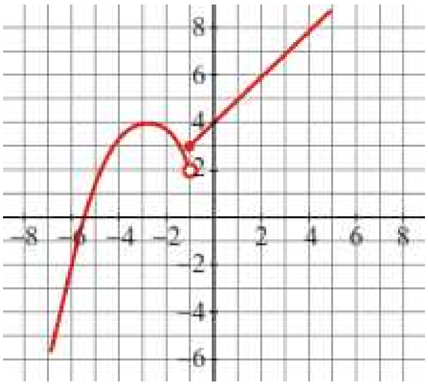
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Ejercicio:

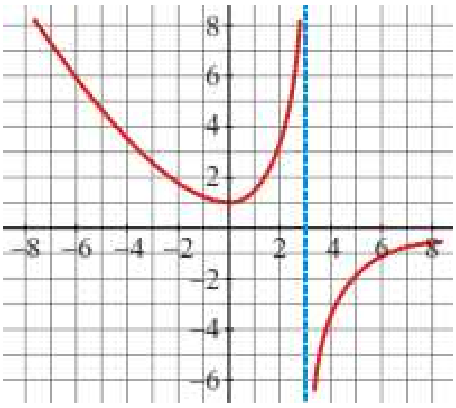
1.- Calcula los límites que se indican:



$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

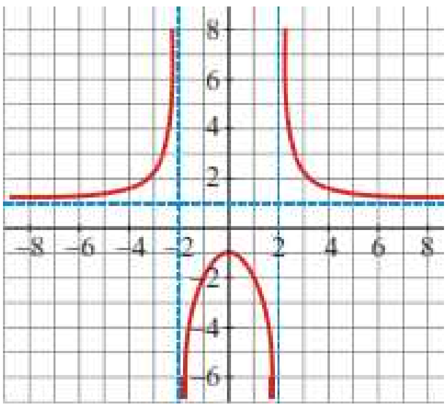
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$



$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$



$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

2.- Representar la función $f(x)=\begin{cases} e^x & x \le 0 \\ -\ln x & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & x \ge 1 \end{cases}$

A la vista de su gráfica calcular sus límites en *0, 1,* +∞ y -∞

<u>3.- CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES</u>

En general, para calcular el límite de una función en un punto, simplemente basta con sustituir la variable x por el valor de dicho punto.

Por ejemplo: $\lim_{x\to 2} x^2-3x+5=3$; $\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{5}{3}$; $\lim_{x\to 0} 2^x=1$

Conviene tener en cuenta el dominio de la función. Así, no tiene sentido plantearse siquiera el límite: $\lim_{x\to -1}\sqrt{x}$

En las funciones a trozos habrá que hacer los límites laterales:

Ejemplo 1:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x<2 \\ x^2+x-1 & x\ge 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2} 3x-1=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+x-1=5$$

Como existen ambos límites laterales y son iguales podemos decir que $\exists \lim_{x\to 2} f(x)=5$

Ejemplo 2:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & x<0 \\ x^3+2x-3 & x\ge 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} x^3+2x-3=-3$$

Como los límites laterales son distintos podemos decir que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$

Ejemplo 3:

O calculamos los límites en dos puntos distintos:

$$f(x)=\begin{cases}3-x & si \quad x<1\\ 2 & si \quad 1\le x<3\\ x+1 & si \quad x\ge 3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3-x)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2=2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+1)=4\end{array}\right\}\rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)\end{cases}$$

También hay que tener en cuenta lo que significan las ideas de $+\infty$ y $-\infty$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+3x^2-2x+1=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{2}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} -2x^2+3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+x-1=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^2+4=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} Lnx=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

A veces, para calcular un límite en $-\infty$, conviene cambiar la *x* por *–x* y calcular el límite en $+\infty$

Así: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1+x}=\left(e^{+\infty}\right)=+\infty$

Y para los límites infinitos habrá que tener en cuenta los límites laterales para indicar si la función se acerca a $+\infty$ o a $-\infty$.

Así:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=$ como se acerca a ∞, hacemos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}= \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x}= \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2}{1-x}=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2}{1-x}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} Lnx=-\infty$

Ejercicios:

1.- Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-1}{2x}$ $b)\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x}{x+2}$ $c)\ \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2-3x-1}$ $d)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2+3x}$ $e)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^3-1}$

$f)\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{x^3-1}$ $g)\ \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x+5}}{x+4}$ $h)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{2}$ $i)\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1/x^2}$ $j)\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3}{x-2}$

$k)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2+5x+6\right)$ $l)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\ln x\right)$ $m)\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x}{1-x^2}$ $n)\ \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x}{1-x^2}$ $o)\lim\limits_{x \to 0} e^{1/x}$

2.- Dadas las funciones:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \dfrac{4}{x+1} & x \geq 1 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & x<1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases} \qquad c)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & x<1 \\ \sqrt{x+3} & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular sus límites en 1, 0, $+\infty$ y $-\infty$.

En algunas ocasiones, al calcular un límite aparecen expresiones que no tienen sentido, llamadas ***indeterminaciones***, algunas de las cuales pasamos a resolver a continuación:

- **Indeterminación** $\dfrac{0}{0}$

Aparece al calcular límites de la forma $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{0}{0}$

En este caso hay que descomponer por Ruffini ambos polinomios y simplificar:

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x-3}{x^2-9} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+2x^2-6x-4}{x^2+x-6} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\left(x^2+4x+2\right)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+4x+2}{x+3} = \dfrac{14}{5}$

Cuando en este tipo de indeterminaciones aparecen raíces, hay que multiplicar y dividir por el conjugado y operar para posteriormente simplificar:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

- **Indeterminación** $\frac{\infty}{\infty}$

Aparece al calcular límites de la forma $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

Para resolverla dividimos todos los términos del numerador y denominador por la x elevada a la potencia mayor, y simplificamos:

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x^3+7}{3x^3-4x+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x^3}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{8}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-5+\frac{7}{x^3}}{3-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\frac{0-5+0}{3-0+0}=\frac{-5}{3}$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+5}{3x^3-8x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{8x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{5}{x^3}}{3-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{3-0+0}=\frac{0}{3}=0$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^3+11}{7x^4-3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^5}{x^4}-\frac{5x^3}{x^4}+\frac{11}{x^4}}{\frac{7x^4}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-\frac{5}{x}+\frac{11}{x^4}}{7-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\left(\frac{+\infty}{7}\right)=+\infty$$

Analizando los ejemplos, descubrimos la siguiente regla:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\pm\infty & \text{si grado n}^{\text{dor}} > \text{grado d}^{\text{dor}} \ (+ \text{ ó } - \text{ según regla signos con coef. lideres})\\ \frac{p}{q} & \text{si grado n}^{\text{dor}} = \text{grado d}^{\text{dor}} \ (p\text{=coef. lider } P(x);\ q\text{=coef. lider } Q(x))\\ 0 & \text{si grado n}^{\text{dor}} < \text{grado d}^{\text{dor}}\end{cases}$$

Luego realmente no tendremos que dividir por nada, sino sólo fijarnos en los grados de numerador y denominador. Así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-2}{2x^2+x-1}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x^2+8}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-5x-2}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-2}{\sqrt{x+1}}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3x+2}=\frac{2}{3}$$

- **Indeterminación** $\infty-\infty$

A veces se pueden resolver comparando grados:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^7-x^4\right)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-x^2=-\infty$$

Si son funciones racionales conviene operar para transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{2x}{x-2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to2}\frac{1-2x(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{-2x^2-4x+1}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-2$$

Y de nuevo si en este tipo de indeterminaciones aparecen raíces, hay que multiplicar y dividir por el conjugado y operar para posteriormente simplificar:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2-x^2-x}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\frac{1}{2}$$

Ejercicios:

1.- Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-1}{1-x^2} \qquad c)\ \lim_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}+x}{2x+3} \qquad e)\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x+2}-2} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)$$

$g)\ \lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2+5x+10}{x^2+4x+4}$ $h)\lim_{x\to 0} \dfrac{x - x^3}{x^2+x}$ $i)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{5x+2}$

$j)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$ $k)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)$ $l)\ \lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^3+8}$ $m)\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{2x}$

2.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x<1 \\ x^2+3x-4 & 1\le x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x-2} & x>2 \end{cases}$$

Calcular sus límites en 0, 1, 2, + ∞ y en - ∞

3.- Calcular el valor de *a* para que las siguientes funciones tengan límite en $x = 1$

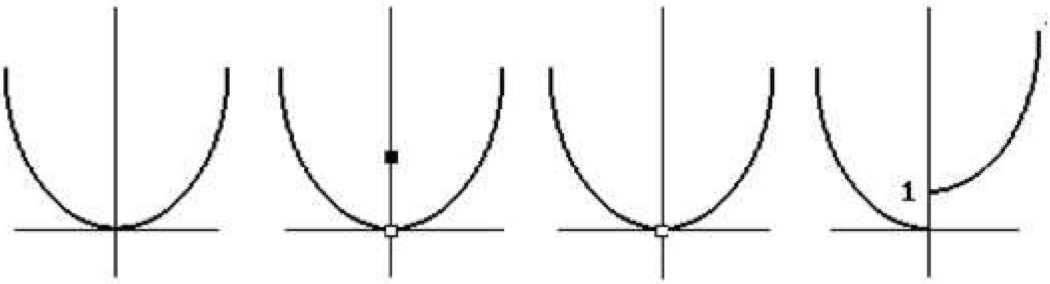
$a)\ f(x)=\begin{cases} x-2 & x<1 \\ 3-ax^2 & x\ge 1 \end{cases}$ $b)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x-3}{x^2-1} & x\ne 1 \\ a-\dfrac{1}{2} & x=1 \end{cases}$ $c)\ f(x)=\begin{cases} e^{ax+1} & x<1 \\ 1-\log_2 x & x\ge 1 \end{cases}$

Calcular además sus límites en+ ∞ y en - ∞

4.- CONTINUIDAD

Continuidad en un Punto

Consideremos las funciones cuyas gráficas están dibujadas a continuación:



a) b) c) d)

Aunque son muy semejantes, de inmediato se observa que en x = 0 tienen un comportamiento muy distinto.

Mientras que la gráfica a) puede dibujarse sin levantar el papel del lápiz, no ocurre así en las otras tres, donde al llegar a x=0 la gráfica se interrumpe. Veamos porqué:

En b) se cumple que *f(0)=2* y $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

En c) no existe *f(0)*

En d) ocurre que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Para definir continuidad de forma coherente con la idea de no levantar el lápiz del papel (no dar “saltos”) debemos establecer una definición que evite los tres casos anteriores.

Sea *a* un punto del dominio de una función *f*.

Se dice que la función f(x) es continua en el punto x = a $\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Es decir, para estudiar la continuidad de una función en un punto, primero calculamos *f(a)*, (para lo que *a* debe pertenecer al dominio de *f*). Después calculamos el límite en dicho punto (calculando si es necesario los límites laterales) y vemos si dicho límite coincide o no con el valor de *f(a)*.

Ejemplo 1:

Estudiamos la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

Calculamos *f(1)=2*

Calculamos los límites laterales: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$

Luego $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Que como coincide con f(1) podemos decir que la función es continua en *x = 1*

Ejemplo 2:

Estudiamos la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ en *x = 1*

Como D = $\mathbb{R}$ -{1}, no existe f(1) y por tanto la función no es continua en *x = 1*

Ejemplo 3:

Estudiamos la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \le 0 \\ \sqrt{2x+1} & x > 0 \end{cases}$ en *x = 0*

Calculamos *f(0)=2*

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 3x+2 = 2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{2x+1} = 1$$

Luego $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ y por tanto la función no es continua en *x = 0*

Ejemplo 4:

Estudiamos la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \ne 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$ en *x = 0*

Calculamos *f(0)=3*

Calculamos el límite: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^x = 1$, que no coincide con *f(0)* y por tanto la función es discontinua en *x = 0*

Tipos de discontinuidades

Una función puede no ser continua en un punto *a* de su dominio por dos motivos:

a) Porque no exista el límite de la función en dicho punto (o bien porque de infinito o porque los límites laterales no coincidan)

En este caso diremos que en dicho punto presenta una *discontinuidad inevitable o de salto* (salto infinito o finito, respectivamente)

b) Porque el límite exista pero no coincida con *f(a)*

En este caso diremos que en dicho punto presenta una *discontinuidad evitable*

El ejemplo 3 anterior es un caso de discontinuidad inevitable, mientras que el ejemplo 4 es una discontinuidad evitable.

Las gráficas b) y c) del principio de este apartado constituyen ejemplos de discontinuidades evitables, mientras que la gráfica d) es un ejemplo de discontinuidad inevitable o de salto finito.

Continuidad de una Función

Para estudiar en general la continuidad de una función (no sólo en un punto), lo primero que haremos será calcular el Dominio de dicha función, pues en aquellos puntos que no pertenezcan al Dominio la función automáticamente no será continua.

Luego, si la función es “a trozos”, estudiaremos la continuidad sólo en los puntos en los que la función “cambia” de un trozo a otro y, en caso de no ser continua, indicaremos el tipo de discontinuidad correspondiente.

Ejemplo 1:

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 1 \\ 2x^2 + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

Primero calculamos el dominio: D = $\mathbb{R}$ -{0}

Por tanto en el *x = 0* la función no es continua (no existe *f(0)*)

Además, como $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty$, la discontinuidad que presenta en el 0 es inevitable de salto infinito.

Como la función cambia en $x = 1$, estudiamos su continuidad en dicho punto:

$f(1)=5$

Calculamos el límite en $x = 1$, y para ello hacemos los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x^2 + 3 = 5$

Por lo que no existe el $\lim_{x \to 1} f(x)$, y por tanto la función no es continua en $x = 1$.

Luego esta función es continua en todo su Dominio ($\mathbb{R}$-{0}) menos en $x = 1$, donde presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

Ejemplo 2:

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Primero calculamos el dominio: D = $\mathbb{R}$-{1}

Por tanto en el $x = 1$ la función no es continua (no existe $f(1)$)

Además, como $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 3 = 4$, la discontinuidad que presenta en el 1 es evitable.

Luego esta función es continua en todo su dominio. Además en $x = 1$ presenta una discontinuidad evitable.

Ejemplo 3:

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & x \neq -2 \\ 3 & x = -2 \end{cases}$

Primero calculamos el dominio: D = $\mathbb{R}$

El único punto de su dominio donde podría no ser continua es en $x = -2$

Calculamos $f(-2)=3$

Calculamos ahora el límite: $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{1}{x+2} = \pm\infty$

Luego esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en $x = -2$ donde presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito

Ejercicios:

1.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 0 \\ (x-1)^2 & x>0 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -3 \\ x^2 & -3<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases} \qquad c)\ f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & x<1 \\ Lnx & x\ge 1 \end{cases} \qquad e)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x\ne 1 \\ 2 & x=1 \end{cases} \qquad f)\ f(x)=\frac{|x|}{x-2}$$

$$g)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-3x-4} & x<0 \\ \dfrac{x-1}{4} & x\ge 0 \end{cases} \qquad h)\ f(x)=\begin{cases} 2x+5 & x<-2 \\ 3 & x=-2 \\ \dfrac{3x+4}{x} & x>-2 \end{cases}$$

2.- Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ k-x & x>2 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} x^2-2k & x\ge 1 \\ x^2-3x-k & x<1 \end{cases}$$

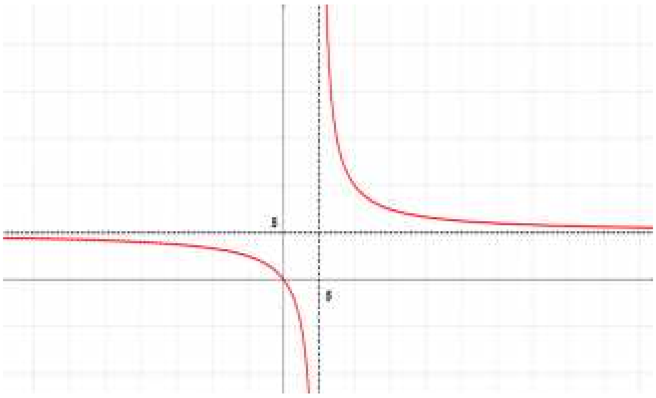
$$c)\ f(x)=\begin{cases} x^2+kx & x\le 3 \\ Ln(x-2) & x>3 \end{cases} \qquad d)\ f(x)=\begin{cases} e^{kx} & x\le 0 \\ x+2k & x>0 \end{cases}$$

$$e)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} & x\ne 3 \\ 2k-3 & x=3 \end{cases} \qquad f)\ f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{|x|}{2} & x\ne 0 \\ k & x=0 \end{cases}$$

EJERCICIOS

1.- Calcular el dominio y los límites que se indican en las siguientes funciones. Indicar además los tipos de discontinuidades que presentan:

a)



$\lim_{x \to 0} f(x) =$

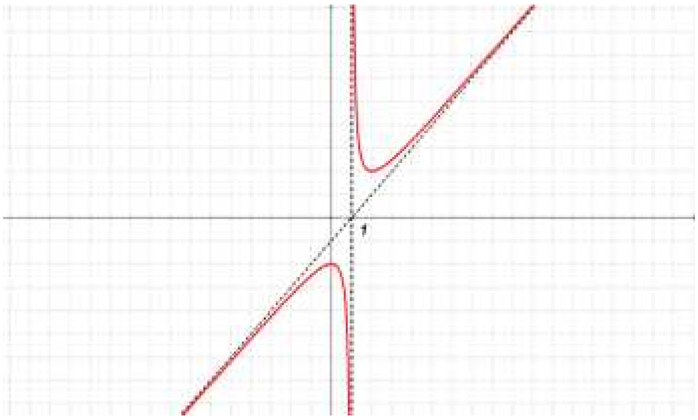
$\lim_{x \to 5^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

b)



$\lim_{x \to 0} f(x) =$

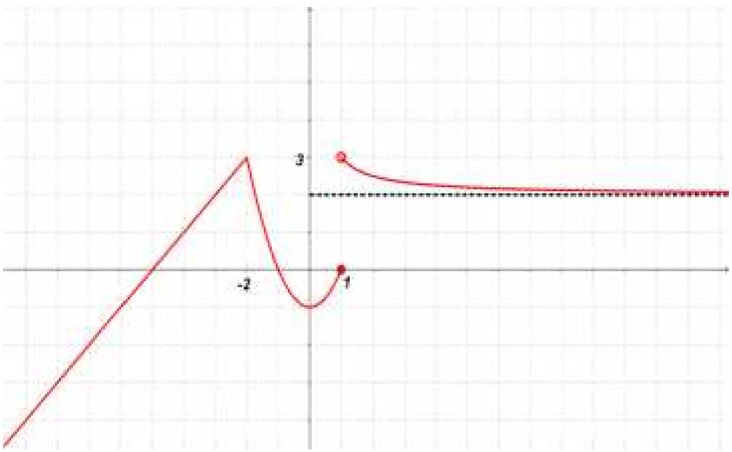
$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

c)



$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

2.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{(x+1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2-x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-x^3}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x+3}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+5}}$ h) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

j) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$ k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$ l) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3-x}{x^2-1}\right)$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3+x^2}{x}$ n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-3x}{2x}$ o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(x+2)^2}$

p) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x+2}-1}$ q) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{x-2}$ r) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ s) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

3.- Calcula los límites de las siguientes funciones en *-1 , 0, 2,* +∞ y -∞:

$a)\ f(x)=\dfrac{-1}{1-x^2}$ $b)\ f(x)=\begin{cases} x^3+1 & x\le -1 \\ \dfrac{2x+2}{3} & x>-1 \end{cases}$ $c)\ f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ x+1 & 0<x<2 \\ \log_2 x & x\ge 2 \end{cases}$

4.- Calcular los límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3-1}{1-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x-2}\right)$ $c)\ \lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2-6}{x^2-3x}-\dfrac{1}{x-3}\right)$ $d)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{3x+2}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{4x}$ $f)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$ $g)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-\dfrac{x^4+1}{x^2-1}\right)$ $h)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$

$i)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$ $j)\ \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ $k)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$

5.- Calcula el valor de *a* para que $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+a}{x-a}-\dfrac{x^2-a}{x+a}\right)=6$

6.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y representarlas gráficamente:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x+5 & x\le -2 \\ x^2-1 & -2<x\le 1 \\ x+2 & x>1 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x\le 0 \\ -x^2+1 & 0<x\le 2 \\ \log_2 x-1 & x>2 \end{cases}$$

7.- Estudia la continuidad de las funciones, indicando los tipos de discontinuidades que presentan:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\le 0 \\ 1 & si\ 0<x\le 2 \\ x^2-3 & si\ x>2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 3 & si\ x\le 0 \\ x & si\ 0<x\le 2 \\ \frac{x+4}{3} & si\ x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & si\ x\le 1 \\ 5x & si\ 1<x\le 5 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ -4\le x\le 2 \\ -x^2+3x-1 & si\ 2<x<3 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ 1-x^2 & si\ x>0 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x=0 \\ \frac{1}{x^2} & si\ x\ne 0 \end{cases}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ h) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\ge 0 \\ x^2-x+1 & si\ x<0 \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x\le 0 \\ 2x-1 & si\ 0<x<1 \\ x^2-3x+3 & si\ x\ge 1 \end{cases}$ j) $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+x^2}$

k) $f(x)=\begin{cases} 2-x & x\le 0 \\ \frac{-1}{x-1} & x>0 \end{cases}$ l) $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & x<0 \\ x^2+x & 0\le x\le 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & x>2 \end{cases}$

m) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<1 \\ x^2+3x-3 & x\geq 1 \end{cases}$ n) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$

o) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x<2 \\ 4 & x=2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{3x-6} & x>2 \end{cases}$ p) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x^3+1} & x\neq -1 \\ -\dfrac{4}{3} & x=-1 \end{cases}$

q) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ r) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{3}{2} & x<-2 \\ \dfrac{1}{x} & -2<x\leq 1 \\ \dfrac{x^4-1}{x^2-1} & x>1 \end{cases}$

8.- Halla el valor de k para que sean continuas las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x\leq 2 \\ x+k & x>2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 3-\dfrac{x}{2} & x<0 \\ x^2+k & x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\neq 1 \\ k & x=1 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} k-x & x\leq 2 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4} & x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+(k-2)x-2k}{x^2-5x+6} & x<2 \\ 7+kx & x\geq 2 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{kx^4-3x^3}{7x^5+3x^3} & x\neq 0 \\ -1 & x=0 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 2k+x^2 & x<0 \\ \dfrac{ke^x+1}{x+2} & x\geq 0 \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} k^2x+1 & x\leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x>1 \end{cases}$

9.- Calcular los valores de *a* y *b* para que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 1-x & x<2 \\ ax+1 & 2\le x<5 \\ b-x & x\ge 5 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x<0 \\ x+2a & 0\le x<2 \\ x^2-2b & x\ge 5 \end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x<1 \\ \sqrt{x}-b & 1\le x<4 \\ \dfrac{4}{x} & x\ge 4 \end{cases} \qquad d)\ f(x)=\begin{cases} ae^{x^2} & x<0 \\ ax+b & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{x}+x\ln x & x\ge 1 \end{cases}$$

10.- En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño *T* de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo *t* (en horas), siguiendo la función:

$$T(t)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{t}{4}+a} & t<8 \\ \dfrac{\sqrt{3t-15}-3}{t-8} & t>8 \end{cases}$$

El parámetro *a* es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor del mismo para el cual el crecimiento se mantenga continuo en *t=8*

a) Decide la cuestión
b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de un bacteria si se cultiva indefinidamente

<u>*Soluciones:*</u>

2.- a) 0 b) -∞ c) 0 d) 0 e) 2 f) +∞ g) 2 h) -1 i) $\frac{1}{8}$ j) 48 k) 0 l) 1

m) 0 n) $-\frac{3}{2}$ o) 0 p) -10 q) 2 r) +∞ s) $\frac{3}{2}$

3.- a) $\pm\infty$, -1, $\frac{1}{3}$, 0, 0 b) 0, $\frac{2}{3}$, 2, +∞, -∞ c) $\frac{1}{e}$, 1, 3 (izq.) y 1 (drcha.), +∞, 0

4.- a) +∞ b) 0 c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{2}$ g) -1 h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i) 2 j) $-\frac{2}{3}$ k) $\frac{\sqrt{a}}{a}$

5.- $a = 3$

6.- a) Discontinua inevitable en $x = 1$ b) Discontinua inevitable en $x = 2$

7.- a) Continua en $\mathbb{R}$ b) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ c) Continua en $(-\infty,5]-\{1\}$

d) Continua en $[-4,3)$ e) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ f) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

g) Continua en $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ h) Continua en $\mathbb{R}$ i) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

j) Continua en $\mathbb{R}-\{-3,0\}$ k) Continua en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ l) Continua en $\mathbb{R}-\{2\}$

m) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ n) Continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ o) Continua en $\mathbb{R}-\{2\}$

p) Continua en $\mathbb{R}$ q) Continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ r) Continua en $\mathbb{R}-\{-2,0,1\}$

8.- a) -2 b) 3 c) 3 d) $\frac{9}{4}$ e) -3 f) Continua para cualquier valor de k

g) $\frac{1}{3}$ h) No es continua para ningún valor de k

9.- a) $a = -1, b = 1$ b) $a = b = \frac{1}{2}$ c)) $a = -1, b = 1$ *d)* $a = b = \frac{1}{2}$

10.- a) $a = -\frac{7}{4}$ b) $\sqrt{3}$ micras

TEMA 9.- INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS

1.- INTRODUCCIÓN

En el s. XVII los científicos dedicaron gran parte de su tiempo a resolver el problema de la tangente, relacionado con cuestiones diversas como por ejemplo:

- En óptica, el ángulo con que un rayo de luz incide en una superficie de una lente está definida en términos de la tangente a la superficie
- En física, la dirección de un cuerpo en movimiento en un punto de su recorrido es la de la tangente en ese punto
- En geometría, el ángulo entre dos curvas que se cortan es el ángulo entre las tangentes en el punto de intersección

Ya sobre 1630 Pierre de *Fermat* desarrolló un método para determinar máximos y mínimos y trazar tangentes a líneas curvas.

Pero fue en la segunda mitad del s. XVII cuando *Newton* y *Leibnitz* (por separado, por supuesto) "inventaron" los conceptos generales de derivada ("fluxión" para Newton y "diferencial" para Leibnitz) e integral, dando lugar a una de las herramientas matemáticas más potentes y de mayor aplicación desde entonces hasta la actualidad.

Ya un siglo más tarde, a mediados del s. XVIII, *Euler* (con su idea de función) y *Lagrange* (fue el primero en hablar de función derivada) desarrollaron y contribuyeron a mejorar la idea de derivada de Newton y Leibniz.

Otros matemáticos de principios del s. XIX como *Bolzano*, *Cauchy* (relacionando el límite con la derivada) y un poco más tarde *Weierstrass* aportaron el rigor formal necesario, dando forma al cálculo diferencial tal y como lo conocemos hoy día.

Pero en el origen de la derivada no sólo está una visión geométrica (tangente) sino también física, como variación de una magnitud respecto a otra.

En innumerables disciplina como electricidad, mecánica, economía, termodinámica, biología, medicina… resulta de importancia fundamental no sólo saber que determinada magnitud varía respecto de otra, sino conocer cómo de rápido se produce esa variación.

Un ejemplo sencillo: pensemos en una persona que cae a un río cuyas aguas se encuentran a muy baja temperatura. Claramente la temperatura corporal dependerá del tiempo que la persona permanezca en el agua y será una función decreciente puesto que la temperatura del cuerpo tenderá a bajar hasta alcanzar la temperatura del agua. Pero en este problema resulta vital conocer la rapidez de disminución de la temperatura corporal. La disminución podría ser rápida al principio de la caída e ir luego disminuyendo más lentamente, o podría ser justo al contrario. De esa información dependerá saber el tiempo disponible para salvar la vida a esa persona, y es justamente esa información la que nos da la derivada de la función.

De hecho hay muchas magnitudes conocidas que se definen como variación (derivada) respecto a otra: la velocidad es la variación del espacio respecto al tiempo; la aceleración, como la variación de la velocidad respecto al tiempo; la intensidad de corriente eléctrica como la variación de la carga eléctrica respecto al tiempo; en hidráulica, el gasto instantáneo es la variación del volumen respecto al tiempo; en electrotenia, la fuerza electromotriz es la variación del flujo del campo magnético respecto al tiempo, …

Es justamente con esta idea de variación instantánea con la que definiremos el concepto de derivada, sin olvidarnos por supuesto de su origen e interpretación geométrica como tangente.

2.- TASA DE VARIACIÓN MEDIA

La siguiente tabla da el precio, en euros, de un producto durante 8 años sucesivos:

precio	10	18	24	28	30	30	28	24
año	0	1	2	3	4	5	6	7

Si llamamos *P(x)* a la función precio según el año *x*, podemos medir la variación del precio en distintos periodos de tiempo.

Así, durante el primer año, dicha variación será: *P(1) - P(0) = 8* euros

Y entre el primer y el tercer año: *P(3) - P(1) = 10* euros

Puede parecer que esta última variación es mayor que la primera, pero no son cantidades que podamos comparar puesto que los periodos temporales sobre las que están medidas son diferentes.

Si queremos saber en qué periodo se ha producido una mayor variación en el precio, calculamos la tasa de variación media, que nos da el incremento por unidad de tiempo:

$$T.V.M._{[0,1]} = \frac{P(1)-P(0)}{1-0} = 8$$

$$T.V.M._{[1,3]} = \frac{P(3)-P(1)}{3-1} = 5$$

Lo que indica que durante el primer año, el precio ha aumentado a un ritmo 8 euros y que durante los tres años siguientes dicho precio ha aumentado a un ritmo (velocidad) de 5 euros/año.

Luego la variación real del precio ha sido mayor en el primer año que en los tres siguientes.

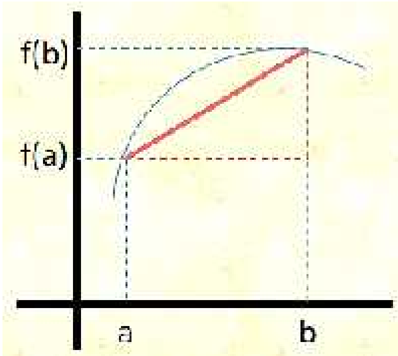
Si observamos la variación entre el tercer y el último año:

$$T.V.M._{[3,7]} = \frac{P(7)-P(3)}{7-3} = \frac{24-28}{4} = -1$$

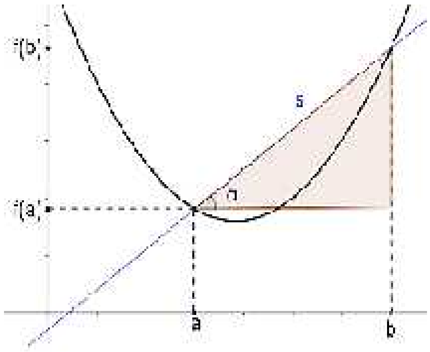
Lo que indica que en ese periodo el precio ha disminuido a razón de un euro/año.

En general, dada una función cualquiera, *f(x)*, se define su ***tasa de variación media*** en el intervalo [a,b] como el *cociente entre el incremento de la función en dicho intervalo y el incremento de la variable independiente:*

$$T.V.M._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Dicha tasa nos da una información relativa al crecimiento o decrecimiento de la función en dicho intervalo.



Además coincide con la pendiente (tangente del ángulo que forma con el eje de abscisas) de la recta secante a la función en los puntos *(a,f(a))* y *(b,f(b))*.

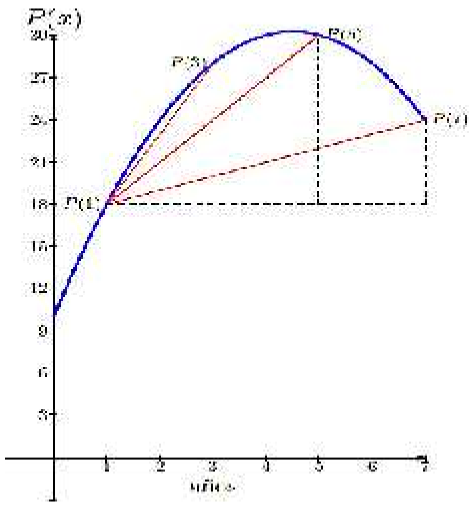
$$T.V.M._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\alpha = m_s$$

Si volvemos a nuestra tabla de precios:

$$T.V.M._{[1,3]} = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = 5 \text{ euros / año}$$

$$T.V.M._{[1,5]} = \frac{P(5) - P(1)}{5 - 1} = 3 \text{ euros / año}$$

$$T.V.M._{[1,7]} = \frac{P(7) - P(1)}{7 - 1} = 1 \text{ euros / año}$$



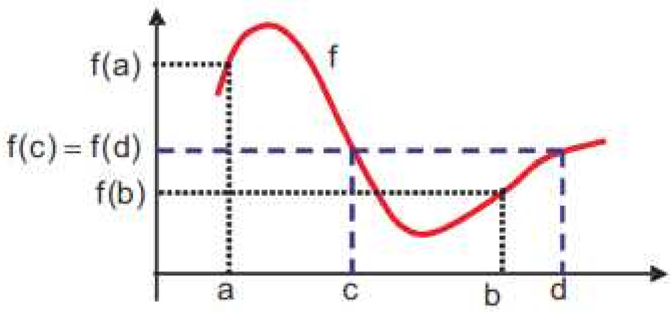
La T.V.M. representa la pendiente del segmento que une los puntos de la curva

Ejercicio: Calcular la T.V.M. de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

$a)\ f(x) = x^2 - 8x + 12 \quad en\ [1,3]\ y\, en\ [1,8]$ $\qquad b)\ f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad en\ [-1,3]\ y\, en\ [0,1]$

$c)\ f(x) = \dfrac{1}{x-1} \quad en\ [-1,2]\ y\, en\ [2,3]$ $\qquad d)\ f(x) = log_2(x-1) \quad en\ [3,9]\ y\, en\ [2,5]$

Sin embargo, la T.V.M. puede inducir a error sobre el crecimiento o decrecimiento de una función. Si observamos el siguiente gráfico:



Claramente la T.V.M. en el intervalo *[a,b]* va a ser negativa, lo que nos induciría a pensar que en ese intervalo la función es decreciente. Esto no es del todo cierto, puesto que en ese intervalo empieza creciendo, luego disminuye y después vuelve a crecer.
O en el intervalo *[c,d]* la tasa saldría 0 al ser *f(c) = f(d)*, pero sin embargo la función no se mantiene ni mucho menos constante en ese intervalo.

El problema es pues que la T.V.M. abarca un intervalo demasiado amplio en el que la función puede sufrir muchas variaciones que la tasa de variación media no tiene en cuenta.

La manera de solucionar esto es reduciendo la amplitud del intervalo, haciendo que éste sea cada vez menor.

3.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

La T.V.M. de una función en un intervalo $[a,a+h]$ será:

$$T.V.M._{[a,a+h]}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a}$$

Para poder reducir la anchura del intervalo hacemos que *h* sea cada vez menor, es decir, se acerque a 0, y de esta manera obtenemos la tasa de variación instantánea en *a* (cómo varía la función "en" el punto *a*):

$$T.V.I.(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a}$$

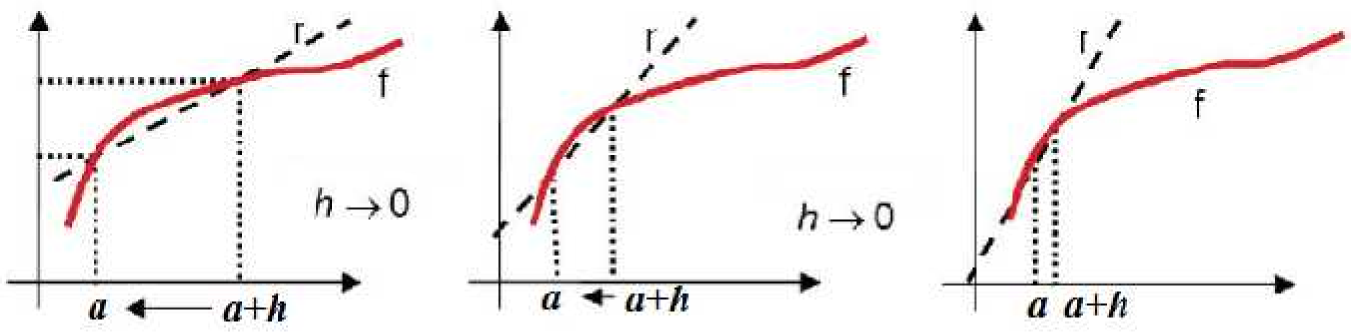
(En nuestro ejemplo de precios, esa tasa de variación instantánea nos dará el ritmo de crecimiento (o decrecimiento) de los precios en un año concreto)

Pues bien, ésta es precisamente la idea de derivada:

Dada una función f(x) y un punto a de su dominio, se define la ***derivada de la función f en a****, f'(a), como*

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a}}$$

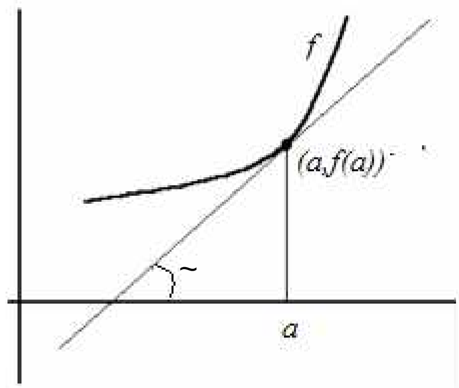
Si analizamos el proceso gráficamente:



Vemos que al ir disminuyendo el intervalo, la recta secante inicial, cuya pendiente era la tasa de variación media, se va convirtiendo en la recta tangente a la curva en *a*, y su pendiente será justamente la derivada de la función en *a*.

Luego, geométricamente,

La derivada de una función en un punto a es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (a,f(a)), que además coincide con la tangente del ángulo que forma dicha recta con la horizontal.



$$f'(a)=m_{tg}=tg\sim$$

Así, si la derivada de una función en un punto vale 1, además de indicar que la función crece en dicho punto, podemos decir que la recta tangente a la gráfica de dicha función en ese punto forma un ángulo de 45º con eje X, ya que $tg\,45^{\circ}=1$

Pero veamos algún ejemplo práctico de cómo calcular la derivada de una función en un punto.

Ejemplo 1: Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 + x + 3$ en el punto $a = 1$

Solución:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2 + (1+h) + 3 - 5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1 + h^2 + 2h + 1 + h - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 + 3h}{h}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+3) = 3$$

Ejemplo 2: Calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto $a = 3$

Solución:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{4+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-4-h}{2(4+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{2h(4+h)}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(4+h)} = -\frac{1}{8}$$

Nota: Si ese límite no existiese, diremos que la función no es derivable en el punto a

Ejercicio: Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$a)\ f(x) = 5x - x^2 \quad ,\ en\ a = 1\ y\ en\ a = 0$

$b)\ f(x) = \dfrac{3}{x-2} \quad ,\ en\ a = 4\ y\ en\ a = -1$

$c)\ f(x) = \sqrt{x} \quad ,\ en\ a = 1\ y\ en\ a = 0$

Si llamamos $x = a + h$, la derivada puede expresarse como:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Expresión que resulta más sencilla de utilizar en la práctica.

Por ejemplo, vamos a calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en $a = 2$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-3x-1\right)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+1\right)}{\cancel{x-2}}=9$$

Ejercicio: Calcular la derivada de la función $f(x)=2x^3-3x^2+3$ en el punto $a=1$

4.- DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Demostración:

Sabemos que para que una función sea continua en *a*, tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Calculamos entonces ese límite:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+\frac{f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right]=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+\lim_{x\to a}\frac{f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a} f(a)=$$
$$=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$

Y por tanto la función será continua en *a*

Importante: *Si una función ês derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.*

Esto quiere decir que si una función no es continua en un punto, automáticamente no será derivable en él

¡Cuidado! si una función es continua en un punto, puede ser o no derivable en dicho punto

Por tanto, antes de ver si una función es derivable en un punto, veremos si es continua en dicho punto, ya que si no lo es, tampoco será derivable y no habrá que hacer nada más.

En las funciones a trozos, se hablará de ***derivadas laterales***:

$$f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ; \quad f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Y la derivada tendrá sentido si ambas derivadas laterales coinciden.

Ejemplo1: Calcular la derivada de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$ en *a = 1*

Primero vemos si es continua:

$$f(1)=2 \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Luego la función es continua en 1

Calculamos las derivadas laterales:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

Como ambas derivadas laterales coinciden podemos decir que la función es derivable en el 1 y que además su derivada vale 2: *f'(1)=2*

Ejemplo2: Calcular la derivada de la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & x\le 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & x>0 \end{cases}$ en el 0

Primero vemos si es continua:

$$f(0)=1 \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} e^{2x}=1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Luego la función no es continua en 0 y por tanto tampoco es derivable en 0.

Ejercicio:

Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 1 \\ 2x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$ en *a = 1* b) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x\le 0 \\ x^2-x & si \quad x>0 \end{cases}$ en *a = 0*

c) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x\le 1 \\ x^2-1 & si \quad 1<x<2 \\ x+2 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ en $a = 1$ y en $a = 2$

5.- FUNCIÓN DERIVADA

Si tuviéramos que calcular la derivada de una función en los puntos $a = 0$, $a = 1$, $a = -2$ y $a = 4$, el procedimiento sería largo y tedioso, pues tendríamos además que repetirlo para cada punto.

Pretendemos ahora calcular una función que permita obtener, no el valor de la derivada de una función en un punto concreto *a*, sino el valor de la derivada de una función en cualquier punto genérico *x*.

A esa función se le llama ***función derivada, f'(x)***

Para calcularla volvemos a la definición inicial de derivada:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Veamos un ***ejemplo:***

Vamos a calcular la función derivada de la función $f(x)=x^2+x$
Aplicando a definición:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{\left[(x+h)^2+(x+h)\right]-(x^2+x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx+x+h-x^2-x}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx+h}{h}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x+1)}{\cancel{h}}=2x+1$$

Luego la función derivada de la función $f(x)=x^2+x$ es la función $f'(x)=2x+1$
Si ahora queremos calcular el valor de la derivada de esa función en varios puntos, bastará con sustituirlos en la función derivada. Así:
$f'(0)=1$; $f'(1)=3$; $f'(2)=5$; $f'(-2)=-3$,.......

Ejercicio:

Calcular las funciones derivadas de:

$a)\ f(x)=x^2-2x+3$ $\qquad b)\ f(x)=3x+1$

$c)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

6.- REGLAS DE DERIVACIÓN

Tanto Newton como Leibniz (aunque por supuesto sin la notación actual) desarrollaron reglas para trabajar con las derivadas de manera sistemática. (Todas ellas se obtienen usando la definición, si bien es cierto que en algunos casos son necesarios conocimientos superiores de cálculo de límites)

Antes de pasar a exponerlas, mencionar que haremos un pequeño cambio de notación, de manera que a la función derivada de otra, *f'(x)*, la llamaremos, por comodidad y cuando sea necesario, *Df(x)*.

Derivadas de Operaciones con Funciones

- ***Derivada de un número por una función***

$$D\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot f'(x)$$

- ***Derivada de la suma y diferencia de funciones***

$$D\left[f(x)\pm g(x)\right]=f'(x)\pm g'(x)$$

- ***Derivada del producto de funciones***

$$D\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

- ***Derivada del cociente de funciones***

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

- ***Regla de la Cadena***

$$D\left[f\left(g(x)\right)\right]=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Derivadas de las Funciones Elementales

Funciones Polinómicas

- $f(x)=k \quad ,k\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$
- $f(x)=x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=1$
- $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

Vemos algunos ejemplos antes de seguir:

$f(x)=x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4$

$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=6x$

$f(x)=4x^3+2x^2-x+3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=12x^2+4x-1$

O usando la regla de la cadena:

$f(x)=(3x+2)^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=4(3x+2)^3\cdot 3$

$f(x)=\left(2x^2+3x-1\right)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3\left(2x^2+3x-1\right)^2(4x+3)$

Al aplicar la regla de la cadena a la derivada de una potencia, se obtiene una regla de derivación nueva:

$$D\left(\left[f(x)\right]^n\right)=n\cdot\left[f(x)\right]^{n-1}\cdot f'(x)$$

Estas reglas que surgen a partir de otras usando la regla de la cadena se llaman ***reglas de derivación compuestas***, e irán apareciendo a medida que vayamos añadiendo diferentes reglas.

O si mezclamos con las propiedades del producto y del cociente:

$f(x)=x^4\cdot\left(x^3+x^2-3x\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=4x^3\cdot\left(x^3+x^2-3x\right)^2+x^4\cdot 2\left(x^3+x^2-3x\right)\left(3x^2+2x-3\right)$

$f(x)=\dfrac{3x^2-4x}{5x^3+2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{(6x-4)\cdot\left(5x^3+2\right)-\left(3x^2-4x\right)\cdot 15x}{\left(5x^3+2\right)^2}$

Ejercicio: Calcular las siguientes derivadas:

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-2x}{5x+3}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad c)\ f(x)=\left(x^3-x+2\right)^2(1-2x)$

$d)\ f(x)=\dfrac{6x-1}{3}$ $\qquad e)\ f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ $\qquad f)\ f(x)=x^3(2-3x)+x^4\left(3x^2+2\right)^3$

$g)\ f(x)=\dfrac{(1-2x)^3}{(x-3)^4}$ $\qquad h)\ f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad i)\ f(x)=\left(2x^3+3x\right)^4(3-2x)^3$

$j)\ f(x)=x^7-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-3(2x+1)^2$ $\qquad k)\ f(x)=\dfrac{-2}{\left(1-x^2\right)^2}$

Funciones irracionales

- $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Esta regla se obtiene también expresando la raíz como potencia:

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La regla compuesta para este caso será:

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Así, por ejemplo:

$$f(x)=\sqrt{3x^3-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x^3-2x}}\cdot\left(9x^2-2\right)=\frac{9x^2-2}{2\sqrt{3x^3-2x}}$$

- $f(x)=\sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

  Que también se obtiene expresando la raíz como potencia.
  Así:

  $$f(x)=\sqrt[5]{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

Y su regla compuesta correspondiente:

$$D\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{\left[f(x)\right]^{n-1}}}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{\left[f(x)\right]^{n-1}}}$$

Por ejemplo:

$$f(x)=\sqrt[4]{2x^3-3x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2x^3-3x+1\right)^3}}\cdot\left(6x^2-3\right)=\frac{6x^2-3}{4\sqrt[4]{\left(2x^3-3x+1\right)^3}}$$

Ejercicio: Calcular las siguientes derivadas:

$a)\ f(x)=x^2\sqrt{2x-1}$ $\qquad b)\ f(x)=3\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ $\qquad c)\ f(x)=\sqrt{3x-2}\cdot\left(x^3-2x^2+1\right)$

$d)\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[4]{1-x}}$ $\qquad e)\ f(x)=\sqrt[5]{\left(x^3+5x\right)^4}$ $\qquad f)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-1}}$

$g)\ f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad h)\ f(x)=3x^2\sqrt[4]{x}-2x\sqrt{3x}$ $\qquad i)\ f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+6x}{3-2x}}$

$j)\ f(x)=\dfrac{\left(x^2-3\right)^2}{\sqrt{5x}}$ $\qquad k)\ f(x)=\sqrt{(2x+3)(3x+2)^3}$ $\qquad l)\ f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

Funciones exponenciales

- $f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$

  Así: $\quad f(x) = 3^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3^x \ln 3$

Y su regla compuesta correspondiente:

$$D\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$$

Por ejemplo:

$$f(x) = 2^{5x+4x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2^{5x+4x^2} \cdot \ln 2 \cdot (5+8x)$$
$$f(x) = 7^{\sqrt{1-2x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 7^{\sqrt{1-2x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2)$$

Nótese que al aplicar la regla de la cadena se van "encadenando" derivadas. En el ejemplo anterior, primero una exponencial, luego una raíz y luego un polinomio

- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

  Se trata de un caso particular de la regla anterior, ya que *lne = 1*, pero destacamos su importancia pues aparece en infinidad de funciones con aplicación práctica, como ya vimos en el tema de funciones elementales.

  La regla compuesta correspondiente: $\quad D\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

Ejercicio: Calcular las siguientes derivadas:

$a)\ f(x) = 3e^{2x+1} - x^2 + 1 \qquad b)\ f(x) = \dfrac{2^{3x-2}}{1-5x^2} \qquad c)\ f(x) = \left(x + e^{4x}\right)^3 \qquad d)\ f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$e)\ f(x) = x^4 e^{1/x} \qquad f)\ f(x) = 6^{x\sqrt{x-1}} \qquad g)\ f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{(1-2x)^3} \qquad h)\ f(x) = \sqrt{(1+x^3)2^{3-x}}$

$i)\ f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{e^{3x-1}} \qquad j)\ f(x) = \sqrt[3]{e^{2x} - x} \qquad k)\ f(x) = e^{\frac{1}{1+x^2}} \qquad l)\ f(x) = 3^{x^2+5} \cdot 2^{\sqrt{3-2x}}$

Funciones logarítmicas

- $f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$

  (Puede expresarse de las dos formas, aunque usaremos la primera)

Y la compuesta: $D\left[log_a\left(f(x)\right)\right]=\dfrac{1}{f(x)ln\,a}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)ln\,a}$

Y de nuevo como caso particular de esta regla:

- $f(x)=ln\,x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Y su regla compuesta: $D\left[ln\left(f(x)\right)\right]=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Ejemplos:

$$f(x)=log_2\left(3x-x^3\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{\left(3x-x^3\right)ln\,2}\cdot\left(3-3x^2\right)=\frac{3-3x^2}{\left(3x-x^3\right)ln\,2}$$

$$f(x)=log\left(x^3+5^x\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{\left(x^3+5^x\right)ln\,10}\cdot\left(3x^2+5^x\,ln\,5\right)$$

$$f(x)=ln\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}}\cdot\frac{3\left(x^2-1\right)-3x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Ejercicio: Calcular las siguientes derivadas:

$a)\ f(x)=\left(2-3x\right)\cdot log_3\,x$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{ln\left(2x^2-3x\right)}{1-\sqrt{x}}$ $\qquad c)\ f(x)=x^3\,ln\,x-x\,ln\,x^3$

$d)\ f(x)=ln^4\left(x^2-x\right)$ $\qquad e)\ f(x)=3^{2x}\cdot log\left(3x^3+5x-1\right)$ $\qquad f)\ f(x)=ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)$

$g)\ f(x)=\sqrt{log_7\left(e^{5x-1}\right)}$ $\qquad h)\ f(x)=ln\sqrt{x^4\cdot 2^{4x}}$ $\qquad i)\ f(x)=ln\dfrac{1}{x}-xe^{1/x}$

Funciones trigonométricas

Exponemos a continuación todas las reglas de derivación simples y compuestas correspondientes a las funciones trigonométricas y sus inversas:

- $f(x)=senx \quad\Rightarrow\quad f'(x)=cos\,x$

$$D\left[sen\left(f(x)\right)\right]=cos\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$$

- $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$

  $D\left[\cos\left(f(x)\right)\right] = -\operatorname{sen}\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$

- $f(x) = tgx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + tg^2 x = sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (Se puede expresar de varias formas por trigonometría)

  $D\left[tg\left(f(x)\right)\right] = \left[1 + tg^2 f(x)\right] \cdot f'(x) = sec^2 f(x) \cdot f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$

- $f(x) = arcsenx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  $D\left[arcsen\left(f(x)\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

- $f(x) = \arccos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

  $D\left[\arccos\left(f(x)\right)\right] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

- $f(x) = \operatorname{arc} tgx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

  $D\left[arc\,tg\left(f(x)\right)\right] = \dfrac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$

Ejemplos:

$f(x) = sen\left(x^2 + 2x\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos\left(x^2 + 2x\right)\left(2x + 2\right)$

$f(x) = tg\sqrt{5x+3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left(1 + tg^2\sqrt{5x+3}\right) \cdot \dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}$

$f(x) = \arccos\left(x^2 e^{senx}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(x^2 e^{senx}\right)^2}}\left[2xe^{senx} + x^2 e^{senx}\cos x\right]$

En la siguiente tabla resumimos todas las reglas de derivación simples y compuestas:

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIONES COMPUESTAS	
Funciones Polinómicas e Irracionales			
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$[f(x)]^n$	$n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$	$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$
Funciones Exponenciales			
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x Lna$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}Lna\cdot f'(x)$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
Funciones Logarítmicas			
$f(x)=\log_a x$	$f`(x)=\frac{1}{x\ln a}$	$\log_a f(x)$	$\frac{f`(x)}{f(x)\ln a}$
$f(x)=Lnx$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$Ln[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
Funciones trigonométricas			
$f(x)=senx$	$f'(x)=\cos x$	$senf(x)$	$\cos f(x)\cdot f'(x)$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-senx$	$\cos f(x)$	$-senf(x)\cdot f'(x)$
$f(x)=tgx$	$f'(x)=1+tg^2x=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgf(x)$	$[1+tg^2 f(x)]\cdot f'(x)=$ $=\sec^2 f(x)\cdot f'(x)=$ $=\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$
Funciones arco			
$f(x)=arcsenx$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsenf(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos f(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
$f(x)=arctgx$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arc}\,tgf(x)$	$\frac{1}{1+f(x)^2}\cdot f'(x)$

Ejercicio: Calcular las siguientes derivadas:

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-2x}{e^{3x-1}}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{x^2-x-1}$ $\qquad c)\ f(x)=\left(x^2+1\right)Ln\left(x^2-1\right)$

$d)\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+3}}{4-x^2}$ $\qquad e)\ f(x)=\left(3\sqrt{x}-x^2\right)^3$ $\qquad f)\ f(x)=\dfrac{2^{x-1}}{\log_2(3x+5)}$

$g)\ f(x)=sen\sqrt{x^2+5x-1}$ $\qquad h)\ f(x)=Ln\dfrac{1+sen(2x)}{1-\cos(2x)}$ $\qquad i)\ f(x)=arctg(sen(3x^2+x-1))$

$j)\ f(x)=sen\sqrt{x+1}\cdot\cos\sqrt{x-1}$ $\qquad k)\ f(x)=arcsen\left(x^3\cdot\log_3(2x-1)\right)$ $\qquad l)\ f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-senx}}$

$m)\ f(x)=3^{\sqrt{x}}arcsen\left(1-e^{7x}\right)$ $\qquad n)\ f(x)=\dfrac{x^3tg(2x+1)}{1-3\sqrt[3]{\cos x}}$ $\qquad o)\ f(x)=sen^2(2x-1)\cos^3(1+3x)$

7.- DERIVADA DE FUNCIONES A TROZOS

La derivada de una función a trozos es otra función del mismo tipo cuyos trozos son las derivadas de los trozos de la función original.

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & x\le 2\\ \dfrac{2}{x} & x>2\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x<2\\ \dfrac{-2}{x^2} & x>2\end{cases}$$

Nótese que no hemos puesto el igual en el 2. ¿Por qué?

La razón es muy sencilla: no sabemos si la función es derivable o no en dicho punto, y hasta que no lo sepamos no podemos decidir si le ponemos el igual o no.

Luego para calcular la función derivada de una función a trozos lo primero es ver si es continua (recordemos que si no lo es no es derivable) y luego ver si las derivadas laterales coinciden. Para esto no hace falta acudir a la definición original, sino derivar usando las reglas y ver si los límites de las derivadas de cada trozo coinciden.

Hagamos el ejemplo completo:

Primero vemos si es continua en 2 (Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y en ningún otro punto tendrá problemas de continuidad):

$f(2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 1 = f(1) \quad \text{y por tanto es continua}$$

Calculamos su "posible" función derivada (usando las reglas):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & x > 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 2 \\ \dfrac{-2}{x^2} & x > 2 \end{cases}$$

Para saber si es derivable en 2 calculamos los límites de las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} 2x - 2 = 2 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2}{x^2} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La función no es derivable en 2}$$

Y por tanto su función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 2 \\ \dfrac{-2}{x^2} & x > 2 \end{cases}$

Obsérvese que ya no hace falta calcular las derivadas laterales usando la definición de derivada, sino directamente las reglas de derivación.

Nota:

Si hubiera salido derivable en 2, la función derivada hubiera sido $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \le 2 \\ \dfrac{-2}{x^2} & x > 2 \end{cases}$

Ejercicio:

Calcular la función derivada de las funciones:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 3x-2 & x\le 1 \\ e^{2x-2} & x>1 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} x-2 & si \quad x\le 1 \\ x^2-2 & si \quad x>1 \end{cases} \qquad c)\ f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases} 2 & si \ \ x<0 \\ x^2+2 & si \ \ 0\le x\le 3 \\ x-4 & si \ \ x>3 \end{cases} \qquad d)\ f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \ \ x<-1 \\ x^2+x+1 & si \ \ -1\le x\le 0 \\ 3Ln(x+1)+1 & si \ \ x>1 \end{cases}$$

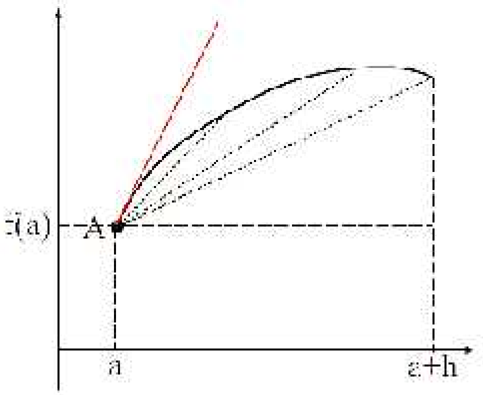
8.- APLICACIÓN DE LA DERIVADA AL CÁLCULO DE LA RECTA TANGENTE

Ya vimos al principio que uno de los orígenes del concepto de derivada está en la resolución del problema de calcular las rectas tangentes a funciones curvas.

Recordemos que la interpretación geométrica de la derivada es precisamente como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto:

La pendiente de la recta tangente en el punto *A(a,f(a))* es

$$m_{tg}=f'(a)$$



Luego de dicha recta tangente conocemos su pendiente y un punto por el que pasa, lo que nos permite obtener directamente su ecuación punto-pendiente:

$$\boxed{tg\equiv\ y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

Ejemplo: calcular la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$

Solución:

Sólo tenemos que calcular *f(4)* y *f’(4)* y sustituir después en la ecuación de la recta tangente:

$f(4)=2$

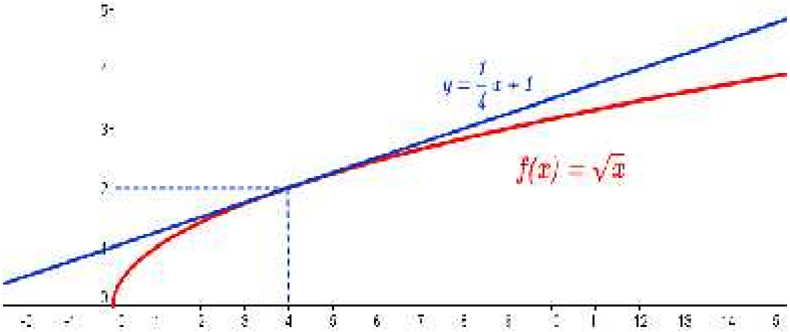
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(4)=\dfrac{1}{4}$

Luego la recta tangente será:

$$tg \equiv y-2=\frac{1}{4}(x-4)$$

Y operando queda:

$$tg \equiv y=\frac{1}{4}x+1$$



Ejercicios:

1.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ en el punto de abscisa $x = 2$

2.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=ln(1-x)$ en el origen de coordenadas

3.- Calcular los puntos de la gráfica de la función $f(x)=2x^3-6x^2+1$ en los que la recta tangente es horizontal, y calcular las ecuaciones de dichas rectas tangentes

4.- Razonar si existe algún punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2+5x+6$ en la que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 3x-1$, y en caso afirmativo calcular dicha recta tangente

5.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x<1 \\ x^2-2 & x\geq 1 \end{cases}$ en el punto de abscisa $x = 1$

EJERCICIOS

1.- Calcula la T.V.M. de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

$a)\ f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\quad en\ [2,5]$ $\qquad b)\ f(x)=(2-x)^3\quad en\ [1,3]$

$c)\ f(x)=\sqrt{x+4}\quad en\ [0,12]$ $\qquad d)\ f(x)=2^x\quad en\ [-1,1]$

2.- La siguiente tabla representa el espacio alcanzado por un móvil y el tiempo en que lo alcanza:

Espacio (m)	3	8	15	24	30
Tiempo (sg)	1	2	3	4	5

Calcular e interpretar la T.V.M. en los intervalos [1,3] y [2,4]
¿Qué significará en este caso la tasa de variación instantánea en un segundo concreto?

3.- Calcula, aplicando la definición, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$a)\ f(x)=\sqrt{x+1}-1\quad en\quad a=3$

$b)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}\quad en\ a=-1$

$c)\ f(x)=2x^2-3x+1\quad en\ a=2$

4.- Calcula, aplicando la definición, la función derivada de las funciones:

$a)\ f(x)=\dfrac{3}{2x}\qquad b)\ f(x)=\sqrt{3-2x}\qquad c)\ f(x)=3$

5.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$1)\ f(x)=3x^{10}\ +\ 2\sqrt{x}\ +\ \dfrac{3}{x}$ $\qquad 2)\ f(x)=\sqrt{3}\,x^3 - \text{®}\ x+\sqrt{3}$ $\qquad 3)\ f(x)=3x^3+\dfrac{2}{3}x^2-x+3\sqrt[3]{x}$

$4)\ f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{2}-2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^3}$ $\qquad 5)\ f(x)=\dfrac{x}{5}-\dfrac{5}{x}$ $\qquad 6)\ f(x)=\dfrac{x^4-3x}{4}$

$7)\ f(x)=\dfrac{x^3-3}{x}$

$11)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{3x}}{x}$ $\qquad 12)\ f(x)=(2x^3+3x^2)^3\,.(3x^2-2x)$ $\qquad 13)\ f(x)=\dfrac{x^3-2}{sen(2x)}$

$14)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x}}$ $\quad 15)\ f(x)=\left(2\sqrt{x}\ -\ 3x\right)^3$ $\quad 16)\ f(x)=\sqrt{3x\text{ - }senx}$

$17)\ f(x)=log_2\left(3x^2\right)$ $\quad 18)\ f(x)=ln\,x\cdot e^{x^2-senx}$ $\quad 19)\ f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$

$20)\ f(x)=ln\sqrt{x\text{ - }2}$ $\quad 21)\ f(x)=\sqrt[3]{sen^2 x}$ $\quad 22)\ f(x)=sen\left(\sqrt{3x^2\text{ - }5x}\right)$

$23)\ f(x)=sen\left(ln\,(3x^2+1)\right)$ $\quad 24)\ f(x)=sen^2\left(e^{\sqrt{x}}\right)$ $\quad 25)\ f(x)=(senx-cos\,x)^5$

$26)\ f(x)=e^{x^2}\ cos(2x-1)$ $\quad 27)\ f(x)=sen\left(\dfrac{\sqrt{x}}{cos\ x}\right)$ $\quad 28)\ f(x)=\sqrt{sen^3 x\ +\ (x\text{ - }1)^3}$

$29)\ f(x)=\left(3x^2\text{ - }\sqrt{1\text{ - }x^2}\right)^3$ $\quad 30)\ f(x)=cos^2\left(x^3\right)$ $\quad 31)\ f(x)=\sqrt{e^{cosx}}$

$32)\ f(x)=arctg\ (lnx)$ $\quad 33)\ f(x)=ln(sec\,x)$ $\quad 34)\ f(x)=\left(\dfrac{ln\left(x^2\right)}{x^3\text{ - }2}\right)^2$ $\quad 35)\ f(x)=\dfrac{e^x+ln\ x}{x^2\text{ - }senx}$

$36)\ f(x)=cos\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ $\quad 37)\ f(x)=2^{tg(3x)}$ $\quad 38)\ f(x)=ln^2\left(1+e^{2x-1}\right)$ $\quad 39)\ f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$

$40)\ f(x)=log_5\dfrac{x}{1-tg3x}$ $\quad 41)\ f(x)=arcsen\left(x^2-ln(1-x)\right)$ $\quad 42)\ f(x)=arctg\sqrt{x\,cos(3-2x)}$

$43)\ f(x)=ln^2(1+cos\,x)^3$ $\quad 44)\ f(x)=\sqrt[3]{cos^2\ x}$ $\quad 45)\ f(x)=arcsen\left(\dfrac{x^3+1}{e^{2-x}}\right)$ $\quad 46)\ f(x)=ln\left(\dfrac{tgx}{e^{3x^2}}\right)$

$47)\ f(x)=3^{arctg\ \sqrt{x^2-1}}$ $\quad 48)\ f(x)=\dfrac{arcsen\,(3x\text{ - }2)}{x^2}$ $\quad 49)\ f(x)=4^{arctg\ (lnx)}$ $\quad 50)\ f(x)=cos\left(\dfrac{tg\ \sqrt{x}}{sen\,(lnx)}\right)$

$51)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{e^{ln(\,cos\,x)}}{5^{1-senx}}}$ $\quad 52)\ f(x)=ln(\,arcsenx\,)+arcsen(ln\,x\,)$ $\quad 53)\ f(x)=\left(\dfrac{sen5x+cos\,5x}{sen5x-cos\,5x}\right)^3$

$54)\ f(x)=8^{arcsen\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\quad 55)\ f(x)=\dfrac{x+cos\sqrt{x}}{x-cos\sqrt{x}}$ $\quad 56)\ f(x)=\left(1-x^2\right)^5(arccos\,x)^3$

$57)\ f(x)=ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)$ $\quad 58)\ f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\,ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$ $\quad 59)\ f(x)=ln\left(sen\left(tg\,\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)$

$60)\ f(x)=x^3\ cos\left(\dfrac{1}{arccos(\,senx\,)}\right)$ $\quad f(x)=\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right)$

6.- Deriva las siguientes funciones y simplifica todo lo que se pueda:

a) $f(x) = arcsen\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ b) $f(x) = Ln\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-senx}}$

c) $f(x) = arctg\,\dfrac{1+x}{1-x} - arctgx$ d) $f(x) = arccos\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}$

d) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right)$

7.- Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones y calcula su función derivada:

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si\ x \le 2 \\ 2x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$ $b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + x & si\ x \le 1 \\ 3x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 2 \\ (x-2)^2 & 2 \le x \le 3 \\ 2x - 5 & x > 3 \end{cases}$ $d)\ f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & x < 2 \\ \dfrac{4-2x}{x} & x \ge 2 \end{cases}$

$e)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x} & x \le 1 \\ x^2 - 3x + 5 & 1 < x < 5 \\ 2x & x \ge 5 \end{cases}$ $f)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-3} & x \le 2 \\ Ln(x-1) - 2 & x > 2 \end{cases}$

8.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{2x-1}$ en el punto de abscisa $x = 1$

9.- Calcula los puntos en que las rectas tangentes a las siguientes funciones son horizontales y calcula dichas rectas tangentes:

$a)\ f(x) = x^2 - 8x$ $b)\ f(x) = x^3 - 6$ $c)\ f(x) = e^{x^2-2x}$

10.- Halla un punto de la función $f(x) = x^3+x^2+x$ en el que la tangente sea paralela a la recta $y = 2x+5$.

11.- Determina los puntos de la curva $y=\dfrac{x}{x+1}$ en los que la tangente tiene una inclinación de 45º

12.- Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f\left(x\right)=senx\cdot cos\,x$ en $x=$®

13.- Determina *a* para que la pendiente de la tangente a la curva $y=\dfrac{x-a}{x+a}$ en el punto de abscisa $x = 0$ valga 2

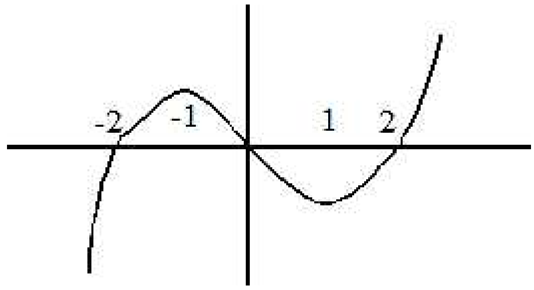
14.- Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$, hallar la ecuación de la tangente que es paralela a la recta $x-2y+1=0$

15.- Las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x-2}$ e $y = 3x-4$ se cortan en dos puntos P y P'. Halla sus coordenadas y la pendiente de las tangentes en P y P'

16.- a) Indica, en la gráfica de la función, los puntos en los que la derivada es cero.

b) En x=2, ¿la derivada es positiva o negativa?.

c) ¿Y en x=0?



17.- Halla los puntos donde las rectas tangentes a las funciones $f\left(x\right)=x^2-x+3$ y $g\left(x\right)=x^3-x^2$ son paralelas entre sí

18.- Halla *a, b* y *c* en $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ de modo que la gráfica de *f* tenga tangente horizontal en los puntos $x = -2$ y $x = 2$ y que pase por el punto *(0,3).*

19.- Halla una función de segundo grado $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ sabiendo que pasa por (1,-1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (0,-3) vale 0

20.- Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ es $x=-\dfrac{b}{2a}$

<u>*Soluciones:*</u>

1.- $a)-\frac{1}{2}$ $b)-1$ $c)\frac{1}{6}$ $d)\frac{3}{4}$

2.- 6, 8

3.- $a)\frac{1}{4}$ $b)2$ $c)5$

4.- $a)\ f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ $b)\ f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$ $c)\ f'(x)=0$

5.-

$1)\ f'(x)=30\,x^9+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$ $2)\ f'(x)=3\sqrt{3}\,x^2-\text{®}$ $3)\ f'(x)=9x^2+\frac{4}{3}x+3\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$4)\ f'(x)=x^3+3x+\frac{3}{x^2}-\frac{18}{x^4}$ $5)\ f'(x)=\frac{1}{5}+\frac{5}{x^2}$ $6)\ f'(x)=\frac{4x^3-3}{4}$

$7)\ f'(x)=\frac{2x^3+3}{x^2}$ $8)\ f'(x)=\frac{2x\ (2x+5)\ -\ (x^2-3)\ .\ 2}{(2x+5)^2}$ $9)\ f'(x)=\frac{2(x^2-x)\ -\ (2x-1)^2}{(x^2-x)^2}$

$10)\ f'(x)=\frac{3(x-1)^2.3x\ -\ 3(x-1)^3}{(3x)^2}$ $11)\ f'(x)=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}\,x\ -\ \sqrt{3x}}{x^2}$

$12)\ f'(x)=3\left(2x^3+3x^2\right)^2(6x^2+6x)(3x^2-2x)+(2x^3+3x^2)^3(6x-2)$ $13)\ f'(x)=\frac{3x^2 sen(2x)\ -\ (x^3-2)\,2\cos(2x)}{sen^2(2x)}$

$14)\ f'(x)==\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{x}}}\cdot\left(\frac{-3}{x^2}\right)$ $15)\ f'(x)=3\left(2\sqrt{x}\ -\ 3x\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ -\ 3\right)$ $16)\ f'(x)=\frac{3\ -\ cosx}{2\sqrt{3x\ -\ senx}}$

$17)\ f'(x)=\frac{6\,x}{3x^2\ .\ln 2}$ $18)\ f'(x)=\frac{1}{x}.e^{x^2-senx}+\ln x\ .\ e^{x^2-senx}\left(2x-cosx\right)$ $19)\ f'(x)=\frac{-6}{\left(2x+1\right)^4}$

$20)\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ $21)\ f'(x)=\frac{2\,senx\ cosx}{3\ \sqrt[3]{sen^4x}}$ $22)\ f'(x)=\cos\left(\sqrt{3x^2-5x}\right).\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x}}$

$23)\ f'(x)=\cos\left(\ln(3x^2+1)\right)\ \frac{6\,x}{3x^2+1}$ $24)\ f'(x)=2\,sen(e^{\sqrt{x}})\cos(e^{\sqrt{x}})e^{\sqrt{x}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$25)\ f'(x)=5\left(senx-\cos x\right)^4\left(\cos x+senx\right)$ $26)\ f'(x)=e^{x^2}\,2x\cos\left(2x-1\right)-e^{x^2}sen\left(x-1\right)2$

$$27)\ f'(x)=\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x}\right).\frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\ \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \qquad 28)\ f'(x)=\frac{3\operatorname{sen}^2 x\ \cos x+3(x-1)^2}{2\sqrt{\operatorname{sen}^3 x+(x-1)^3}}$$

$$29)\ f'(x)=3\left(3x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^2.\left(6x-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad 30)\ f'(x)=-2\cos\left(x^3\right)\operatorname{sen}\left(x^3\right)3x^2 \qquad 31)\ f'(x)=\frac{-e^{\cos x}\operatorname{sen}x}{2\sqrt{e^{\cos x}}}$$

$$32)\ f'(x)=\frac{1/x}{1+(\ln x)^2} \qquad 33)\ f'(x)=-\frac{\operatorname{sen}x/\cos^2 x}{\sec x} \qquad 34)\ f'(x)=2\left(\frac{\ln\left(x^2\right)}{x^3-2}\right).\frac{\frac{2x}{x^2}\left(x^3-2\right)-\ln\left(x^2\right)3x^2}{\left(x^3-2\right)^2}$$

$$35)\ f'(x)=\frac{\left(e^x+\frac{1}{x}\right)(x^2-\operatorname{sen}x)-(e^x+\ln x)(2x-\cos x)}{(x^2-\operatorname{sen}x)^2} \qquad 36)\ f'(x)=-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$37)\ f'(x)=2^{tg(3x)}\ln 2\sec^2(3x)3 \qquad 38)\ f'(x)=2\ln\left(1+e^{2x-1}\right)\frac{2e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}} \qquad 39)\ f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}(2x+3)\ln\frac{3}{5}$$

$$40)\ f'(x)=\frac{1+tg3x}{x}\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1+tg3x-3x\sec^2(3x)}{(1+tg3x)^2} \qquad 41)\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-\ln(1-x)\right)^2}}\left(2x+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$42)\ f'(x)=\frac{\cos(3-2x)-x\operatorname{sen}(3-2x)(-2)}{1+x\cos(3-2x)} \qquad 43)\ f'(x)=2\ln(1+\cos x)^3\frac{1}{(1+\cos x)^3}3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen}x)$$

$$44)\ f'(x)=\frac{-2\cos x.\operatorname{sen}x}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}} \qquad 45)\ f'(x)=\frac{\frac{3x^2e^{2-x}-(x^3+1)e^{2-x}(-1)}{(e^{2-x})^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x^3+1}{e^{2-x}}\right)^2}} \qquad 46)\ f'(x)=\frac{e^{3x^2}}{tgx}.\frac{\frac{e^{3x^2}}{\cos^2 x}-tgx\,e^{3x^2}\,6x}{\left(e^{3x^2}\right)^2}$$

$$47)\ f'(x)=3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}\ \frac{1}{x^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ \ln 3 \qquad 48)\ f'(x)=\frac{\frac{3x^2}{\sqrt{1-(3x-2)^2}}-\operatorname{arcsen}(3x-2)2x}{x^4}$$

$$49)\ f'(x)=4^{\operatorname{arctg}(\ln x)}\frac{1/x}{1+\ln^2 x}\ln 4 \qquad 50)\ f'(x)=-\operatorname{sen}\left(\frac{tg\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(\ln x)}\right).\frac{\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(\ln x)-tg\sqrt{x}\cos(\ln x)\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}^2(\ln x)}$$

$$51)\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{e^{ln(cosx)}}{5^{1-senx}}}}\,\frac{e^{ln(cosx)}\dfrac{-senx}{cosx}5^{1-senx}-e^{ln(cosx)}5^{1-senx}(-\cos x)\ln 5}{\left(5^{1-senx}\right)^2}$$

$$52)\ f'(x)=\frac{1}{arcsenx\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$53)\ f'(x)=3\left(\frac{sen5x+\cos 5x}{sen5x-\cos 5x}\right)^2\frac{(5\cos 5x-5sen5x)(sen5x-\cos 5x)-(sen5x+\cos 5x)(5\cos 5x-5sen5x)}{(sen5x-\cos 5x)^2}$$

$$54)\ f'(x)=8^{arcsen\left(\frac{1}{x}\right)}\ln 8\,\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

$$55)\ f'(x)=\frac{\left(1-sen\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x-\cos\sqrt{x}\right)-\left(x+\cos\sqrt{x}\right)\left(1+sen\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x-\cos\sqrt{x}\right)^2}$$

$$56)\ f'(x)=5\left(1-x^2\right)^4(-2x)(arccos\,x)^3+\left(1-x^2\right)^5 3(arccos\,x)^2\,\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$57)\ f'(x)=\frac{e^x+\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}}}{e^x+\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$58)\ f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}+\frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-2\frac{1}{x+\sqrt{x^2-4}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$$

$$59)\ f'(x)=\frac{1}{sen\left(tg\,\dfrac{1-x}{1+x}\right)}\cos\left(tg\,\frac{1-x}{1+x}\right)sec^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$60)\ f'(x)=3x^2\cos\left(\frac{1}{arccos(senx)}\right)-x^3sen\left(\frac{1}{arccos(senx)}\right)\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-sen^2x}}}{arccos^2(senx)}$$

6.- a) $f'(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $f'(x)=2\sec x$ c) 0 d) $f'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

e) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}\wedge$

7.- $a)\ f'(x)=\begin{cases}2x & si\ \ x<2\\ 2 & si\ \ x>2\end{cases}$ $b)\ f'(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ \ x\le 1\\ 3 & si\ \ x>1\end{cases}$

$$c)\ f'(x)=\begin{cases} -1 & x<2 \\ 2(x-2) & 2<x\le 3 \\ 2 & x>3 \end{cases} \qquad d)\ f'(x)=\begin{cases} 3 & x<2 \\ \dfrac{-4}{x^2} & x>2 \end{cases}$$

$$e)\ f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x^2} & x\le 1 \\ 2x-3 & 1<x<5 \\ 2 & x>5 \end{cases} \qquad f)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{-3}{(x-3)^2} & x<2 \\ \dfrac{1}{x-1} & x>2 \end{cases}$$

8.- $y = -6x + 11$

9.- $a)\ y=-16 \quad b)\ y=-6 \quad c)\ y=\frac{1}{e}$

10.- $x=-1,\ x=\frac{1}{3}$

11.- $x = 0,\ x = -2$

12.- $y = x -$®

13.- $a = 1$

14.- $x-2y-1=0$; $x-3y+7=0$

15.- $P(1,-1)$, $m_1=3, m_2=3$; $P'(2,2)$, $m_1=\frac{3}{2}, m_2=3$

16.- a) -1, 1 b) positiva c) negativa

17.- $x=1$, $x=\frac{1}{3}$

18.- $a = 0$, $b = -12$, $c = 3$

19.- $a = 2$, $b = 0$, $c = -3$