Geometría Analítica

y

Cónicas

VECTORES
GEOMETRÍA ANALÍTICA
CÓNICAS

Matemáticas 1º de Bachillerato Ciencias y Tecnología

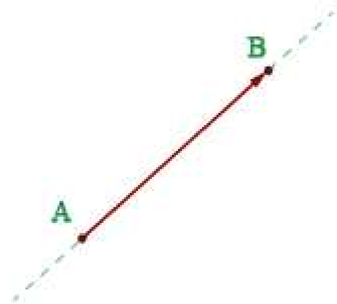
Profesor: Jorge Escribano
Colegio Inmaculada Niña
Granada
www.coleinmaculadanina.org
www.lasmatesdejorge.wikispaces.com

TEMA 4.- VECTORES EN EL PLANO

1.- DEFINICIÓN

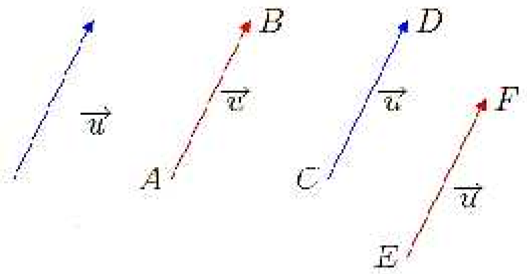
Un ***vector fijo*** $\overrightarrow{AB}$ del plano es un segmento orientado que tiene su origen en un punto *A* y su extremo en otro punto *B*.

Estos vectores quedan determinados por:



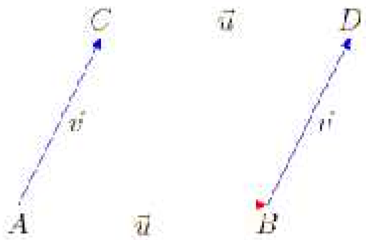
- ✓ *Módulo = Longitud. Se representa por* $\left|\overrightarrow{AB}\right|$
- ✓ *Dirección = la de la recta que pasa por los dos puntos*
- ✓ *Sentido = el dado por el recorrido de A hacia B o de B hacia A*

Dos vectores fijos son ***equipolentes*** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.



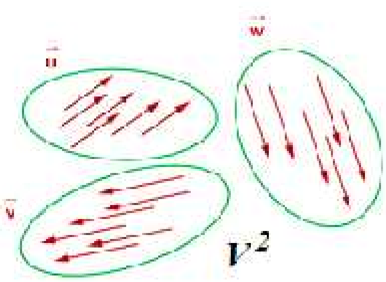
Cada conjunto formado por todos los vectores equipolentes entre sí se llama un ***vector libre***, $\vec{u}$

Cada vector fijo de este conjunto es un representante del vector libre $\vec{u}$.



Así, en el paralelogramo ABCD los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes y representantes de $\vec{u}$.
De la misma manera, los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son equipolentes y representantes de $\vec{v}$.

Al conjunto formado por todos los vectores del plano le llamaremos V^2

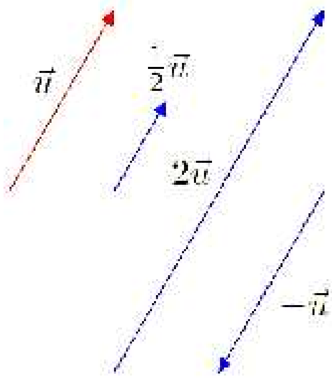


2.- OPERACIONES CON VECTORES

Producto de un Número por un Vector

Al multiplicar un vector libre $\vec{u}$ por un número real *k* se obtiene otro vector libre de la misma dirección que $\vec{u}$, módulo multiplicado por *k*, y mismo sentido si *k* es positivo y opuesto si *k* es negativo

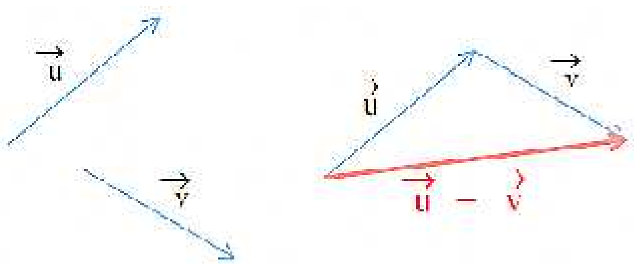
Si k = 0, se obtiene el vector nulo $\vec{0}$ que no es realmente un vector sino un punto puesto que su extremo y origen coinciden y su módulo es 0



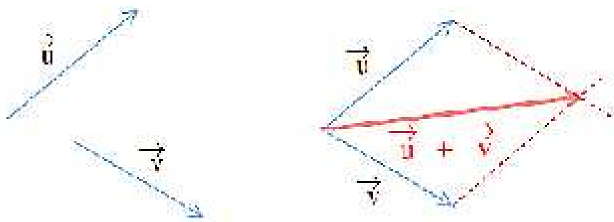
Suma y Resta de Vectores

Para sumar gráficamente dos vectores libres existen dos opciones:

- Trasladamos el segundo, haciendo coincidir su origen con el extremo del primero. El vector suma, será el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo



- Otra forma es la conocida regla del paralelogramo. Se unen los vectores por su origen, trazando desde los extremos de cada vector paralelas a los vectores. El vector suma será el vector que une el origen común de los vectores con el punto de corte de las paralelas



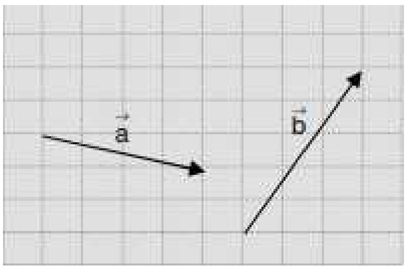
Ejercicios

1.- Dados los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, calcular los vectores:

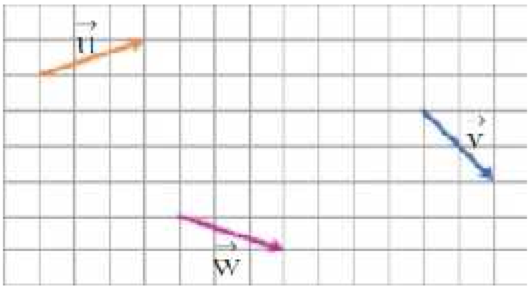
$a)\ \vec{a}+\vec{b}$ $\quad b)\ \vec{b}-\vec{a}$

$c)\ 3\vec{a}$ $\quad d)\ 3\vec{a}+2\vec{b}$

$e)\ 2\vec{a}-3\vec{b}$

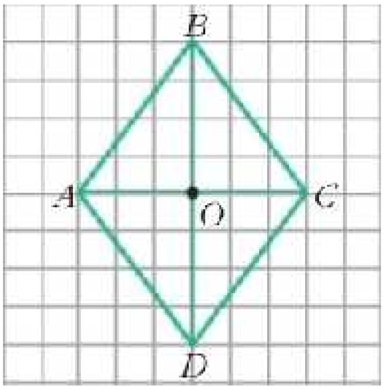


2.- Dados los vectores libres $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura, calcular los vectores:



$a)\ 2\vec{u}+3\vec{v}$
$b)\ \vec{u}+\vec{w}-\vec{v}$
$d)\ -2\vec{v}-\vec{u}+3\vec{w}$
$e)\ \vec{w}-\vec{u}-2\vec{v}$

3.- Observa el rombo de la figura y calcula:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$
d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
c) $\vec{AB}+\vec{AD}$
f) $\vec{DB}-\vec{CA}$

3.- BASE DE V^2

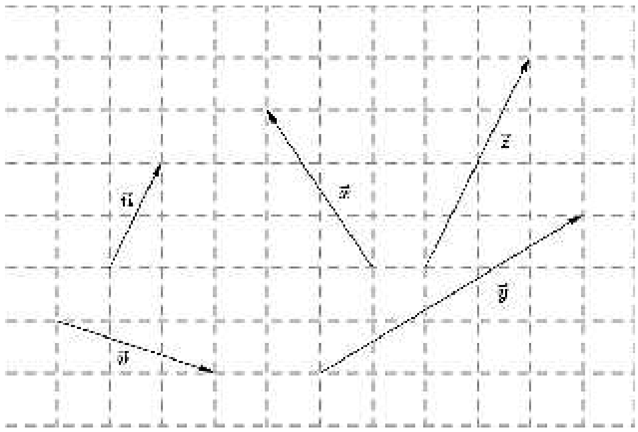
En los ejercicios anteriores hemos visto que al combinar operaciones entre vectores (multiplicarlos por números, sumarlos,…) se obtiene otro vector.

Diremos pues que un vector $\vec{w}$ es ***combinación lineal*** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen números a y b de manera que $\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$ (es decir, si se obtiene "combinando" mediante operaciones dichos vectores).

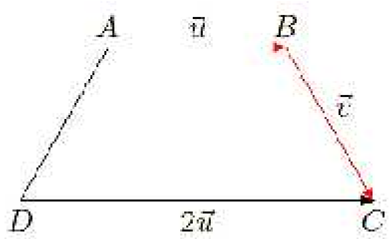
Por supuesto esta definición es extensible a más de dos vectores, de modo que si tenemos un conjunto de vectores cualquiera $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,...,\vec{u}_n\}$, una combinación lineal de ellos será cualquier vector que se obtenga al hacer $a_1\cdot\vec{u}_1+a_2\cdot\vec{u}_2+a_3\cdot\vec{u}_3+...+a_n\cdot\vec{u}_n$

Ejercicios

1.- Expresa los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$



2.- En la siguiente figura, expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores:



$$a)\overrightarrow{BA} \quad b)\ \overrightarrow{AC} \quad c)\overrightarrow{DB}$$

Un conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},...,\overrightarrow{u_n}\}$ se dice que son ***linealmente dependientes*** si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

En caso contrario, se dice que son ***linealmente independientes***.

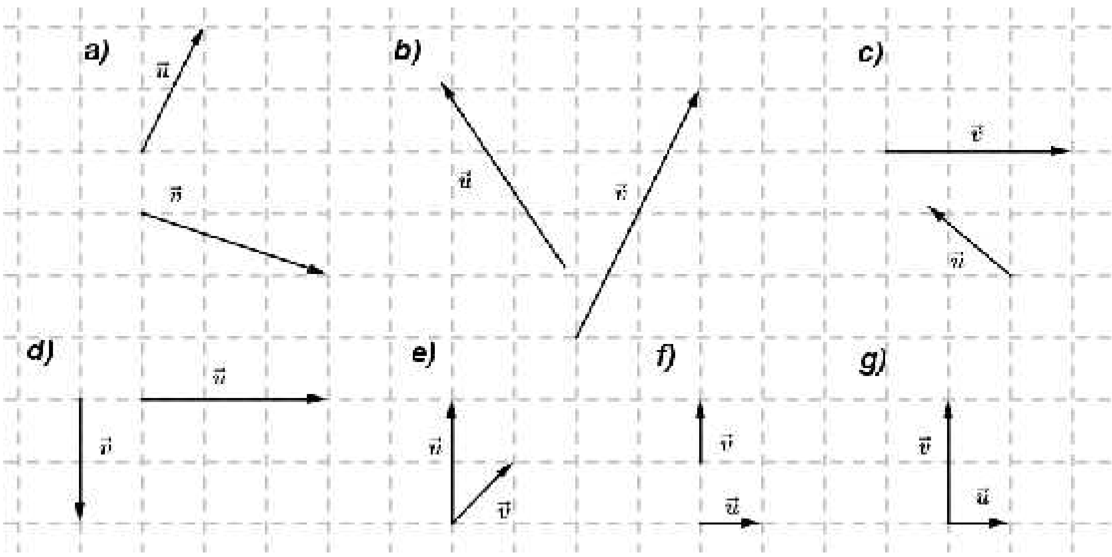
En particular, tres vectores del plano son dependientes si uno de ellos se puede poner como combinación lineal de los otros dos. Así, en el Ejercicio 1 anterior, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{x}$ son linealmente dependientes puesto que este último se puede obtener como combinación lineal de los dos primeros.

De hecho, **tres vectores del plano siempre son linealmente dependientes**.

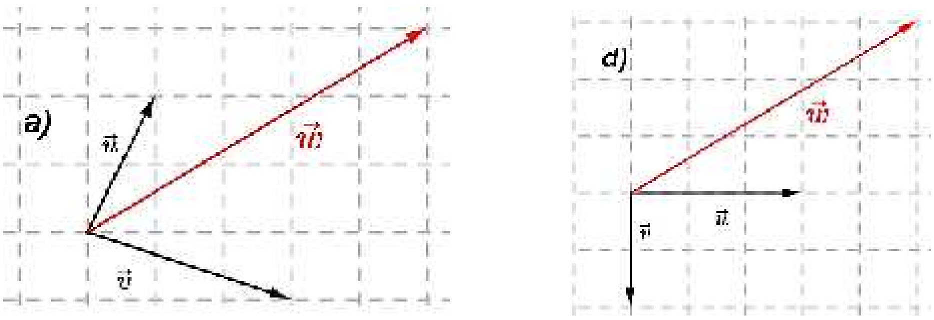
Dos vectores del plano serán linealmente dependientes si uno de ellos se obtiene multiplicando el otro por un número. Esto significa que **dos vectores del plano serán dependientes si son paralelos (tienen la misma dirección), mientras que si no lo son serán linealmente independientes**.

Dos vectores del plano linealmente independientes (es decir, no paralelos) forman una base de V^2, pues con ellos se pueden obtener mediante combinaciones lineales todos los demás vectores del plano.

Así, todas las parejas de vectores siguientes son una base de V^2:



Así, cualquier vector $\vec{w}$ del plano se puede poner como combinación lineal de los vectores de una base, por ejemplo las bases *a)* y *d)*:



En este ejemplo, en la primera base el vector $\vec{w}$ es: $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$

Mientras que en la segunda base, el mismo vector $\vec{w}$ sería: $\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

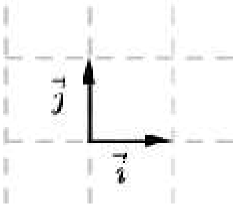
En general, si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son una base de V^2, cualquier otro vector $\vec{w}$ se puede expresar de la forma: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

A ***(a,b)*** se les llama ***coordenadas del vector*** en esa base.

Así, el vector $\vec{w}$ es el $(2,1)$ en la base *a)*, mientras que en la base *b)* es el vector $\left(\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right)$

De todas las infinitas bases del plano, trabajaremos con una muy especial y con la que gráficamente es más sencillo calcular las coordenadas de cualquier vector.

Esta base corresponde a la *f)* y se llama ***base canónica*** $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, cuyos vectores cumplen:



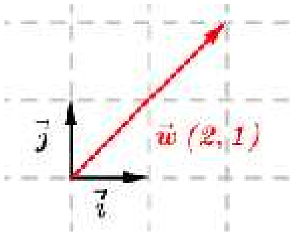
a) Son perpendiculares entre sí (*ortogonales)*

b) Miden lo mismo

c) Son *unitarios* (miden uno)

Las coordenadas de los vectores de la base canónica son $\vec{i}\,(1,0)$ y $\vec{j}\,(0,1)$

De manera que a partir de ahora siempre nos referiremos a un vector con sus coordenadas respecto a la base canónica. Así, por ejemplo, el vector (2,1) será:



Con esto conseguimos, por un lado, que el vector *(2,1)* sea el mismo para todo el mundo, y por otro, podemos trabajar con vectores con números, en lugar de gráficamente como veníamos haciendo hasta ahora.

4.- OPERACIONES EN COORDENADAS

Producto de un Número por un Vector

Dado un vector $\vec{u}\,(u_1,u_2)$ (en coordenadas respecto de la base canónica, por supuesto) y un número real *k*, el vector $k\cdot\vec{u}$ es:

$$k\cdot\vec{u}=(k\cdot u_1,k\cdot u_2)$$

Así, por ejemplo: $3\cdot(-2,4)=(-6,8)$

Suma y Resta de Vectores

Dados los vectores $\vec{u}\,(u_1,u_2)$ y $\vec{v}\,(v_1,v_2)$, el vector suma (o diferencia) será:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$

Así, por ejemplo: $\vec{u}\,(2,-1)+\vec{v}\,(4,3)=(6,2)$
$\vec{u}\,(-3,4)-\vec{v}\,(-2,1)=(-1,3)$

Ejemplos:

1.- *Dados los vectores* $\vec{u}(-3,5), \vec{v}(7,4)$*, calcular las coordenadas de:*

$a)\, 2\vec{u} \quad b)\, -\vec{v} \quad c)\, 2\vec{u}+\vec{v} \quad d)\, \vec{u}-\vec{v} \quad e)\, \overrightarrow{5u}-\overrightarrow{3v}$

Solución:

$a)\ 2\vec{u} = 2\cdot(-3,5) = (-6,10) \qquad b)\ -\vec{v} = (-7,-4) \qquad c)\ \vec{u}-\vec{v} = (-3,5)-(7,4) = (-10,1)$
$d)\ 5\vec{u}-3\vec{v} = 5\cdot(-3,5)-3\cdot(7,4) = (-15,25)-(21,12) = (-36,13)$

2.- *Dados los vectores* $\vec{a}(3,-2), \vec{b}(-1,2)$ *y* $\vec{c}(0,-5)$*, calcular m y n para que se cumpla* $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

Solución:

$(0,-5) = m(3,-2) + n(-1,2) = (3m-n, -2m+2n)$

Igualando las coordenadas: $\begin{cases} 3m - n = 0 \\ -2m + 2n = -5 \end{cases}$

Y resolviendo el sistema es fácil ver que $m = -\dfrac{5}{4}$, $n = -\dfrac{15}{4}$

3.- *Comprobar que los vectores* $\vec{u}(1,1)$ *y* $\vec{v}(1,2)$ *son base y calcular las coordenadas del vector* $\vec{w}(1,3)$ *en dicha base*

Solución:

Como los vectores $\vec{u}(1,1)$ *y* $\vec{v}(1,2)$ no son paralelos pues sus coordenadas no son proporcionales $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2}$, forman una base de V^2.

El vector $\vec{w}$ se podrá pues expresar como combinación lineal de ellos:

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, y por tanto:

$(1,3) = a(1,1) + b(1,2) \Rightarrow (1,3) = (a+b, a+2b) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 3 = a + 2b \end{cases}$

Y resolviendo el sistema $a = -1,\ b = 2$

Luego el vector $\vec{w}(1,3)$ en esa base es el vector *(-1,2)*

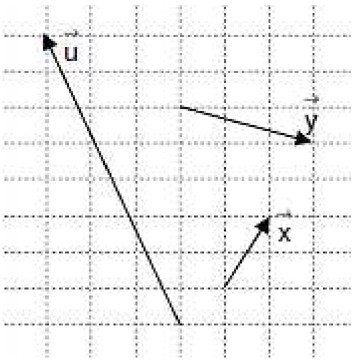
Ejercicios:

1.- Dados los vectores $\vec{u}(1,-2), \vec{v}(3,1), \vec{w}(2,0)$

a) Calcular $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$

b) Expresar el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

2.- Dados los vectores de la figura:

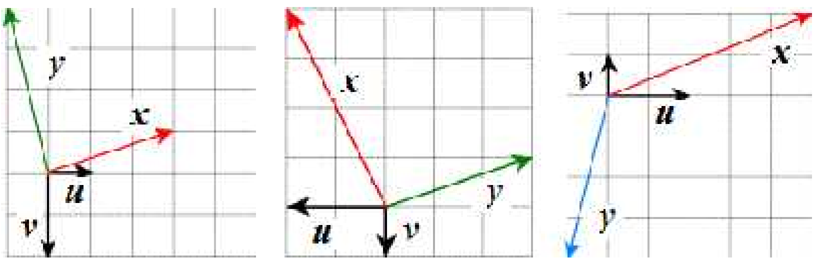


a) Escribirlos en coordenadas en la base canónica

b) Razonar si los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ forman una base

c) Calcular las coordenadas de $\vec{u}$ en dicha base

3.- Hallar, para cada uno de los casos, las coordenadas de los vectores representados respecto de su base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$



4.- Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c}=3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ siendo $\vec{a}(-1,3), \vec{c}(7,-2)$

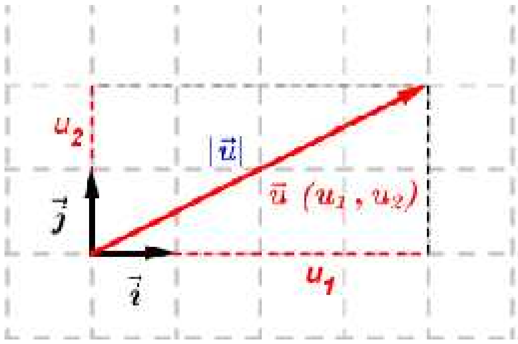
5.- ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman base? Razona la respuesta

$a)\ \vec{u}(3,-1), \vec{v}(1,3)$ $\quad b)\ \vec{u}(2,6), \vec{v}\left(\frac{2}{3},2\right)$ $\quad c)\ \vec{u}(-2,4), \vec{v}(1,-2)$

5.- MÓDULO Y PRODUCTO ESCALAR

Módulo de un Vector

Ya sabemos que el módulo de un vector indica su longitud. Para calcular el módulo de un vector conociendo sus coordenadas, basta tener en cuenta qué significan gráficamente dichas coordenadas en la base canónica:



Y claramente por Pitágoras:

$$\boxed{|\vec{u}| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

(Tomamos la raíz positiva porque estamos midiendo una distancia)

Así por ejemplo, el módulo del vector $\vec{u}\left(-4,3\right)$ será $|\vec{u}| = +\sqrt{\left(-4\right)^2 + 3^2} = +\sqrt{25} = 5$

Ejercicio:

Dado el vector $\vec{u}\left(8,-6\right)$

a) Calcular su módulo
b) Calcular un vector paralelo a él y unitario
c) Calcular un vector paralelo a él y de módulo 2

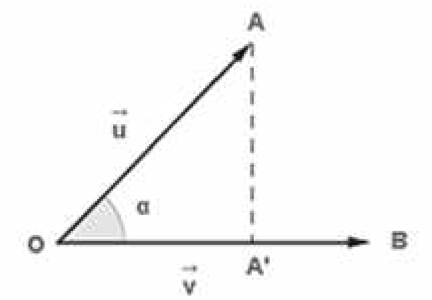
Producto Escalar de Vectores

Se define el ***producto escalar*** de dos vectores de V^2 como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)}$$

Es importante destacar que *el producto escalar de dos vectores da como resultado un número* (positivo o negativo según el ángulo que formen sea agudo u obtuso), y no un vector.

Geométricamente, el valor absoluto del producto escalar de dos vectores es el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él



$$\cos\alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \Rightarrow OA' = |\vec{u}|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|\cdot OA'$$

De donde también se deduce que

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Propiedades del Producto Escalar

$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$b) \vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$c) k \cdot \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \left(k \cdot \vec{u}\right) \cdot \vec{v}$

$d) \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

$e) \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad (muy\ importante)$

$f) \vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$

$g) \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

h) Expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Esta última propiedad nos da una forma práctica de calcular el producto escalar, puesto que para usar la definición necesitamos conocer el ángulo que forman los vectores, dato que habitualmente no tendremos.

Así por ejemplo, el producto escalar de los vectores $\vec{u}(3,-2)$ y $\vec{v}(4,1)$ será:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 = 10$$

La definición la usaremos pues para calcular el ángulo que forman dos vectores, ya que despejando:

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Así, el ángulo que forman los vectores anteriores será:

$$|\vec{u}| = \sqrt{13} \ , \ |\vec{v}| = \sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{10}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = 0'67 \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 47'73^{o}$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u}(3,-4), \vec{v}(1,-1)$, calcular:

a) Su producto escalar
b) El ángulo que forman

c) Un vector paralelo a $\vec{u}$ y unitario
d) Calcular *m* para que el vector $\vec{w}(m,1)$ sea ortogonal a $\vec{v}$

Solución:

a) El producto escalar será: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,-4)\cdot(1,-1)=3+4=7$
b) Para calcular el ángulo que forman usamos la fórmula:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\ \Rightarrow\ \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{7}{5\cdot\sqrt{2}}=0'99$$

$$\Rightarrow\ \widehat{\vec{u},\vec{v}}=8'11^{\circ}$$

c) Para calcular Un vector paralelo a $\vec{u}$ y unitario basta con dividirlo por su módulo: $\vec{u}\,'=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

d) Para que el vector $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{v}$, su producto escalar ha de ser 0, por lo que:
$\vec{v}\cdot\vec{w}=0\ \Rightarrow\ (1,-1)\cdot(m,1)=0\ \Rightarrow\ m-1=0\ \Rightarrow\ m=1$

Ejercicios:

1.- Calcular el ángulo que forman los vectores:

$a)\ \vec{u}(3,2),\ \vec{v}(1,-5)$ $\qquad b)\ \vec{x}(4,6),\ \vec{y}(3,-2)$ $\qquad c)\ \vec{a}(1,6),\ \vec{b}\left(-\frac{1}{2},-3\right)$

2.- Calcula *x* para que el producto escalar de $\vec{u}(3,-2)\ y\ \vec{v}(x,-5)$ sea 7. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

3.- Dado el vector $\vec{u}(-3,k)$, calcula *k* de forma que:
a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4,-6)$
b) El módulo de $\vec{u}$ sea 5

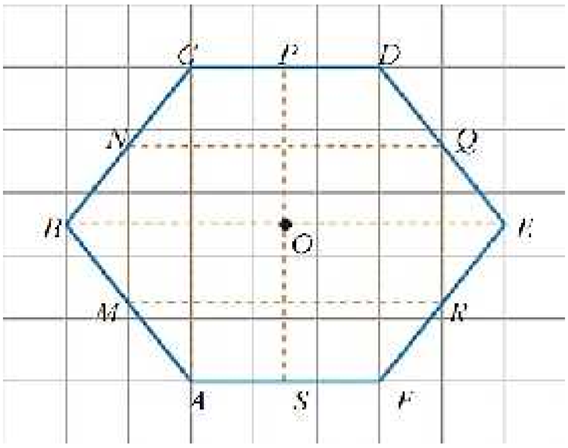
4.- Dado el vector $\vec{u}(-4,3)$, calcula:
a) Un vector paralelo a él y de módulo 3
b) Un vector ortogonal a él y unitario
c) El ángulo que forma con el vector $\vec{v}(4,3)$

5.- Dados los vectores $\vec{u}(4,-3)\ y\ \vec{v}(-6,8)$, calcular $\left|2|\vec{u}\cdot\vec{v}|-3|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\right|$

6.- Calcular *x* para que los vectores $\vec{u}(7,1)\ y\ \vec{v}(1,x)$ formen un ángulo de 45º

EJERCICIOS

1.- Dado el hexágono de la figura:



a) Sustituye los puntos suspensivos por un número de forma que las siguientes º igualdades sean ciertas:
$i)\ \overrightarrow{CD} = ...\overrightarrow{CP} \qquad ii)\ \overrightarrow{MN} = ...\overrightarrow{AC} \qquad iii)\ \overrightarrow{OP} = ...\overrightarrow{OS} \qquad iv)\ \overrightarrow{NB} = ...\overrightarrow{BC}$

b) Completa con letras:
$i)\ \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{B...} = \overrightarrow{AE} \qquad ii)\ \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{...C} = \overrightarrow{SF} \qquad iii)\ \overrightarrow{O...} + \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{FD} \qquad iv)\ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AB}$

2.- Dados los vectores $\vec{u}(3,-5)$, $\vec{v}(-2,1)$, calcula:

$a)\ -2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \qquad b)\ -\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v} \qquad c)\ \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u}-\vec{v})$

3.- Razonar si los vectores $\vec{u}(1,4)$, $\vec{v}(1,3)$ forman base y calcular las coordenadas del vector $\vec{w}(-1,-1)$ en dicha base

4.- Dado el vector $\vec{u} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$, calcular:

a) Un vector paralelo a $\vec{u}$ y unitario
b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y unitario
c) El ángulo que forma $\vec{u}$ con cada vector de la base canónica

5.- Dados los vectores $\vec{u}(2,-2)$, $\vec{v}(a,3)$:

a) Calcular *a* para que sean paralelos
b) Calcular *a* para que sean ortogonales
c) Calcular *a* para que formen un ángulo de 135º

6.- Escribe vectores ortogonales al vector $\vec{u}(-3,1)$ tales que:

a) Su primera componente sea 2
b) Su segunda componente sea 4
c) Sea unitario.

7.- Dados los vectores $\vec{u}\left(-3,-4\right)$, $\vec{v}\left(1,-2\right)$:

a) Representarlos gráficamente
b) Calcular el ángulo que forman
c) Calcular la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$
d) Calcular la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

8.- Busca un vector ortogonal a $\vec{u}$ (1,-2) y de módulo $\sqrt{20}$

9.- Sabiendo que $\left|\vec{u}\right| = 1$, $\left|\vec{v}\right| = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{5}{2}$, calcular $\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)\cdot\left(3\vec{u}+\vec{v}\right)$

10.- Dados los vectores $\vec{u}\left(2,3\right)$, $\vec{v}\left(-3,0\right)$, y siendo $\vec{a} = 2\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{b} = -3\vec{u}+k\vec{v}$, calcular el valor de k para que el vector $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ sea ortogonal al vector $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

11.- Dados los vectores $\vec{u}\left(5,-b\right)$, $\vec{v}\left(a,2\right)$, calcula a y b sabiendo que son ortogonales y que $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{13}$

12.- Sabiendo que $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -\frac{1}{2}$, calcular:

$a)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ $\quad b)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$ $\quad c)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$ $\quad d)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

13.- Si $B = \left\{\vec{x},\vec{y}\right\}$ es una base ortonormal, calcular $\left|\vec{x}+\vec{y}\right|$ y $\left|\vec{x}-\vec{y}\right|$

14.- Se sabe que $\vec{c} = \vec{a}+2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a}-4\vec{b}$ son ortogonales y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Qué ángulo forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

15.- Dados los vectores $\vec{a}\left(3,-1\right)$, $\vec{b}\left(-4,3\right)$ y $\vec{c}\left(1,-3\right)$, calcular:

$a)\left|(2\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}\right|$ $\quad b)\frac{1}{5}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ $\quad c)\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

$d)\left|\left(3\vec{a}-2\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\right|$ $\quad e)\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$

<u>Soluciones:</u>

1.- a) $2, \frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ b) C, C, P, M

2.- $a)\left(-7,\frac{21}{2}\right)$ $b)\left(-\frac{9}{5},\frac{72}{5}\right)$ $c)\left(-\frac{17}{6},2\right)$

3.- (2,-3)

4.- $a)\left(\pm\frac{4}{5},\mp\frac{3}{5}\right)$ $b)\left(\pm\frac{3}{5},\pm\frac{4}{5}\right)$ $c)36'87^{o}$ y $126'87^{o}$

5.- a) a = -3 b) $a = 3$ c) $a = 0$

6.- a) (2,6); b) (4/3,4); c) (1/$\sqrt{10}$,3/$\sqrt{10}$)

7.- b) 63'43º c) $\sqrt{5}$ d) 1

8.- (4,2) ó (-4,-2)

9.- $-\frac{47}{2}$

10.- $k=-\frac{4}{3}$ o $k=-\frac{8}{3}$

11.- $a=\pm 3$, $b=\pm\frac{15}{2}$

12.- a) -5 b) 10 c) 16 d) 4

13.- $\sqrt{2}$

14.- 120º

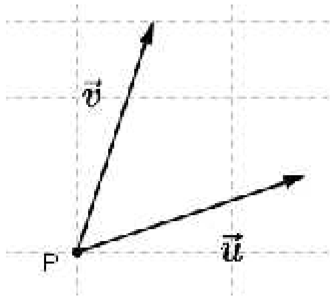
15.- a) 30 b) (-3,9) c) 30 d) 19 e) 0

TEMA 5.- GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

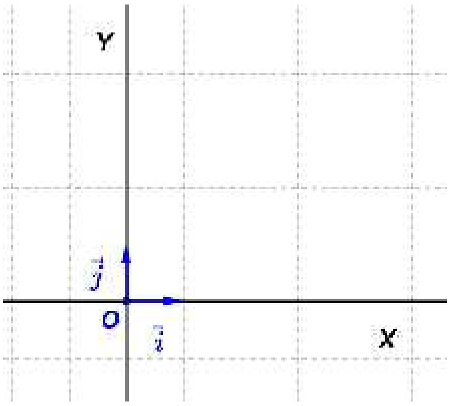
PROBLEMAS MÉTRICOS

1.- SISTEMA DE REFERENCIA

Un sistema de referencia en el plano es el conjunto formado por un punto cualquiera P (llamado origen del sistema de referencia) y una base cualquiera de V^2:



Tomaremos como origen el punto *O(0,0)* y como base la base canónica $\left\{\vec{i}\,(1,0), \vec{j}\,(0,1)\right\}$, que forman un sistema de referencia ortonormal:



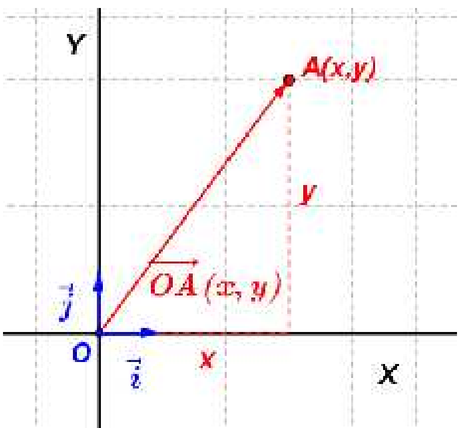
El ***sistema de referencia canónico*** es pues el conjunto $S.R.C. = \left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$

A las rectas que pasan por O en las direcciones de los vectores de la base se les llaman ***ejes de coordenadas***:

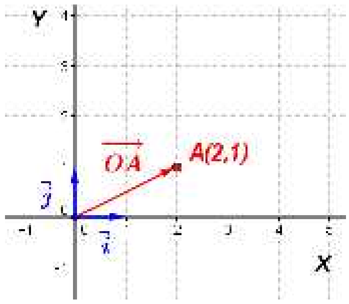
Eje de abscisas OX
Eje de ordenadas OY

De esta manera cada punto *A* del plano tiene asociado un vector fijo, $\overrightarrow{OA}$, llamado *vector de posición*.

Se llaman ***coordenadas del punto A*** respecto del S.R.C. a las coordenadas de su vector de posición, $\overrightarrow{OA}$, respecto de la base canónica:



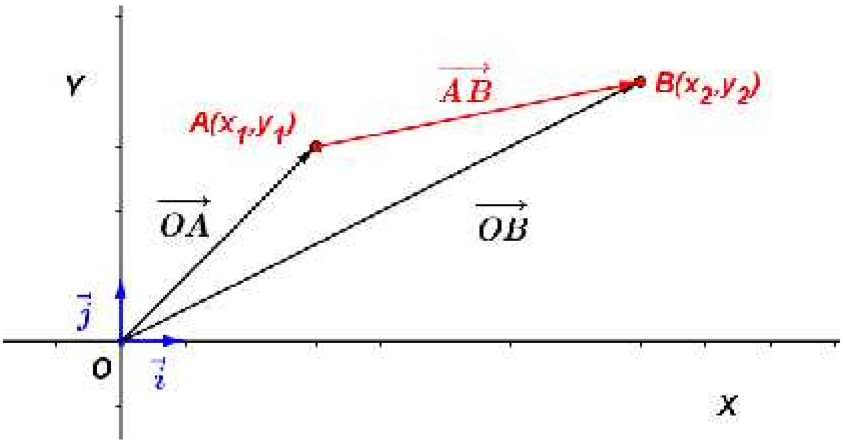
Así, el punto A(2,1) será el que tiene como vector asociado el vector $\overrightarrow{OA}(2,1)$



Es muy importante a partir de ahora distinguir en todo momento si estamos trabajando con vectores o con puntos, pues se escriben de la misma forma: $\vec{u}(2,1)$ o *P(2,1)*

2.- VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

Vamos a ver ahora cómo calcular las coordenadas del vector fijo que une dos puntos del plano $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$. Para ello trabajamos con los vectores de posición de cada punto, pues con vectores podemos hacer operaciones (con puntos no):



Como vemos en el dibujo, el vector $\overrightarrow{OB}$ es suma de los otros dos, es decir:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Y como las coordenadas de los vectores de posición son las mismas que las de los puntos *A* y *B*:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Luego el vector que une dos puntos se calcula restando las coordenadas del extremo menos las del origen:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

Así por ejemplo, el vector que une los puntos *A(3,-2)* y *B(1,3)* será el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,3) - (3,-2) = (-2,5)$

Ejercicios:

1.- Dados los puntos *M(7,-5)* y *N(-2,-11)*, calcular los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$

2.- Calcular el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos *A(1,3), B(4,-1), C(9,-3)*

3.- Si *A(4,5)* y $\overrightarrow{AB}(1,-1)$, calcular el punto *B*

4.- Dados los puntos *A(1,3), B(4,5), C(6,-2)*

a) Representar gráficamente los puntos y los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *y* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

b) Representar $\vec{u} + \vec{v}$ y obtener sus coordenadas

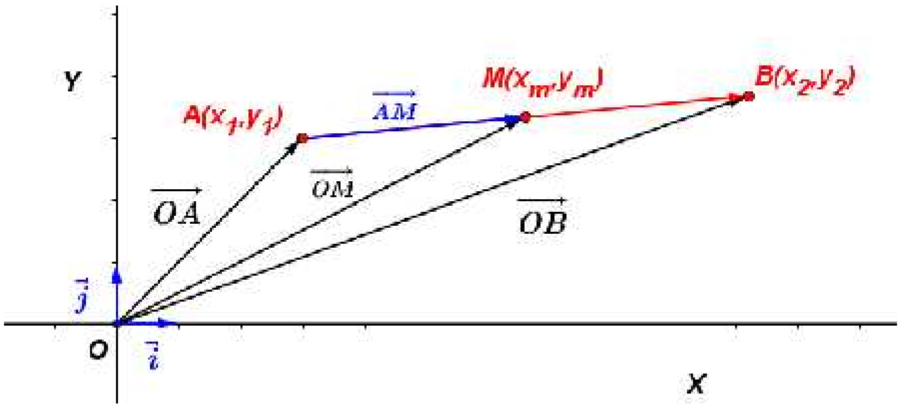
c) Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$

5.- Halla el vértice *D* del paralelogramo *ABCD* sabiendo que *A(1,2), B(5,-1)* y *C(6,3)*

6.- Determina si los puntos *A(0,3), B(2,2)* y *C(4,1)* están alineados

3.- PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dado un segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ *y* $B(x_2, y_2)$, queremos calcular las coordenadas del punto medio $M(x_m, y_m)$ de dicho segmento:



Como M es el punto medio de *A* y *B*: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Además, como se observa en el dibujo: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Y por tanto:

$$\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1, y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

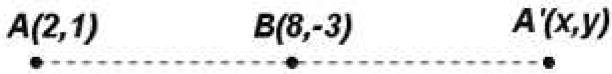
Y como las coordenadas del vector $\overrightarrow{OM}$ son las mismas que las del punto *M*:

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

Así, el punto medio del segmento determinado por los puntos P(4,-1) y Q(2,3) es el punto $M\left(\dfrac{4+2}{2},\dfrac{-1+3}{2}\right)=(3,1)$

Esto podemos usarlo también para calcular el ***punto simétrico*** de un punto respecto de otro. Por ejemplo:

Si *A'* es el punto simétrico de *A* respecto de *B*, entonces *B* es el punto medio de *A* y *A'*, y por tanto:



$$\left.\begin{array}{l} 8=\dfrac{2+x}{2} \Rightarrow x=14 \\ -3=\dfrac{y+1}{2} \Rightarrow y=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ luego el punto simétrico es el punto *A'(14,-7)*

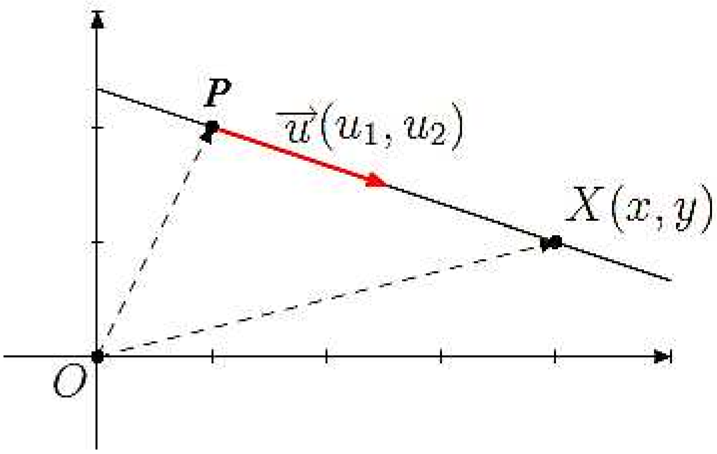
Ejercicio:

Dados los puntos *P(3,9)* y *Q(8,-1)*, calcula:

a) El punto medio de *P* y *Q*
b) El simétrico de *P* respecto de *Q*
c) El simétrico de *Q* respecto de *P*

4.- ECUACIONES DE LA RECTA

Una recta viene determinada por un ***punto*** $P(p_1, p_2)$ por el que pase y un vector que indique su dirección llamado ***vector director*** $\vec{u}(u_1,u_2)$.



Como el punto *X* está en la recta, el vector $\overrightarrow{PX}$ será proporcional al vector director $\vec{u}$, y por lo tanto $\overrightarrow{PX}=\lambda\vec{u}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Por otra parte, el vector de posición de cualquier punto de la recta, $\overrightarrow{OX}$ es suma de los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{PX}$:

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}$, lo que da como resultado la ***<u>ecuación vectorial</u>*** de la recta:

$$\boxed{\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}}$$

Que no es sino una forma de indicar qué punto tomaremos como punto base de la recta y cuál es su vector director.

Si ahora expresamos la ecuación vectorial con coordenadas:

$$(x,y)=(p_1,p_2)+\lambda(u_1,u_2) \Rightarrow (x,y)=(p_1+\lambda u_1, p_2+\lambda u_2)$$

De donde obtenemos las ***ecuaciones paramétricas*** de la recta: $\boxed{\left.\begin{array}{l} x=p_1+\lambda u_1 \\ y=p_2+\lambda u_2 \end{array}\right\}}$

Para cada valor de λ obtendremos un punto de la recta.

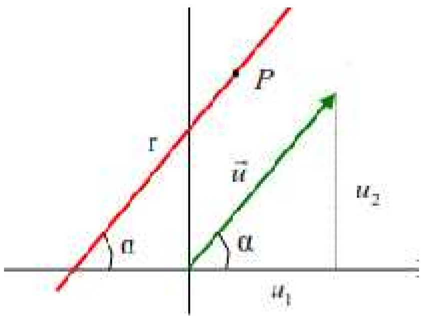
Despejando λ en las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{x-p_1}{u_1} \\ \lambda=\dfrac{y-p_2}{u_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x-p_1}{u_1}=\frac{y-p_2}{u_2}}$$

Llamada ***ecuación continua*** de la recta

Despejando en la ecuación continua $y-p_2$: $\quad y-p_2=\dfrac{u_2}{u_1}(x-p_1)$

Si observamos el siguiente dibujo, vemos que el cociente $\dfrac{u_2}{u_1}$ representa la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas:



A dicha tangente es a lo que se le llama ***pendiente*** de la recta, ***m***, de modo que:

$$m=tg\alpha=\frac{u_2}{u_1}$$

De esta manera podemos escribir la ***ecuación punto-pendiente*** de la recta:

$$\boxed{y-p_2=m(x-p_1)}$$

Despejando ahora *y* de la ecuación anterior: $\quad y=m(x-p_1)+p_2=mx-mp_1+p_2$,

y llamando $n=-mp_1+p_2$ se obtiene la ***ecuación general explícita*** de la recta (normalmente llamada ecuación expícita):

$$\boxed{y=mx+n}$$

Donde *m* es la pendiente de la recta y *n* la ***ordenada en el origen***, que representa el punto donde la recta corta al eje de ordenadas, OY

Si ahora volvemos a la ecuación continua, multiplicamos en cruz y operamos, queda una ecuación de la forma:

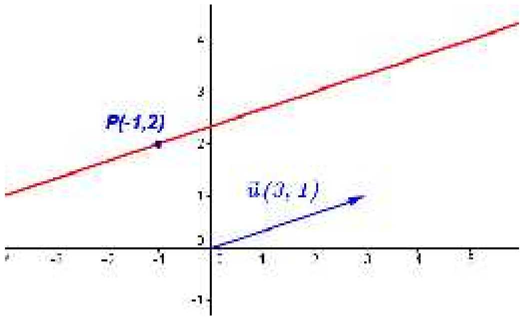
$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Llamada ***ecuación general implícita*** de la recta (aunque normalmente se le llama ecuación general)

Ejemplo 1:

Calcular todas las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto P(-1,2) y tiene como vector director el $\vec{u}(3,1)$

Solución:



La ecuación vectorial: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}$

Ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $r \equiv \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1}$

Ecuación punto-pendiente: $r \equiv y - 2 = \dfrac{1}{3}(x+1)$ (La pendiente es $m = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{3}$)

Ecuación explícita: $y - 2 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} + 2 \Rightarrow r \equiv y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$

Para la ecuación general operamos en la continua y pasamos todo a un miembro:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow x + 1 = 3y - 6 \Rightarrow r \equiv x - 3y + 7 = 0$$

Obviamente no es necesario pasar por todas las ecuaciones de una recta para calcular una ecuación concreta, de la misma manera que es fundamental saber pasar de una ecuación de la recta a otra cualquiera:

Ejemplo 2:

Calcular la ecuación punto-pendiente de la recta r que pasa por el punto P(3,-2) y tiene como vector director el $\vec{u}(-3,4)$

Solución:

Como la pendiente es $m = \dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{4}{3}$, la ecuación pedida será: $r \equiv y + 2 = -\dfrac{4}{3}(x-3)$

Ejemplo 3:

Calcular la ecuación general de la recta r que pasa por el punto P(-1,4) y tiene como vector director el $\vec{u}(2,-5)$

Solución:

Escribimos directamente la ecuación continua y operamos:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-5} \quad \Rightarrow \quad -5x-5=2y-8 \quad \Rightarrow \quad r\equiv 5x+2y-3=0$$

Ejemplo 4:

Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta $r\equiv y-3=2(x+4)$

Solución:

Como de la ecuación punto-pendiente podemos sacar un punto *P(-4,3)* y la pendiente es 2:

$m=\frac{2}{1}=\frac{u_2}{u_1} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_r(1,2)$, luego las ecuaciones paramétricas son: $r\equiv\begin{cases} x=-4+\text{ª} \\ y=3+2\text{ª} \end{cases}$

Ejemplo 5:

Calcular la ecuación continua de la recta $r\equiv 2x-y+3=0$

Solución:

Existen muchas formas de hacerlo (sacando un punto y la pendiente, pasándola a explícita,…).
Una opción es llamar λ a una de las incógnitas y despejar la otra.

Por ejemplo, si $x = \lambda$, despejando: $y = 3+2\lambda$, luego las ecuaciones paramétricas serán:

$\begin{cases} x=\text{ª} \\ y=3+2\text{ª} \end{cases}$ De donde obtenemos un punto *P(0,3)* y un vector director $\vec{u}_r(1,2)$, y por tanto la ecuación continua será: $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}$

Ejercicios:

1.- Calcular todas las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto A(5,-7) y tiene como vector director el $\vec{v}\left(-2,3\right)$

2.- Obtener un punto, un vector director y la pendiente de las rectas:

$a)\ r \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{2}{5} \qquad b)\ s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\text{ª} \\ y = 2 \end{cases} \qquad c)\ t \equiv x - 2y + 3 = 0$

3.- Calcular las ecuaciones paramétricas de las rectas:

$a)\ r \equiv y = -3x + 1 \qquad b)\ s \equiv 2x - 4y + 3 = 0 \qquad c)\ t \equiv \frac{x-2}{3} = y$

4.- Calcular la ecuación punto-pendiente de las rectas:

$a)\ r \equiv \begin{cases} x = 3\text{ª} \\ y = 1 - \text{ª} \end{cases} \qquad b)\ s \equiv y = 2x - 1 \qquad c)\ t \equiv 3x - 6y + 4 = 0$

5.- Calcular la ecuación explícita de las rectas:

$a)\ r \equiv \left(x,y\right) = \left(0,1\right) + \text{ª}\left(2,3\right) \qquad b)\ s \equiv y - 2 = \frac{1}{2}\left(x+3\right) \qquad c)\ t \equiv 3x - 2y - 4 = 0$

6.- Calcular todas las ecuaciones de los ejes de coordenadas

7.- Calcular la ecuación general de la recta que pasa por los puntos *P(3,-2)* y *Q(-1,1)*

8.- Calcular el valor de *k* en cada caso para que las siguientes rectas pasen por el punto *P(5,-2)*:

$a)\ r \equiv x + ky - 7 = 0 \qquad b)\ s \equiv \begin{cases} x = 3 + k\text{ª} \\ y = 4 + 2\text{ª} \end{cases}$

9.- Calcular la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto *A(-4,1)* y es paralela a la recta $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$

10.- Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto *A(2,-3)* y es paralela a la que pasa por los puntos *B(4,1)* y *C(-2,2)*

11.- a) Calcular la ecuación general de la recta que pasa por los puntos *A(0,3)* y *B(3,-1)*.
b) Comprobar si el punto *C(5,-3)* está o no en dicha recta
c) Calcular la ecuación punto-pendiente de la recta paralela a la anterior que pase por el origen de coordenadas

12.- Dado el triángulo de vértices los puntos *A(-1,1), B(6,0)* y *C(2,6)*:
a) Calcular las ecuaciones explícitas de sus lados
b) Calcular la ecuación general de la mediana correspondiente al vértice *A*

5.- VECTOR NORMAL A UNA RECTA

Llamamos ***vector normal*** a la recta a todo vector que es perpendicular a ella, es decir, perpendicular a su vector director.

> *"Dada una recta en ecuación general,* $r \equiv Ax + By + C = 0$*, el vector* $\vec{n}_r\left(A,B\right)$ *es un vector normal de dicha recta"*

Para demostrarlo vamos a pasar de la ecuación general a la explícita:

$$Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Por tanto la pendiente de esa recta es $m = -\frac{A}{B}$, y como la pendiente era $m = \frac{u_2}{u_1}$, el vector director de esa recta será el vector $\vec{u}_r\left(B,-A\right)$

Comprobamos ahora que el vector $\vec{n}_r$ es perpendicular a dicho vector director, y para ello su producto escalar debe ser 0:

$$\vec{n}_r \cdot \vec{u}_r = \left(A,B\right)\cdot\left(B,-A\right) = A\cdot B - B\cdot A = 0$$

Con lo que queda demostrado.

Ejemplo 1:

Calcular la ecuación general de la recta cuyo vector normal es $\vec{n}\left(2,-3\right)$ *y que pasa por P(1,2)*

Solución:

Como tenemos su vector normal, la ecuación general de la recta será:

$r \equiv 2x - 3y + C = 0$

Calculamos C imponiendo que pase por P:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 4$

Luego la recta pedida es: $r \equiv 2x - 3y + 4 = 0$

Ejemplo 2:

Calcular la ecuación general de la recta paralela a $r \equiv 3x + y - 1 = 0$ *y que pasa por P(2,-1)*

Solución:

Como tiene que ser paralela, su vector normal será el mismo que el de r, $\vec{n}_s = \vec{n}_r\left(3,1\right)$, luego su ecuación general será:

$$s \equiv 3x + y + C = 0$$

Como pasa por P $\quad 3\cdot 2 - 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -5$

Luego la recta pedida es $s \equiv 3x + y - 5 = 0$

Ejemplo 3:

Calcular la ecuación general de la recta perpendicular a $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\text{ª} \\ y = 5 - \text{ª} \end{cases}$ *y que pasa por P(3,-2)*

Solución:

Como la recta *s* tiene que ser perpendicular a *r*, el vector director de *r* sirve como vector normal de *s*, es decir:

$$\vec{u}_r = \vec{n}_s = (2,-1)$$

Luego podemos obtener la ecuación general de *s* con su vector normal y el punto *P*:

$$s \equiv 2x - y + C = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 3 - (-2) + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -8$$

Luego la recta que buscábamos es:

$$s \equiv 2x - y - 8 = 0$$

Ejemplo 4:

Calcular la ecuación explícita de la recta perpendicular a $r \equiv y = 2x + 3$ *y que pasa por P(2,1)*

Solución:

El vector director de *r* es $\vec{u}_r(1,2)$, pues su pendiente *m* es 2.

Este vector sirve como vector normal de *s*: $\vec{u}_r = \vec{n}_s = (1,2)$, luego la ecuación general de *s* será:

$$s \equiv x + 2y + C = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -4 \quad \Rightarrow \quad s \equiv x + 2y - 4 = 0$$

Por último la pasamos a explícita:

$$2y = -x + 4 \quad \Rightarrow \quad s \equiv y = -\frac{1}{2}x + 2$$

De lo explicado hasta ahora podemos sacar varias conclusiones:

<u>Importante:</u>

- *Si dos rectas son paralelas, tienen los mismos vectores directores o normales, es decir:*

  $$Si \;\; r // s \;\; \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_s \\ \vec{n}_r = \vec{n}_s \end{cases}$$

- *Si dos rectas son paralelas, tienen la misma pendiente:* $Si \;\; r // s \;\; \Rightarrow \; m_r = m_s$
- *Si dos rectas son perpendiculares, el vector director de una sirve como vector normal de la otra, y viceversa, es decir:*

  $$Si \;\; r \perp s \;\; \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{n}_s \\ \vec{n}_r = \vec{u}_s \end{cases}$$

- *Si dos rectas son perpendiculares, sus pendientes son inverso-opuestas, es decir:*

  $$Si \;\; r \perp s \;\; \Rightarrow \; m_r = -\frac{1}{m_s}$$

Ejercicios:

1.- Calcular la ecuación general de la recta perpendicular a $r \equiv x = \dfrac{y+1}{-3}$ que pase por *P(0,2)*

2.- Dada la recta $r \equiv (x,y) = (1,3) + {}^{\text{a}}(-1,4)$, calcular:

a) La ecuación general de una recta paralela a ella que pase por el origen de coordenadas

b) La ecuación continua de una recta perpendicular a ella que pase por *A(-2,2)*

3.- Dada la recta $r \equiv y = -3x + 2$, calcular las ecuaciones punto pendiente de:

a) Una recta paralela que pase por *P(-1,4)*

b) Una recta perpendicular que pase por *Q(0,1)*

4.- Calcular la ecuación general de la recta perpendicular al segmento de extremos *A(2,-1)* y *B(4,3)* por su punto medio

5.- Dado el triángulo de vértices los puntos *A(-1,-1), B(3,0)* y *C(2,2)*, calcular:

a) La ecuación general de la altura que pasa por A

b) La ecuación explícita de la mediatriz del lado AB

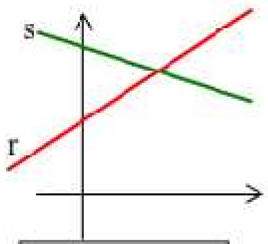
6.- POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Dos rectas en el plano pueden estar situadas de tres formas diferentes: ***secantes, paralelas o coincidentes.***

La manera más sencilla de saberlo es con las rectas en ecuación general:

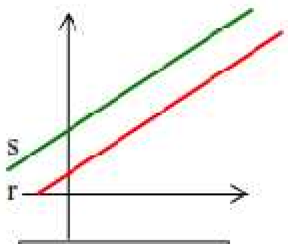
$$r \equiv Ax + By + C = 0 \quad ; \quad s \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

Los vectores normales son $\vec{n}_r(A,B)$ y $\vec{n}_s(A',B')$. Si esos vectores no son iguales o paralelos $\left(\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}\right)$, las rectas serán secantes. Si lo son, las rectas serán coincidentes o paralelas. Si fuesen coincidentes, las ecuaciones generales serían las mismas o proporcionales, y si no serán paralelas. Es decir:



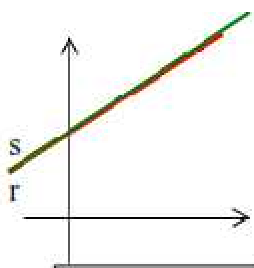
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Rectas secantes



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Rectas paralelas



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Rectas coincidentes

En caso de querer calcular el punto de corte bastaría con resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

Si las rectas están en cualquier ecuación en de la que sea fácil obtener el vector director y un punto (paramétricas, continua, punto-pendiente), basta con ver si los vectores directores son paralelos (coordenadas proporcionales) o no. Si no lo son, serán secantes, mientras que si lo son, las rectas serán paralelas o coincidentes. Para distinguirlo basta con tomar un punto de una de ellas y ver si está o no en la otra. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv P_r \ \ ,\vec{u}_r \\ s \equiv Q_s \ \ ,\vec{v}_s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1}{v_1} \neq \dfrac{u_2}{v_2} \quad \Rightarrow \ Paralelas \\ \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} \quad \Rightarrow \begin{cases} P_r \in s \ \ \Rightarrow \ coincidentes \\ P_r \notin s \ \ \Rightarrow \ paralelas \end{cases} \end{cases}$$

En el caso particular de que las rectas estén en forma explícita, serán paralelas o coincidentes si sus pendientes son iguales, y si no serán secantes. Si además de tener la misma pendiente coincide la ordenada en el origen, serán coincidentes, y si no serán paralelas. Es decir:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv y = mx+n \\ s \equiv y = m'x+n' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m \neq m' \quad \Rightarrow \quad sec\,antes \\ m = m' \ \ y \ \ n \neq n' \quad \Rightarrow \quad paralelas \\ m = m' \ \ y \ \ n = n' \quad \Rightarrow \ coincidentes \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

Estudiar la posición relativa de las rectas

$a)\ r \equiv 6x+10y+8=0 \quad ; \quad s \equiv 3x+5y-4=0$

$b)\ r \equiv \dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y}{3} \qquad ; \quad s \equiv \begin{cases} x=-1+2\text{ª} \\ y=6-3\text{ª} \end{cases}$

$c)\ r \equiv \begin{cases} x=2\text{ª} \\ y=11-6\text{ª} \end{cases} \qquad ; \quad s \equiv y-5=-3(x-2)$

$d)\ r \equiv y=-3x+4 \quad ; \quad s \equiv 3x+y+2=0$

Solución:

a) Como $\dfrac{6}{3} = \dfrac{10}{5} \neq \dfrac{8}{-4}$ las rectas son paralelas

b) Los vectores directores son $\vec{u}_r(-1,3)$, $\vec{u}_s(2,-3)$. Como no son paralelos $\left(-\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{3}{-3}\right)$ las rectas son secantes. Vamos a calcular el punto de corte.
Para ello pasamos *r* a paramétricas e igualamos:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 - \mu \\ y = 3\mu \end{cases} \quad , \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5 - \mu = -1 + 2\lambda \\ 3\mu = 6 - 3\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + \mu = 6 \\ \lambda + \mu = 2 \end{cases}$$

$Restando: \quad \lambda = 4 \ , \ \mu = -2$

Y sustituyendo λ en *s* o μ en *r*, obtenemos el punto de corte *P(7,-6)*

c) Los vectores directores son $\vec{u}_r(2,-6)$, $\vec{u}_s(1,-3)$. Como $\frac{2}{1} = \frac{-6}{-3}$ los vectores directores son paralelos, y por tanto las rectas serán paralelas o coincidentes.
Cogemos un punto por ejemplo de *r*, *P(0,11),* y vemos si está en *s*:
$11 - 5 = -3(0-2) \ \Rightarrow \ 6 = 6$
Luego *P* está también en *s* y por tanto las rectas son coincidentes

d) Pasamos por ejemplo *s* a explícita:
$r \equiv y = -3x + 4 \quad ; \ s \equiv y = -3x - 2$
Como $m_r = m_s = -3$ serán paralelas o coincidentes
Como $n_r = 4 \neq n_s = -2$ las rectas son paralelas

Ejercicio:

Estudiar la posición de las siguientes pares de rectas:

$a)\, r \equiv 2x + y - 6 = 0 \quad ; \ s \equiv x - y = 0$

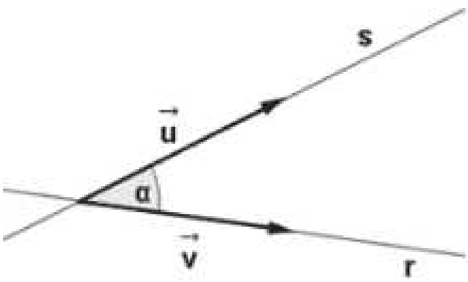
$b)\, r \equiv \begin{cases} x = 7 + 5\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases} \quad ; \ s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 - 2\mu \end{cases}$

$c)\, r \equiv 3x - 5y = 0 \quad ; \ s \equiv \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$

$d)\, r \equiv y = 2x + 4 \quad ; \ s \equiv y = x + 2$

<u>7.- ÁNGULO ENTRE RECTAS</u>

Se llama ***ángulo entre dos rectas*** al menor de los ángulos que forman éstas.



Ese ángulo coincide con el que forman sus vectores directores o sus vectores normales:

$$\boxed{\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{u}_r,\vec{u}_s}\right) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}}$$

o

$$\boxed{\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{n}_r,\vec{n}_s}\right) = \frac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}_s|}}$$

El valor absoluto se pone para que salga el coseno positivo y por tanto el ángulo agudo.

Ejercicio:

Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$a)\, r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\text{ª} \\ y = 1 + \text{ª} \end{cases} \quad ; \; s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3}$$

$$b)\, r \equiv 5x - y + 4 = 0 \quad ; \; s \equiv y = 7$$

$$c)\, r \equiv y = 5x - 1 \quad ; \; s \equiv y = -4x + 3$$

8.- DISTANCIAS

Distancia entre dos Puntos

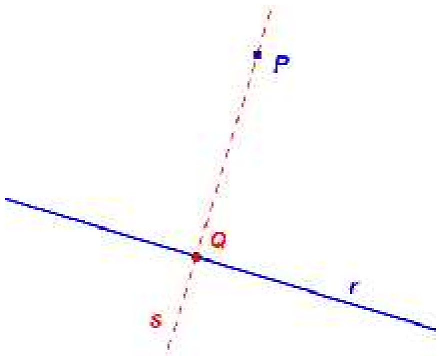
Ya vimos que para calcular la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)\, y\, B(x_2, y_2)$ basta con obtener el módulo del vector que los une:

$$\boxed{d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Distancia de un Punto a una Recta

Existen dos métodos para calcular la distancia de un punto *P* a una recta *r*:

- ✓ *Gráficamente:*



a) Calcular la recta *s* perpendicular a *r* que pasa por *P*

b) Calcular el punto de corte entre *r* y *s*, *Q*

c) La distancia de *P* a *r* será el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$

$$\boxed{d(P,r) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|}$$

- ✓ *Analíticamente:*

Si el punto es $P(x_0, y_0)$ y la recta está expresada en ecuación general $r \equiv Ax + By + C = 0$, la distancia se calcula mediante la fórmula:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia del punto P(3,1) a la recta $r \equiv x - y = 6$

Solución:

- Gráficamente:
  Calculamos la recta *s* perpendicular a *r* que pasa por *P*. Como *r* está en ecuación general, su vector normal es $\vec{n}_r\left(1,-1\right)$
  Este vector sirve como vector director de *s*: $\vec{u}_s = \vec{n}_r$.
  Y con el vector director y el punto *P* podemos calcular la recta *s*:
  $$s \equiv \begin{cases} x = 3 + ª \\ y = 1 - ª \end{cases}$$
  Calculamos ahora el punto de corte de *r* y *s*: $Q = r \cap s$, sustituyendo por ejemplo las ecuaciones paramétricas de *s* en la ecuación general de *r*
  $$\left.\begin{array}{l} r \equiv x - y = 6 \\ s \equiv \begin{cases} x = 3 + ª \\ y = 1 - ª \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 + ª - 1 + ª = 6 \quad \Rightarrow ª = 2 \quad \Rightarrow\ Q\left(5,-1\right)$$
  Por último calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}\left(2,-2\right)$
  Luego $d\left(P,r\right) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\left(2,-2\right)\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u$

- *Analíticamente*:
  La ecuación general de *r* es $r \equiv x - y - 6 = 0$
  Y aplicando la fórmula
  $$d\left(P,r\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|3 - 1 - 6\right|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ u$$

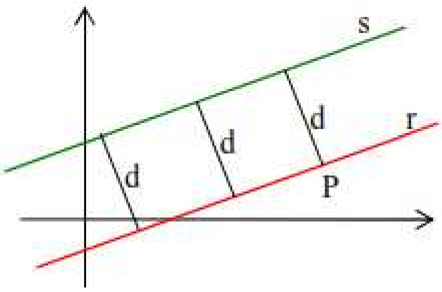
Nota: Obviamente el método analítico es mucho más rápido, pero el método gráfico nos da, además de la distancia, el punto Q, llamado proyección de P sobre r, que nos puede servir para futuros ejercicios.

Ejercicio:

Calcular analítica y gráficamente la distancia del punto *A(3,1)* a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + ª \\ y = -2ª \end{cases}$

Distancia entre dos Rectas

Por supuesto lo primero es comprobar que las dos rectas son paralelas, porque si no la distancia entre ellas sería 0.



Para calcular la distancia entre *r* y *s* basta coger un punto *P* cualquiera de una de ellas y calcular la distancia a la otra como en el apartado anterior

$$\boxed{d(r,s) = d(P_r, s)}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 4 - 3\text{ª} \\ y = 1 + \text{ª} \end{cases}$ $y \quad s \equiv \dfrac{x+3}{-3} = y + 5$

Solución:

Primero comprobamos si son paralelas: $\vec{u}_r(-3,1)$, $\vec{u}_s(-3,1)$. Como son paralelos y el punto $P_r(4,1)$ no está en *s* (comprobarlo) las rectas son paralelas.
Pasamos la recta *s* a ecuación general y usamos la fórmula con el punto de *r*:

$$s \equiv \frac{x+3}{-3} = y + 5 \quad \Rightarrow \quad s \equiv x + 3y + 18 = 0$$

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{|4+3+18|}{\sqrt{10}} = \frac{25}{\sqrt{10}} = \frac{25\sqrt{10}}{10} = \frac{5\sqrt{10}}{2}\ u$$

Ejercicio:

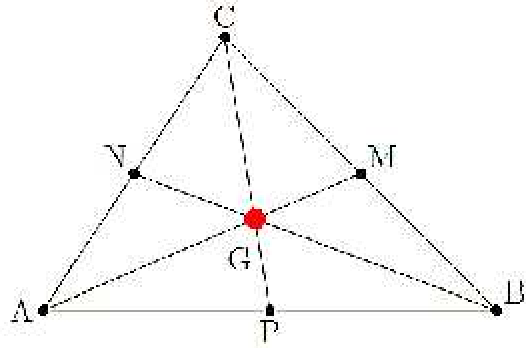
Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\text{ª} \\ y = 3 - 2\text{ª} \end{cases}$, $s \equiv y - 2 = -\dfrac{2}{3}x$, $t \equiv x + 6y - 12 = 0$
Calcular las distancias entre *r y s*, *r y t*, *s y t*

APÉNDICE: GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

Medianas y Baricentro

Las ***medianas*** de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

El punto de corte de las medianas se llama ***baricentro*** *(G)*



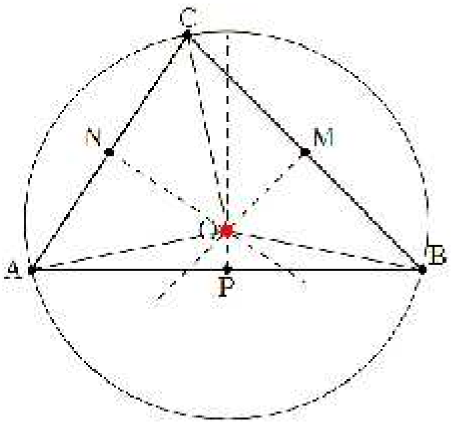
Para calcular el baricentro calculamos dos medianas calculando previamente los puntos medios de dos lados.
Luego calculamos el punto de corte entre las dos medianas y obtendremos el baricentro.

Mediatrices y Circuncentro

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que lo divide en dos partes iguales. Obviamente, los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de sus extremos.

En un triángulo, las ***mediatrices*** son las rectas perpendiculares a cada lado en sus puntos medios.

El punto de corte de las mediatrices se llama ***circuncentro****(O)*

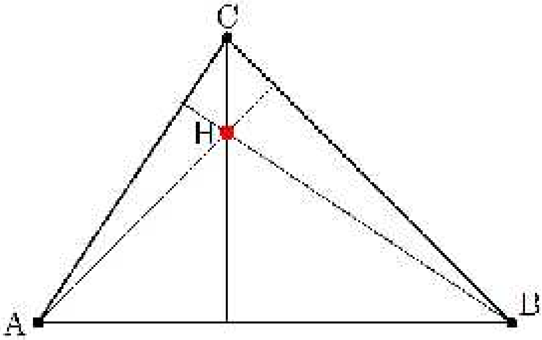


Para calcular cada mediatriz usamos el vector director de cada lado como vector normal de dicha mediatriz, y como punto usamos el punto medio de ese lado.
Calculando el punto de corte de dos mediatrices tendremos el circuncentro.
Como el circuncentro está en las tres mediatrices, equidista de los tres vértices del triángulo, y es por tanto el centro de la circunferencia circunscrita al mismo, de ahí su nombre.

Alturas y Ortocentro

Las ***alturas*** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada lado que pasan por el vértice opuesto.

El punto de corte de las alturas es el ***ortocentro****(H)*

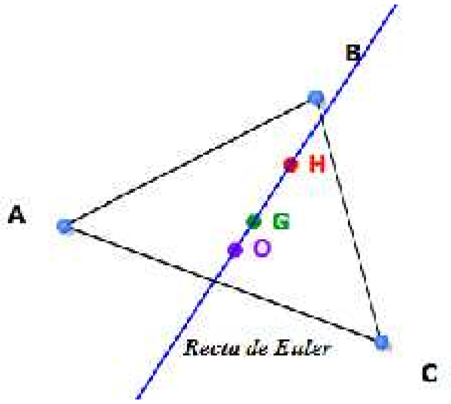


Para calcular cada altura usamos el vector que une los vértices de cada lado como vector normal, y como punto el vértice opuesto.

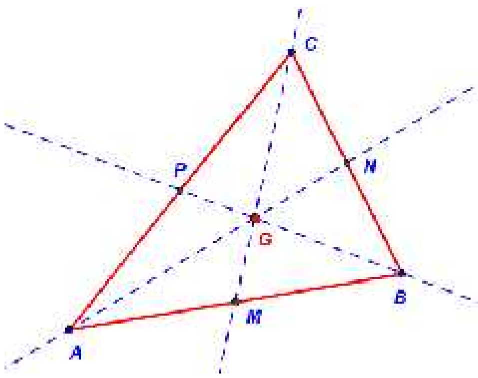
Calculando el punto de corte de dos alturas tendremos el ortocentro.

Curiosidades

- En cualquier triángulo sus centros (baricentro, circuncentro y ortocentro) están alineados, es decir, sobre la misma recta. Esa recta se llama ***recta de Euler***.



- En un triángulo equilátero, el baricentro, el circuncentro y el ortocentro coinciden
- En cualquier triángulo el baricentro está al doble de distancia de cada vértice que del punto medio del lado opuesto:



Es decir:

$AG = 2GN$

$BG = 2GP$

$CG = 2GM$

Es el conocido como ***teorema de las medianas***

Ejercicios

1.- Calcula el área del triángulo de vértices *A(-3,-2), B(9,7)* y *C(2,8)*

2.- Las rectas $r \equiv x - y - 3 = 0$, $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$, $t \equiv \begin{cases} x = 1 + \text{ª} \\ y = 1 - 2\text{ª} \end{cases}$ forman un triángulo.

a) Calcular su perímetro
b) Calcular razonadamente la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A (punto de corte de r y t)
c) Calcular razonadamente la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por B (punto de corte de r y s)

3.- Calcula el ortocentro y el circuncentro del triángulo de vértices *A(2,0), B(0,1)* y *C(-3,-2)*

4.- Calcula el simétrico del punto A(6,3) respecto de la recta $r \equiv x + 2y - 2 = 0$

5.- Calcula la ecuación de la mediatriz del segmento que determina la recta $r \equiv 2x + 3y - 6 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas

6.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\text{ª} \\ y = 2 + k\text{ª} \end{cases}$, $s \equiv x + y = 0$

a) Calcular *k* para que sean paralelas y calcular la distancia entre ellas
b) Calcular *k* para que sean perpendiculares y calcular su punto de corte

7.- Calcula *c* para que la distancia del punto *A(3,2)* a la recta $r \equiv x - 3y + c = 0$ sea de $\sqrt{10}$ unidades.

8.- Halla el punto de la recta $r \equiv 3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de los puntos *A(-6,0)* y *B(0,-6)*

9.- Uno de los vértices de un paralelogramo es el punto *A(5,3)*, y dos de sus lados están sobre las rectas $r \equiv 2x + 3y - 6 = 0$, $s \equiv x - 5y - 3 = 0$
Calcular sus otros vértices

10.- Calcula *c* para que la distancia entre las rectas $r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$ y $s \equiv 4x + 3y + c = 0$ sea de 3 unidades

EJERCICIOS

1.- Dado el vector $\overrightarrow{AB}(1,-3)$

a) Hallar las coordenadas de *A* sabiendo que las de *B* son (0,2)
b) Hallar las coordenadas de *B* sabiendo que las de *A* son (-2,3)
c) Si el vector $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$, y *C* es el punto (-1,4), hallar *D*
d) Calcular $\vec{v}$ sabiendo que $\vec{v} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

2.- Calcular el simétrico del punto *P(1,-2)* respecto del punto *H(3,0)*

3.- Halla las coordenadas de los puntos *P* y *Q* que dividen al segmento de extremos *A(-5,3)* y *B(8,6)* en tres partes iguales

4.- Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos A=(3,2) y B=(1,-1).

5.- ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P=(2,1) y Q=(1,-2). ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q?

6.- Determina el valor de k para que los puntos A(2,-1), B(1,4) y C(k,9) estén alineados.

7.- Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son A=(6,0) y B=(0,-2).

8.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por B(3,1) y es paralela a la que pasa por los puntos A(2,0) y C(2,-1).

9.- Hallar el valor de *k* para que:

a) El punto (1,2) pertenezca a la recta $r \equiv x - 3ky + 3 = 0$
b) El punto *(k,1)* pertenezca a la recta $r \equiv x + 2y - 4 = 0$
c) Los puntos (1,2), (5,.6) y (7,*k*) estén alineados
d) El vector director de la recta $r \equiv 2x + ky - 1 = 0$ sea $\vec{u}(-5,3)$
e) La recta $r \equiv kx - 3y + 2 = 0$ tenga pendiente $m = -\dfrac{3}{2}$
f) Las rectas $r \equiv y = 9k + 2$, $s \equiv 4x - ky + 1 = 0$ sean paralelas
g) Las rectas $r \equiv 2x + 3ky + 2 = 0$, $s \equiv \dfrac{x-2}{k} = \dfrac{y+1}{2}$ sean perpendiculares

10.- De entre los siguientes pares de rectas, indica cuáles son paralelas, cuáles son coincidentes y cuáles son secantes. Indica el ángulo formado por las rectas en cada caso

$a)\ r \equiv 2x+3y=0\ ;\ s \equiv 4x+6y+8=0 \qquad b)\ r \equiv x-y=0\ \ ;\ \ s \equiv 2x+y-1=0$

$c)\ r \equiv 3x+2y-5=0\ \ ;\ s \equiv 2x-3y+4=0 \qquad d)\ r \equiv x-2y+1=0\ \ ;\ s \equiv 4x+2y=3$

$d)\ r \equiv y=x-2\ \ ;\ s \equiv (3,0)+\text{ª}(-3,2) \qquad e)\ r \equiv \begin{cases} x=3t+4 \\ y=t-1 \end{cases}\ ;\ s \equiv \begin{cases} x=6t+2 \\ y=2t+3 \end{cases}$

11.- Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-3}{a} = \dfrac{y+1}{2}$, $s \equiv \begin{cases} x=3-\text{ª} \\ y=2+7\text{ª} \end{cases}$, calcular *a* para que sean:

a) Paralelas b) Perpendiculares

12.- Igual que el ejercicio anterior para las rectas
$r \equiv ax+(a-1)y+1=0\ \ ,\ s \equiv 2ax+ay-2=0$

13.- Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P en los casos:

a) $r \equiv \begin{cases} x=2-3\text{ª} \\ y=1+\text{ª} \end{cases}$, P=(3,1) b) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3}$, P=(0,5)

c) $r \equiv y=2x-1$, P=(1,2) d) $r \equiv 2x-3y+2=0$, P=(0,0)

14.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r \equiv 2x+3y+1=0$ y $s \equiv x-y-2=0$, y es perpendicular a la recta $t \equiv (5,0)+\text{ª}(-5,3)$

15- Calcula el valor de a y b para que las rectas ax-y+2=0 y bx+6y-9=0 sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto P=(1,1).

16.- Calcula la distancia del punto *P(1,-1)* a cada una de las rectas siguientes:

$a)\ r \equiv x+3y+2=0 \quad b)\ r \equiv y=2x-1 \quad c)\ r \equiv)\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$

$d)\ r \equiv \begin{cases} x=1+\text{ª} \\ y=2-4\text{ª} \end{cases} \quad e)\ r \equiv 4x+3y=2 \quad f)\ r \equiv y=-\dfrac{3}{2}x+3$

17.- Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv 3x + 4y - 15 = 0$ y $s \equiv 3x + 4y = 40$

18.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *A(3,4)* y *B(1,2)*

19.- Calcula las longitudes de las tres alturas del triángulo determinado por los puntos *A(1,1), B(1,3)* y *C(3,2).*

20.- En el triángulo de vértices *A(2,2), B(-2,0)* y *C(2,4),* halla las ecuaciones de las medianas.

21.- Halla los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv x = 1 \ , \ s \equiv x + y = 2 \ , \ t \equiv \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} + a \\ y = -5a \end{cases}$$

22.- Halla las coordenadas del baricentro (punto de corte de las medianas), del triángulo de vértices: *A(0,2), B(-3,4)* y *C(0,3).*

23.- Halla el ortocentro del triángulo que determinan los puntos *A(1,0), B(-3,2)* y *C(-1,-2)*

24.- Halla el circuncentro del triángulo que determinan los puntos *A(-2,-1), B(-1,2)* y *C(5,0).* Comprueba que está en el lado AC

25.- Calcula el baricentro, el ortocentro y el circuncentro del triángulo de vértices *A(-1,1), B(3,-1)* y *C(4,6)*. Comprueba que están alineados y calcula la ecuación general de la recta de Euler.

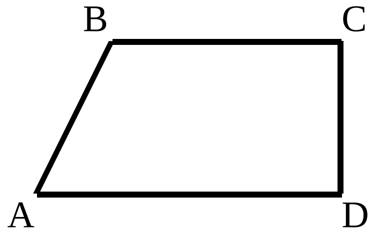
26.- La mediatriz de un segmento AB es la recta $r \equiv y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{3}$. Si un extremo es el punto *A(-2,-1)*, calcular las coordenadas del otro extremo *B*.

27.- Dados los vectores $\vec{u}(3,-2)$ y $\vec{v}(4,-3)$, calcular razonadamente:

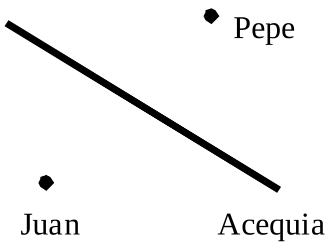
a) La ecuación general de la recta cuyo vector director es el vector $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ y que pasa por el punto de corte de las rectas $r \equiv x - y + 1 = 0$ y $s \equiv 3x + 2y - 12 = 0$
b) La distancia del punto *A(-1,4)* a la recta calculada en el apartado anterior

28.- La recta $r \equiv y + 2 = m(x + 3)$ pasa por el punto de intersección de las rectas
$s \equiv 2x + 3y + 5 = 0$ $\quad t \equiv 5x - 2y - 16 = 0$
Hallar razonadamente el valor de *m*.
Calcular la ecuación de la recta perpendicular a *r* y con su misma ordenada en el origen

29.- Dados los puntos *A(1,1), B(2,4)* y *C(4,6)* de la siguiente figura, calcular razonadamente el punto *D* así como el área de la figura



30.- Pepe y Juan se encuentran simétricamente colocados respecto a una acequia cuyo trazado viene dado por la recta de ecuación $r \equiv x + 3y - 7 = 0$



Si Pepe está en el punto de coordenadas P(3,-2), ¿en qué punto está Juan?

¿Qué distancia los separa?

31.- Hallar un punto de la recta $r \equiv x + y - 2 = 0$ que equidiste de los puntos *A(1,3)* y *B(1,1)*

32.- Dada la recta $r \equiv x - y + 2 = 0$, calcular las rectas paralelas a ella y a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades

33.- Halla los puntos de la recta $r \equiv x - y - 1 = 0$ que disten 1 unidad de la recta $s \equiv 3x - 4y + 2 = 0$

34.- Halla la distancia del baricentro del triángulo de vértices los puntos *A(1,3), B(-3,5)* y *C(2,1)* al lado AB

35.- Los puntos *A(1,1)* y *B(3,3)* son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Sabiendo que el vértice *D*, opuesto al *B*, está en la recta $r \equiv x + 3y + 2 = 0$, hallar las coordenadas de *C* y *D*.

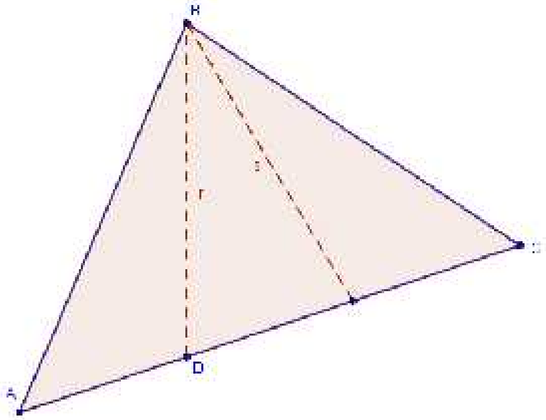
36.- Calcula la mediatriz del segmento de extremos *A(-1,2) y B(3,0).*
Calcula los puntos de dicha mediatriz que están a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades de la recta que pasa por *A* y *B*.

37.- Calcular *m* para que las rectas $r \equiv 3x + y - 1 = 0$, $s \equiv 2x + my - 8 = 0$ formen un ángulo de 45º.

38.- Calcula la pendiente de la recta $r \equiv y-2=m\left(x-1\right)$ para que su distancia al origen sea 1.

39.- Dada la recta $r \equiv 2x-3y+5=0$, hallar la ecuación de la recta simétrica de *r* respecto al eje de abscisas

40.- Dado el triángulo de vértices A(-4,-2), B(-1,5) y C(5,1), calcular las ecuaciones de las rectas *r* (BD) y *s* (BE) de la figura que dividen al triángulo ABC en tres triángulos de igual área:



41.- Ana y Juan parten, respectivamente y a la misma velocidad, de los puntos *A(-5,2)* y *J(2,3)*. Se encuentran, con gran alegría, en un punto de la recta $r \equiv y=2x+4$. Halla las coordenadas del punto de encuentro, la distancia recorrida por cada uno de ellos y el área del triángulo que determinan los tres puntos.

42.- De un triángulo isósceles ABC conocemos los vértices del lado desigual *A(-2,1)* y *B(4,0)*. Sabiendo que el vértice *C* está en la recta $r \equiv 3x+3y-22=0$, calcular *C* y el área del triángulo.

Soluciones:

1.- a) (-1,5) b) (-1,0) c) $\left(-\frac{2}{3},3\right)$ d) (-3,9)

2.- (5,2)

3.- $P\left(-\frac{2}{3},4\right), Q\left(\frac{11}{3},5\right)$

4.- (x,y)=(3,2)+t(2,3); {x=3+2t; y=2+3t}; (x-3)/2=(y-2)/3

5.- {x=2+t; y=1+3t}; t=0; t=-1; t=-1/2

6.- k = 0

7.- x-3y-6=0

8.- x-3=0

9.- a) $\frac{2}{3}$ b) 2 c) -10 d) $\frac{10}{3}$ e) $-\frac{9}{2}$ f) $\pm\frac{2}{3}$ g) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.- a) Paralelas b) 71’57º c) 90º d) 59º e) 78’69º f) Paralelas

11.- a) $-\frac{2}{7}$ b) 14

12.- a) 2 b) $\frac{1}{3}$

13.- a) 3x-y-8=0 b) 2x+3y-15=0 c) x+2y-5=0 d) 3x+2y=0

14.- 5x-3y-8=0

15.- a = 2, b = 3

16.- a) 0; b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; c) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$; d) $\frac{3\sqrt{17}}{17}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

17.- 5

18.- x+y-5=0

19.- $4/\sqrt{5}$, $4/\sqrt{5}$, 2

20.- y=2; 3x-4y+6=0; 3x-2y+2=0

21.- Vértices (0,2), (1,1), (1,-3). Área = 2 u^2

22.- (-1,3)

23.- $\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$

24.- $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

25.- $G(2,2)$, $H\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right), O\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$; $r \equiv 2x-y-2=0$

26.- (3,2)

27.- a) x+y-5=0 b) $\sqrt{2}\ u$

28.- $m=-\frac{1}{5}$, $y=5x-\frac{13}{5}$

29.- D(5,5) , Área = 6 u^2

30.- J(5,4) , distancia = $2\sqrt{10}\ u$

31.- (0,2)

32.- Dos soluciones: x-y=0, x-y-4=0

33.- Dos soluciones (1,0), (11,10)

34.- $\frac{\sqrt{5}}{5}u$

35.- D(4,-2), C(6,0)

36.- mediatriz≡2x-y-1=0; puntos C(2,3) y D(0,-1)

37.- m = -1 o m = 4

38.- $m = \frac{3}{4}$

39.- 2x+3y+5=0

40.- r ≡ x+1=0 ; s ≡ 5x+3y-10=0

41.- Punto $\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\right)$, distancia $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ u , área $\frac{25}{6}$ u^2

42.- $C\left(\frac{7}{3},5\right)$, Área = $\frac{40}{3}u^2$

TEMA 6.- LUGARES GEOMÉTRICOS:

LAS CÓNICAS

1.- LUGARES GEOMÉTRICOS

Para entender lo que es un lugar geométrico, pensemos por ejemplo en los puntos del plano cuya abscisa es igual a su ordenada, es decir, aquellos puntos que tienen las dos coordenadas iguales. Obviamente estos puntos son aquellos que cumplan $y = x$, que como sabemos gráficamente corresponden a una recta.

Esta misma recta la podíamos hacer definido analíticamente por ejemplo como la recta que pasa por los puntos (0,0) y (1,1), o como la recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1, … pero la manera de definirla como conjunto de puntos que cumplen una propiedad determinada es justamente la idea de lugar geométrico.

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos del plano, P(x,y) que cumplen una determinada propiedad.

Veamos un ejemplo:

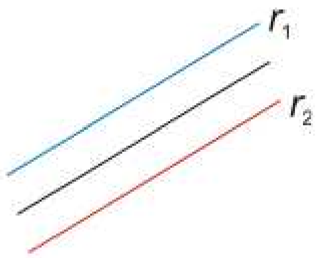
"Calcular el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia de 2 unidades de la recta $r \equiv 3x-4y+1=0$"

Para calcularlo supongamos un punto cualquiera del plano *P(x,y)*. Dicho punto debe cumplir que $dist(P,r)=2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|3x-4y+1|}{5}=2 \quad \Rightarrow \quad |3x-4y+1|=10$

Recordemos que el valor absoluto da lugar a dos ecuaciones:

$$a)\ 3x-4y+1=10 \quad \Rightarrow \quad 3x-4y-9=0$$
$$b)\ 3x-4y+1=-10 \quad \Rightarrow \quad 3x-4y+11=0$$

En este ejemplo el lugar geométrico está formado por dos rectas r_1 y r_2, que son paralelas entre sí y además paralelas a la recta dada.

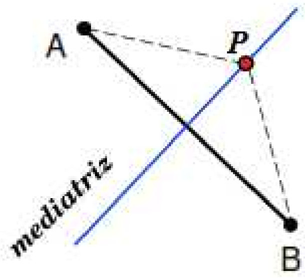


Existen por supuesto una gran variedad de lugares geométricos, y a veces, como en el ejemplo anterior, son figuras reconocibles, y a veces no. En este tema trataremos algunos de ellos:

Mediatriz

La ***mediatriz*** *de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos*

Desde el punto de vista analítico, en el tema anterior habíamos visto la mediatriz como la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. La estudiamos ahora como un conjunto de puntos que cumplen una propiedad, en este caso que las distancias a A y B son iguales.



Ejemplo:

Calcular la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(2,3) y B(4,1)

Solución:

Un punto *P(x,y)* de la mediatriz tiene que cumplir que

$$dist(P,A) = dist(P,B) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right|$$

Como $\overrightarrow{AP} = (x-2, y-3)$, $\overrightarrow{BP} = (x-4, y-1)$, calculando los módulos e igualando:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

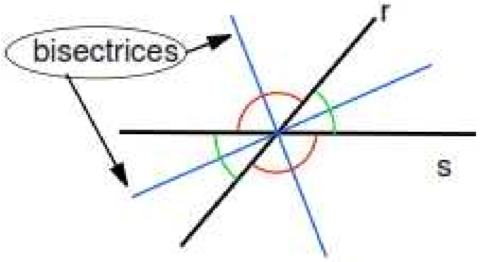
$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y = x^2 + 16 - 8x + y^2 + 1 - 2y \Rightarrow$$
$$4x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

Luego la mediatriz del segmento es la recta $r \equiv x - y - 1 = 0$

Comprobar, como ejercicio, que esta recta es perpendicular al segmento AB y pasa por su punto medio.

Bisectriz

La ***bisectriz*** *es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas que se cortan.*



Este lugar geométrico da lugar a dos rectas, que son precisamente las que dividen en dos partes iguales el ángulo que forman las rectas al cortarse. Además las bisectrices se cortan en el mismo punto de corte de las dos rectas y siempre son perpendiculares entre sí.

Ejemplo:

Calcular la ecuación de las bisectrices del ángulo que forman las rectas $r \equiv x+3y-1=0$, $s \equiv 3x+y+4=0$

Solución:

Por definición de bisectriz, un punto *P(x,y)* de ella tiene que equidistar de *r* y *s*, es decir:

$$dist(P,r) = dist(P,s) \quad \Rightarrow \quad \frac{|x+3y-1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x+y+4|}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad |x+3y-1| = |3x+y+4|$$

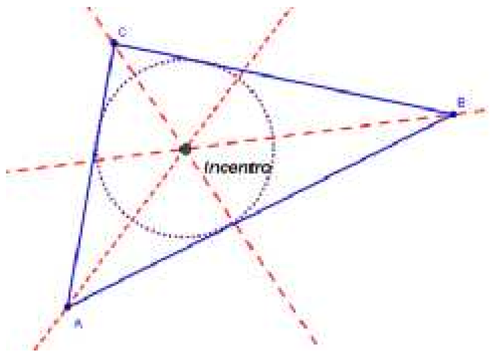
Ecuación con valor absoluto que da lugar a dos ecuaciones:

$$|x+3y-1| = |3x+y+4| \quad \Rightarrow \begin{cases} x+3y-1=3x+y+4 & \Rightarrow \quad 2x-2y+5=0 \\ x+3y-1=-(3x+y+4) & \Rightarrow \quad 4x+4y+3=0 \end{cases}$$

Luego las ecuaciones de las bisectrices son: $b_1 \equiv 2x-2y+5=0$; $b_2 \equiv 4x+4y+3=0$

Como podemos ver por sus vectores normales $\vec{n}_1(2,-2)$, $\vec{n}_2(4,4)$, su producto escalar da 0, lo que confirma que las bisectrices son perpendiculares entre sí.

Nota: *El punto de corte de las bisectrices de los lados de un triángulo se llama* ***incentro****, y coincide con el centro de la circunferencia inscrita al triángulo*



Práctica con Geogebra:

Calcular el incentro del triángulo de vértices A(4,-1), B(8,-4) y C(0,-4)

Ejercicios:

1.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x,y)$ que equidistan de los puntos *A(-1,2)* y *B(-2,1)*

2.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x,y)$ que equidistan de las rectas $r \equiv x+y+1=0$ y $s \equiv 2x+2y+3=0$

3.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x,y)$ cuya distancia al punto *A(3,-1)* es 4

4.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x,y)$ tales que su distancia al punto *A(2,0)* es el doble que su distancia al punto *B(0,-1)*

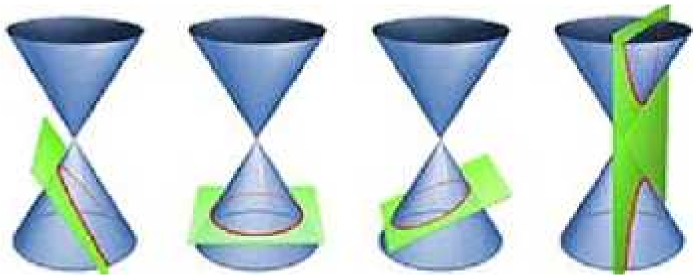
5.- Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas $r \equiv x=3$ y $s \equiv 3x-4y+1=0$

6.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x,y)$ que equidistan del punto *A(3,3)* y de la recta $r \equiv y=1$

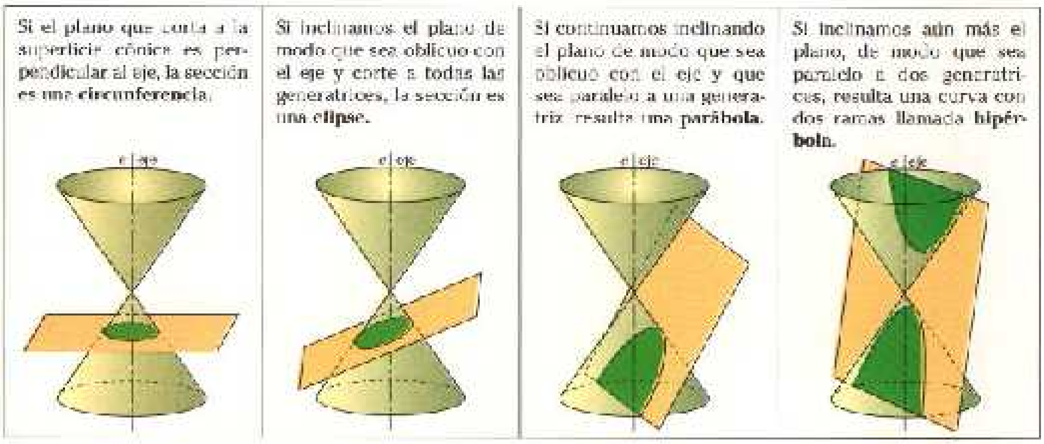
7.- Dados los puntos *A(1,0)* y *B(3,0)*, calcular el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x,y)$ tales que el triángulo APB sea rectángulo en *P*.

2.- LAS CÓNICAS

Ya los antiguos matemáticos griegos como Arquímedes, Menecmo o Euclides (siglo IV a.C.) estudiaron las cónicas como curvas del espacio obtenidas como intersección de un plano con una superficie cónica.



Pero fue el griego Apolonio de Pérgamo, en el siglo III a.C., el que en su tratado de 8 libros "Las Cónicas" realizo un estudio exhaustivo sobre estas curvas y sus propiedades (especialmente las de reflexión) y las nombró como elipse, hipérbola y parábola:



Tan importante fue el trabajo de Apolonio (llamado "el gran geómetra") que se mantuvo prácticamente sin cambios hasta que, en la primera mitad en el siglo XVII, Descartes y Fermat (padres por separado de la Geometría Analítica) relacionaron dichas curvas con sus ecuaciones y viceversa, y poco más tarde el holandés Johan de Witt demostró que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas, permitiendo clasificar y distinguir cada una de ellas.

Las cónicas ocupan pues, por derecho propio, un lugar destacado dentro de la geometría. Son conocidas sus innumerables aplicaciones en física, óptica, astronomía, medicina…

Pero sin duda una de las aportaciones más importantes de las cónicas la realizó el astrónomo alemán Johannes Kepler cuando a principios del siglo XVII descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen en el sol uno de sus focos, y más adelante Isaac Newton demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

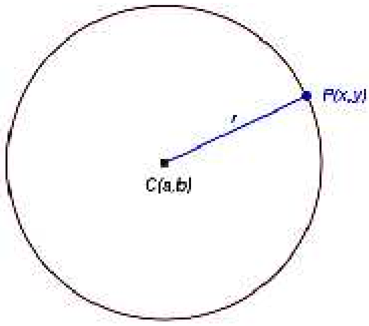
Nosotros no estudiaremos las cónicas como intersecciones de un plano con una superficie cónica, sino que las estudiaremos como lugares geométricos para poder obtener y trabajar con sus ecuaciones.

3.- LA CIRCUNFERENCIA

3.1 Definición y Ecuaciones

La ***circunferencia*** *es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.*

La distancia entre el centro *C(a,b)* y cada punto se llama radio, *r*.



Vamos a obtener su ecuación basándonos en la definición como lugar geométrico:

El punto *P(x,y)* tiene que cumplir que

$dist(P,C)=r \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{CP}\right|=r \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$, y elevando al cuadrado:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

que corresponde a la ***ecuación reducida*** de la circunferencia.

Si desarrollamos los cuadrados:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Y llamando:

$$D=-2a$$
$$E=-2b$$
$$F=a^2+b^2-r^2$$

Obtenemos la ***ecuación general*** de la circunferencia: $\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$

Ejemplo 1:

Calcular las ecuaciones de la circunferencia de centro el punto O(-1,3) y radio 2

Solución:

Con el centro y el radio obtenemos directamente la ecuación reducida: $C\equiv(x+1)^2+(y-3)^2=4$
Para obtener la ecuación general desarrollamos los cuadrados y ordenamos:

$$x^2+1+2x+y^2+9-6y=4 \quad \Rightarrow \quad C\equiv x^2+y^2+2x-6y+6=0$$

Ejemplo 2:

Calcular el centro y el radio de la circunferencia $C\equiv x^2+y^2-4x+2y-4=0$

Solución:

Teniendo en cuenta a qué hemos llamado D, E y F en la ecuación general, podemos obtener fácilmente su centro y su radio:

$$D = -2a \quad \Rightarrow \quad -4 = -2a \quad \Rightarrow \quad a = 2$$
$$E = -2b \quad \Rightarrow \quad 2 = -2b \quad \Rightarrow \quad b = -1$$
$$F = a^2 + b^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = a^2 + b^2 - F = 4 + 1 + 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

Luego se trata de la circunferencia de centro el punto *C(2,-1*) y radio *r = 3*.

<u>Ejercicios:</u>

1.- Calcular la ecuación de la circunferencia de centro O(2,0) y radio 2.

2.- Calcular la ecuación de la circunferencia goniométrica

3.- Calcular la ecuación de la circunferencia de centro el punto *O(3,-2)* y que pasa por el punto *A(0,2)*

4.- Dada la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$, indicar razonadamente si el punto *P(-1,3)* está fuera, dentro o en la circunferencia

5.- Calcular la ecuación de la circunferencia en la que uno de sus diámetros es el segmento de extremos los puntos *A(1,2)* y *B(3,6)*

6.- Halla el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$$
$$C_2 \equiv x^2 + y^2 = 9$$
$$C_3 \equiv 3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y - 12 = 0$$
$$C_4 \equiv 4x^2 - 4x + 4y^2 + 4y = 1$$

7.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A(2,0), B(2,3)* y *C(1,3).*

8.- Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos *A(1,0)* y *B(3,2)*

9.- Calcular la ecuación de la circunferencia de centro el punto *O(2,-1)* y que es tangente a la recta $r \equiv 3x - 4y + 5 = 0$

10.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A(-1,2), B(1,4)* y que tiene su centro en la recta $r \equiv y = 2x$

3.2 Caracterización analítica de una circunferencia

Es importante tener en cuenta que no toda ecuación de segundo grado con dos variables del tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una circunferencia.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ no es una circunferencia, porque tal y como hemos deducido su ecuación, no puede salir negativo el coeficiente de y^2.

Tampoco la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$ corresponde a una circunferencia aunque lo parezca, porque si intentamos calcular sus elementos vemos que no tiene radio.

$$D = -2a \quad \Rightarrow \quad 4 = -2a \quad \Rightarrow \quad a = -2$$
$$E = -2b \quad \Rightarrow \quad -2 = -2b \quad \Rightarrow \quad b = 1$$
$$F = a^2 + b^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = a^2 + b^2 - F = 4 + 1 - 6 = -1 \quad \Rightarrow \quad \nexists\, r$$

Por tanto, para que una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ corresponda a una circunferencia tiene que cumplir:

- ***A = B***
  No tienen que ser necesariamente 1, pero deben ser iguales para poder simplificar la ecuación para obtener el centro y el radio

- ***C = 0***
  Como hemos visto al obtener la ecuación general de la circunferencia, no sale el producto cruzado *xy*

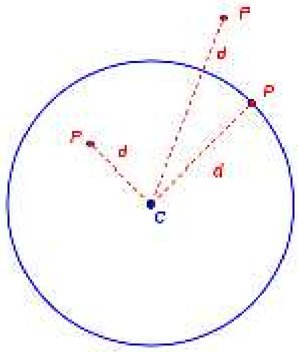
- ***Tiene que tener radio:*** $a^2 + b^2 > F$
  Si despejamos de la fórmula para obtener el radio:
  $$F = a^2 + b^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = a^2 + b^2 - F \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 - F} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 - F > 0$$
  Luego para que el radio tenga sentido: $a^2 + b^2 > F$

Ejercicio:

Comprobar cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una circunferencia, y calcular su centro y su radio:

$a)\ x^2 + y^2 + 3 = 0$	$b)\ x^2 + y^2 - 3x - y - 3 = 0$	$c)\ 4x^2 + 4y^2 - 12x + 2y + 3 = 0$
$d)\ x^2 + 2y^2 - x - y = 0$	$e)\ x^2 + y^2 - 3xy + x + 4y - 1 = 0$	$f)\ 25x^2 + 25y^2 - 9 = 0$
$g)\ 2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$	$h)\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$	$i)\ x^2 - y^2 + 2x + 3y = 1$

3.3 Posición relativa de punto y circunferencia



Respecto a una circunferencia, un punto *P* puede ser interior, exterior o estar en la circunferencia.

Para saberlo basta con medir la distancia del punto *P* al centro de la circunferencia: $d = dist(P,C) = |\overrightarrow{CP}|$ y compararla con el radio de la misma, *r*

Si ***d*** **>** ***r***, el punto será ***exterior***
Si ***d*** **=** ***r***, el punto estará ***en*** la circunferencia
Si ***d*** **<** ***r***, el punto será ***interior*** a la circunferencia

Existe una manera aún más sencilla de estudiar la posición relativa de un punto con respecto a una circunferencia.

Se llama *Potencia del punto P respecto de la circunferencia C* a:

$$Pot_C(P) = d^2 - r^2$$

Obviamente, de la definición se deduce que:

Si $Pot_C(P) > 0 \Rightarrow$ P es exterior
Si $Pot_C(P) = 0 \Rightarrow$ P está en la circunferencia
Si $Pot_C(P) > 0 \Rightarrow$ P es exterior

Aparentemente, habría que calcular los mismos datos que antes, pero ahora bien, como

$$d = dist(P,C) = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}$$

Al elevarlo al cuadrado obtenemos:

$$Pot_C(P) = d^2 - r^2 = (p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 - r^2$$

Que es precisamente la ecuación de la circunferencia al sustituir el punto $P(p_1, p_2)$ en ella.

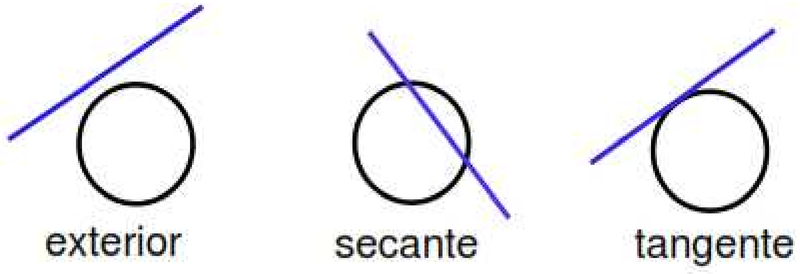
Luego basta con calcular la potencia de un punto respecto a una circunferencia sustituyendo en la ecuación de ésta las coordenadas del punto, y si sale positivo el punto será exterior, si sale negativo será interior y si sale 0 estará en la circunferencia.

Ejercicio:

Usando la potencia, estudiar la posición de los puntos *P(-1,2), Q(3,-2)* y *R(0,-1)* respecto a la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

3.4 Posición relativa de recta y circunferencia

Una recta puede cortar a una circunferencia en un punto, en dos o en ninguno, de modo que diríamos que la recta es ***tangente, secante*** o ***exterior*** a la circunferencia:



Una forma de estudiar la posición de una recta y una circunferencia es simplemente resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones (la de la recta y la de la circunferencia) y en función de las soluciones del sistema analizar la posición.

Otra opción es comparar la distancia entre el centro de la circunferencia y la recta, *s*, con el radio de ésta, de manera que:

Si $dist(C,s) < r \;\Rightarrow$ la recta es secante a la circunferencia

Si $dist(C,s) = r \;\Rightarrow$ la recta es tangente a la circunferencia

Si $dist(C,s) > r \;\Rightarrow$ la recta es exterior a la circunferencia

Esta segunda opción es más rápida pero a cambio no nos da los posibles puntos de corte entre la recta y la circunferencia, luego si los necesitásemos tendríamos igualmente que resolver el sistema.

Ejemplo:

Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv x + y + 1 = 0$ y la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

Solución:

Vamos a hacerlo primero resolviendo el sistema (por sustitución):

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \rightarrow \; x = -1 - y \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \; (-1-y)^2 + y^2 + 2(-1-y) + 6y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \; 1 + y^2 + 2y + y^2 - 2 - 2y + 6y + 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 2y^2 + 6y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y = 0 \;,\; y = -3$$

Luego la recta es secante a la circunferencia y la corta en los puntos *(-1,0)* y *(2,-3)*

Vamos a hacerlo ahora usando el centro y el radio de la circunferencia, que fácilmente se obtiene que son *C(-1,-3)* y *r = 3*

Calculamos la distancia del centro a la recta *r*:

$dist\left(C,r\right)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\approx 2'12$, y como esa distancia es menor que el radio (3), la recta es secante a la circunferencia.

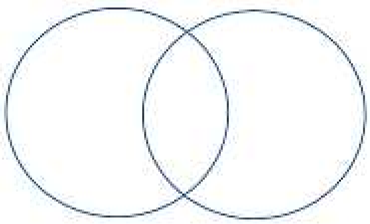
Ejercicio:

Estudiar la posición de la circunferencia $C\equiv x^2+y^2-6x-4y+9=0$ respecto a las rectas siguientes:

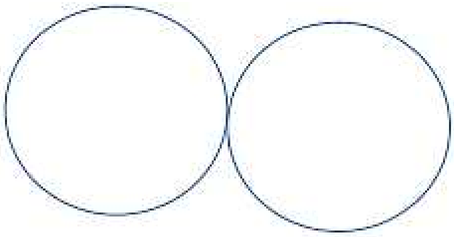
$a)\, r\equiv 2x-y-2=0$ $\qquad b)\, s\equiv\begin{cases} x=1+a \\ y=-a \end{cases}$ $\qquad c)\, t\equiv 3x-4y+9=0$

<u>3.5 Posición relativa de dos circunferencias</u>

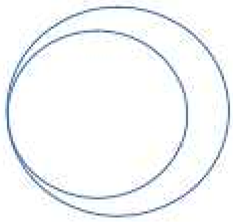
Dos circunferencias pueden ser:



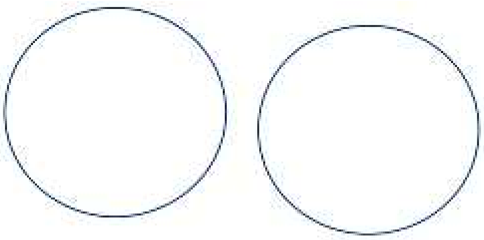
Secantes



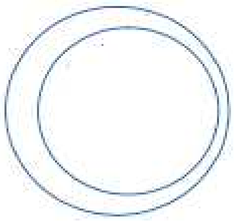
Tangentes Exteriores



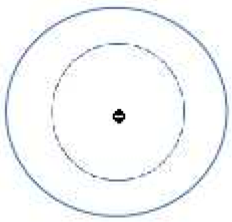
Tangentes Interiores



Exteriores



Interiores



Concéntricas

En el caso de que las circunferencias sean concéntricas, no es necesario hacer ningún cálculo pues al tener el mismo centro todos los coeficientes de su ecuación general serán iguales (o proporcionales) a excepción claro del término independiente *F*. Así, por ejemplo, las circunferencias

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$
$$C_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

son concéntricas (es fácil ver que el centro de ambas es el punto (2,3) y los radios son 3 y 5 respectivamente).

Para estudiar las demás posiciones hay que resolver el sistema que forman las dos ecuaciones. Para ello usaremos el método de ***reducción-sustitución***, que consiste en restar primero ambas ecuaciones para que se vayan los cuadrados y despejar una incógnita en la ecuación resultante para sustituirla en una de las circunferencias.

Si el sistema tiene dos soluciones serán secantes, si tiene una solución serán tangentes (exteriores o interiores), y si no tiene solución serán o bien exteriores o bien interiores.

Tanto en este último caso, como en el caso de tangencia, para distinguir si son exteriores o interiores, calculamos la distancia entre los centros de ambas circunferencias. Si dicha distancia es menor que el mayor de los dos radios, serán interiores, mientras que si dicha distancia es mayor que el mayor de los dos radios, serán exteriores.

En resumen:

Dos soluciones $\longrightarrow$ ***secantes***

Una solución
- $dist(O_1, O_2) > r_{máx} \longrightarrow$ ***tangentes exteriores***
- $dist(O_1, O_2) < r_{máx} \longrightarrow$ ***tangentes interiores***

Ninguna solución
- $dist(O_1, O_2) > r_{máx} \longrightarrow$ ***exteriores***
- $dist(O_1, O_2) < r_{máx} \longrightarrow$ ***interiores***

Ejemplo 1:

Estudiar la posición relativa de las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$

Solución:

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-6x-12y+35=0 \\ x^2+y^2-25=0 \end{array}\right\} \text{ restando } \Rightarrow -6x-12y+60=0 \quad \Rightarrow \quad x+2y-10=0$$

Despejando: $x=10-2y$

Sustituyendo por ejemplo en la segunda ecuación:

$$(10-2y)^2+y^2-25=0 \quad \Rightarrow \quad 100+4y^2-40y+y^2-25=0 \quad \Rightarrow \quad 5y^2-40y+75=0$$

$$\Rightarrow \quad y^2-8y+15=0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=5 \ , \ x=0 \\ y=3 \ , \ x=4 \end{array}\right.$$

Luego las dos circunferencias son secantes y se cortan en los puntos (*0,5)* y *(4,3)*

Ejemplo 2:

Estudiar la posición relativa de las circunferencias $C_1 \equiv x^2+y^2-6x+2y-8=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2-8x+8=0$

Solución:

De nuevo resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-6x+2y-8=0 \\ x^2+y^2-8x+8=0 \end{array}\right\} \text{ restando } \Rightarrow 2x+2y-16=0 \quad \Rightarrow \quad x+y-8=0$$

Despejando: $x=8-y$

Sustituyendo por ejemplo en la segunda ecuación:

$$(8-y)^2+y^2-8(8-y)+8=0 \quad \Rightarrow \quad 64+y^2-16y+y^2-64+8y+8=0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2-8y+8=0$$

$$\Rightarrow \quad y^2-4y+4=0 \quad \Rightarrow y=2 \ , x=6$$

Luego se cortan en un punto y por tanto son tangentes.

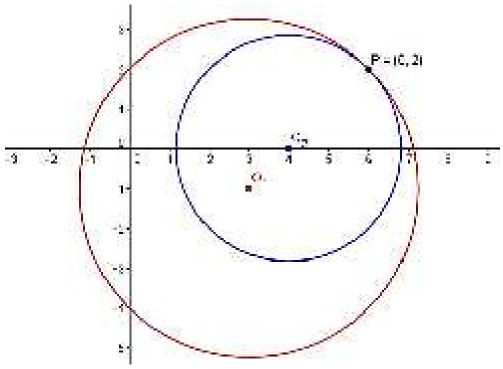
Para distinguir si son exteriores o interiores calculamos los centros y los radios:

$$C_1 \equiv x^2+y^2-6x+2y-8=0 \quad \Rightarrow \quad O_1(3,-1) \ , r_1=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$C_2 \equiv x^2+y^2-8x+8=0 \quad \Rightarrow O_2(4,0) \ , \ r_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Calculamos la distancia entre los centros: $dist\left(O_1,O_2\right)=\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|=\left|\left(1,1\right)\right|=\sqrt{2}$

Como $\sqrt{2}<3\sqrt{2}\ (r_{máx})$, las circunferencias son tangentes interiores



Ejercicio:

Estudiar la posición relativa de las siguientes parejas de circunferencias:

$a)\,C_1\equiv x^2+y^2-6x-4y+9=0\ ;\ C_2\equiv x^2+y^2-6x+2y+9=0$
$b)\,C_1\equiv O_1\left(1,-2\right),r_1=2\quad ;C_2\equiv x^2+y^2-4y+3=0$
$c)\,C_1\equiv O_1\left(-2,1\right),r_1=3\quad ;C_2\equiv x^2+y^2+4x-2y-20=0$
$d)\,C_1\equiv x^2+y^2-6x+2y+6=0\ ;\ C_2\equiv x^2+y^2-8x+4y+4=0$

<u>Ejercicios de Circunferencia</u>

1.- a) Halla el área del círculo delimitado por la circunferencia $C\equiv 2x^2+2y^2-12x-8y+8=0$

b) Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica a la anterior y de doble radio

2.- Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $r\equiv 4x+3y-25=0$ y cuyo centro es el punto de corte de las rectas $s\equiv 3x-y-7=0$, $t\equiv 2x+3y-1=0$

3.- Calcula la longitud de la cuerda común a las circunferencias $C_1\equiv x^2+y^2=7\ ;\ C_2\equiv x^2+y^2+6x+5=0$

4.- Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $C\equiv x^2+y^2-6x-4y-12=0$ en el punto de tangencia *P(6,-2)*

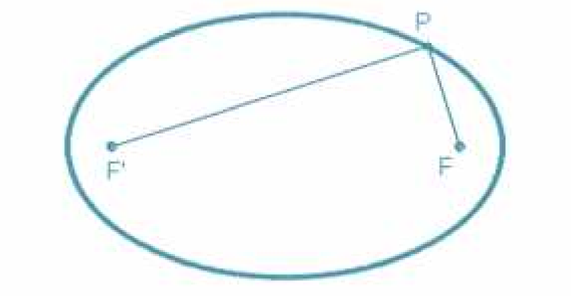
5.- Calcula cuánto debe valer *m* para que la recta $r\equiv y=x+m$ sea tangente a la circunferencia $C\equiv x^2+y^2=2$ y calcula el punto de tangencia

6.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto a las circunferencias $C_1\equiv x^2+y^2-4x+6y+4=0\ ;\ C_2\equiv x^2+y^2-2x-2y-2=0$

4.- LA ELIPSE

4.1 Definición y Elementos

*La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante*

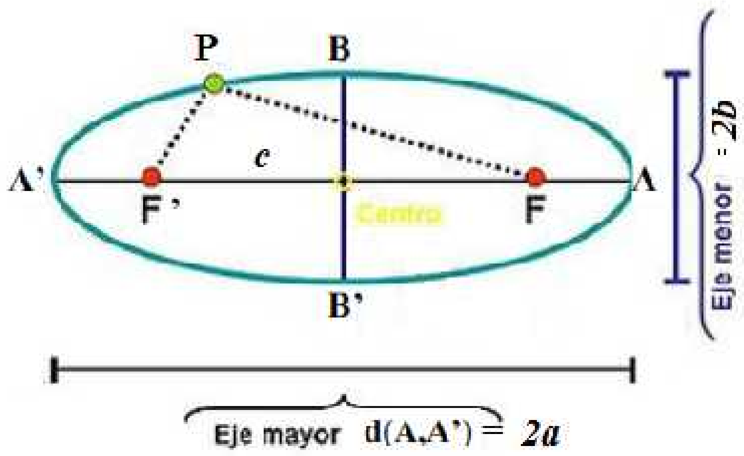


Para cualquier punto P de la elipse se cumple:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = constante$$

Elementos:

- *Focos:* los puntos fijos F y F'
- *Eje focal:* recta que pasa por los focos
- *Eje secundario:* mediatriz del segmento FF'
- *Centro:* punto medio de F y F' (o punto de corte entre los ejes)
- *Distancia focal:* longitud de F a F'. Le llamamos $2c$
- *Vértices:* puntos de corte de la elipse con sus ejes: A, A'(con el eje focal), B y B' (con el eje secundario)
- *Eje o diámetro mayor:* longitud de A a A'. Le llamamos $2a$
- *Eje o diámetro menor:* longitud de B a B'. Le llamamos $2b$



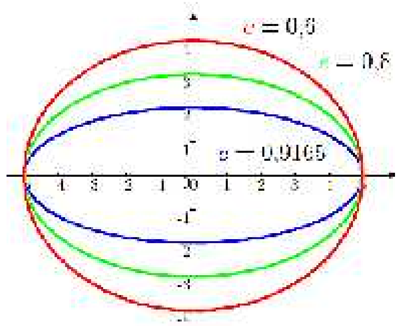
Otro elemento importante en la elipse es la ***excentricidad***, que se define como:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como por definición $a > c$, la excentricidad va a ser siempre menor que 1, es decir $0 < e < 1$
Veamos qué significa la excentricidad en la elipse:

Si fuese 0 $\Rightarrow c = 0$, y por tanto los dos focos serían el mismo lo que significaría que la elipse es en realidad una circunferencia.
Si fuese 1 $\Rightarrow a = c$, luego los focos estarían sobre los vértices A y A' y la elipse sería en realidad el segmento que los une.

Luego *la excentricidad mide lo achatada que es la elipse*: cuanto más cercana a 0, más redonda (menos chata), y cuanto más cercana a 1, más chata.



4.2 Relaciones entre los elementos de la elipse

Hemos visto que cualquier punto de la elipse tiene que cumplir $\overline{PF} + \overline{PF'} = constante$

Como el vértice A es también un punto de la elipse, cumplirá: $\overline{AF} + \overline{AF'} = constante$

Si desarrollamos, y por la propia simetría de la elipse respecto a su centro:

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{AF} + \overline{AF} + \overline{FF'} = \overline{A'F'} + \overline{AF} + \overline{FF'} = 2a$$

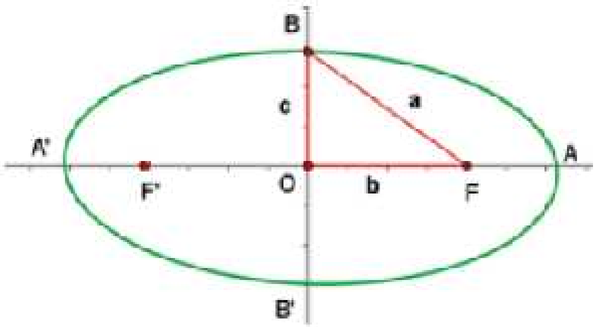
Luego la suma de distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos no sólo es constante sino que coincide con el diámetro mayor de la elipse:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Por otra parte, *B* también es un punto de la elipse, luego debe cumplir lo anterior:

$\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$, y como por simetría $\overline{BF} = \overline{BF'} \Rightarrow 2\overline{BF} = 2a \Rightarrow \overline{BF} = a$

Visto gráficamente:



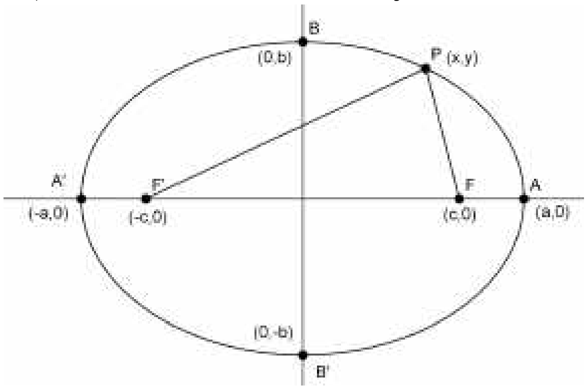
Lo que permite además, usando el Teorema de Pitágoras, establecer la relación existente entre las distancias de una elipse:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

4.3 Ecuación de la elipse

Para que todo el proceso analítico sea más sencillo, vamos a trabajar a partir de ahora sólo con elipse horizontales cuyo centro está en el origen de coordenadas y cuyos ejes coinciden con el eje X (el eje focal) y el eje Y (eje secundario). De esta manera sus focos y vértices serán:

Focos: *F(c,0), F'(.c,0)*
Vértices: *A(a,0), A'(-a,0)*
B(0,b), B'(0,-b)



Si aplicamos la definición de la elipse como lugar geométrico, un punto *P(x,y)* debe cumplir:

$$\overline{FP}+\overline{F'P}=2a$$

Como

$$\overrightarrow{FP}=\left(x-c,0\right) \Rightarrow \overline{FP}=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{F'P}=\left(x+c,0\right) \Rightarrow \overline{F'P}=\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}$$

Sustituyendo: $\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=2a$

Dejando una raíz sola, elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\left(\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x-c\right)^2+\cancel{y^2}=4a^2+\left(x+c\right)^2+\cancel{y^2}-4a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=\left(x+c\right)^2-\left(x-c\right)^2+4a^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx-\cancel{x^2}-\cancel{c^2}+2cx+4a^2=4cx+4a^2$$

$$\Rightarrow a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=cx+a^2$$

Volviendo a elevar al cuadrado:

$$a^2\left(\left(x+c\right)^2+y^2\right)=\left(cx+a^2\right)^2 \quad \Rightarrow a^2x^2+a^2c^2+\cancel{2a^2cx}+a^2y^2=c^2x^2+a^4+\cancel{2a^2cx}$$

$$\Rightarrow a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

Sacando factor común: $\left(a^2-c^2\right)x^2+y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$

Como, por la relación existente entre las distancias de la elipse $b^2 = a^2 - c^2$

Sustituyendo: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Dividimos por último por $a^2 b^2$ y obtenemos la ***ecuación reducida de la elipse***:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Luego para calcular la ecuación de una elipse basta conocer sus diámetros mayor y menor (o la distancia focal y un diámetro y usar la relación existente entre ellas para calcular el otro).

Nota: *Si la elipse es vertical, basta con cambiar x por y en su ecuación y sería* $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$*, pero no vamos a trabajar con este tipo de elipses.*

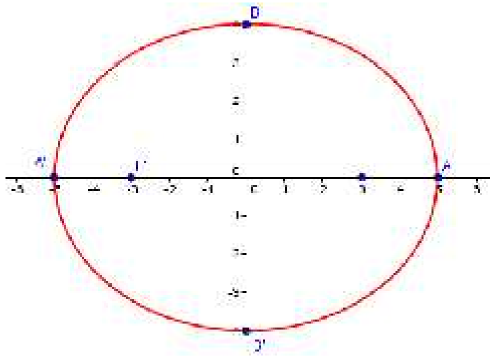
Ejemplo 1:

Calcular la ecuación y los elementos de la elipse que tiene un foco en el punto (3,0) y cuyo eje mayor mide 10

Solución:

El foco es *F(3,0)* y por tanto *c = 3*

Como el eje mayor mide *2a*, entonces *a = 5*



Sacamos *b*: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$

Luego la ecuación es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Y sus elementos serán:

Focos: *F(3,0), F'(-3,0)*

Vértices: *A(5,0), A'(-5,0), B(0,4), B'(0,-4)*

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0'6$

Ejemplo 2:

Calcular los elementos de la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$

Solución:

Primero obtenemos la ecuación reducida dividiendo por 144:

$$9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

De donde $a = 4$, $b = 3$
Sacamos c: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}$

Y por tanto sus elementos serán:

Focos: $F\left(\sqrt{7},0\right), F'\left(-\sqrt{7},0\right)$

Vértices: $A(4,0)$, $A'(-4,0)$, $B(0,3)$, $B'(0,-3)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0'66$

Ejercicios:

1.- Calcular la ecuación y los elementos de la elipse de distancia focal 12 y semieje mayor 10

2.- Calcular los elementos de las elipses:

$$a)\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1 \qquad b)2x^2+6y^2-12=0 \qquad c)x^2+4y^2=9$$

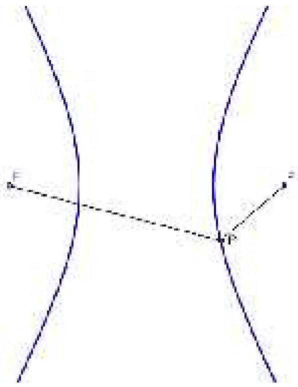
3.- Calcular la ecuación y los elementos de la elipse de excentricidad $0'8$ y que tiene un vértice en el punto $(-5,0)$

4.- Calcular la ecuación y los elementos de la elipse de excentricidad $\frac{2}{3}$ y que tiene pasa por el punto $\left(0,2\sqrt{5}\right)$

5.- LA HIPÉRBOLA

5.1 Definición y Elementos

La **hipérbola** *es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante*

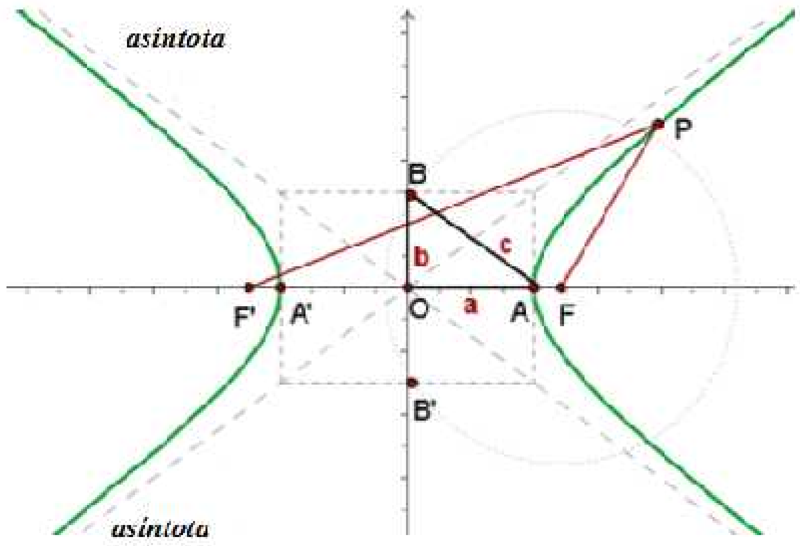


Para cualquier punto *P* de la elipse se cumple:

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \text{constante}$$

Elementos:

- *Focos:* los puntos fijos *F* y *F'*
- *Eje focal:* recta que pasa por los focos
- *Eje secundario o imaginario:* mediatriz del segmento *FF'*
- *Centro:* punto medio de *F* y *F'* (o punto de corte entre los ejes)
- *Distancia focal:* longitud de *F* a *F'*. Le llamamos *2c*
- *Vértices A y A':* puntos de corte de la hipérbola con el eje focal
- *Vértices B y B':* puntos de corte del eje imaginario con la circunferencia de centro uno de los focos y radio *c*
- *Eje o diámetro mayor:* longitud de *A* a *A'*. Le llamamos *2a*
- *Eje o diámetro menor:* longitud de *B* a *B'*. Le llamamos *2b*
- *Asíntotas:* rectas que pasan por el centro y por los puntos *C(a,b)* y *C'(-a,b)*

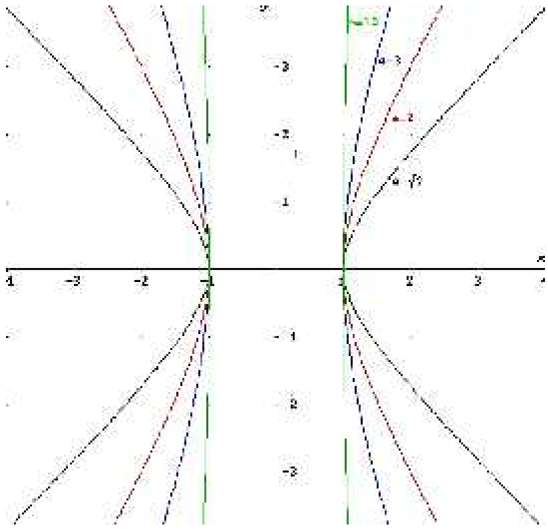


De nuevo otro elemento importante en la hipérbola es la ***excentricidad***, que se define como:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como $c > a \Rightarrow e > 1$

Si la excentricidad se acerca a uno, los focos están cerca de los vértices y las ramas de la hipérbola se van cerrando (si *e* fuese uno, *c* = *a*, la hipérbola serían dos semirrectas con los focos como extremos), mientras que cuanto más se alejen los focos de los vértices más se abren las ramas de la hipérbola hasta llegar a ser casi dos rectas verticales.



Luego la excentricidad mide la abertura de las ramas de la hipérbola: cuanto más grande, más abiertas, cuanto más próxima a 1, más cerradas.

<u>*5.2 Relaciones entre los elementos de la hipérbola*</u>

Hemos visto que cualquier punto de la hipérbola tiene que cumplir $\overline{PF'} - \overline{PF} = \text{constante}$

Como el vértice A es también un punto de la hipérbola, cumplirá: $\overline{AF'} - \overline{AF} = \text{constante}$

Si desarrollamos, y por la propia simetría de la hipérbola respecto a su centro:

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = \overline{AA'} + \overline{A'F'} - \overline{AF} = \overline{AA'} = 2a$$

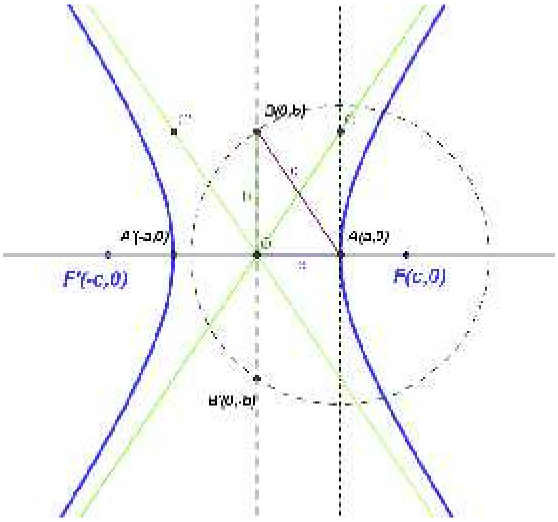
Luego la diferencia de distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos focos no sólo es constante sino que coincide con el eje mayor de la elipse:

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

Por otra parte, y por la propia construcción del vértice *B* y aplicando Pitágoras se observa que:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

5.3 Ecuación de la hipérbola



Al igual que hicimos con la elipse, vamos a trabajar a partir de ahora sólo con hipérbolas cuyo centro está en el origen de coordenadas y cuyos ejes coinciden con el eje X (el eje focal) y el eje Y (eje imaginario). De esta manera sus focos y vértices serán (igual que en la elipse)

Focos: *F(c,0), F'(.c,0)*

Vértices: *A(a,0), A'(-a,0)*
B(0,b), B'(0,-b)

Asíntotas: $y=\frac{b}{a}x \;\; ; \;\; y=-\frac{b}{a}x$ (comprobarlo)

Si aplicamos la definición de la hipérbola como lugar geométrico, un punto *P(x,y)* debe cumplir:

$$\overline{F'P}+\overline{FP}=2a$$

Como

$$\overrightarrow{FP}=\left(x-c,0\right) \Rightarrow \overline{FP}=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{F'P}=\left(x+c,0\right) \Rightarrow \overline{F'P}=\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}$$

Sustituyendo: $\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}=2a$

Volviendo a desarrollar, como ya hiciéramos con la elipse, obtendremos la ***ecuación reducida de la hipérbola*** (hacer como ejercicio):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Notas:

- *Si en una hipérbola se cumple a = b, se llama* ***hipérbola equilátera****. En este caso las asíntotas son y = x, y = -x (las bisectrices de los cuadrantes y perpendiculares entre sí), y la excentricidad es* $e=\sqrt{2}$*, puesto que:*

$$c^2=a^2+b^2=2a^2 \;\Rightarrow c=a\sqrt{2} \;\;\Rightarrow\;\; e=\frac{c}{a}=\frac{\cancel{a}\sqrt{2}}{\cancel{a}}=\sqrt{2}$$

- *Si la hipérbola es vertical, al igual que pasaba con la elipse, basta con cambiar x por y en su ecuación y sería* $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$*, pero no vamos a trabajar con este tipo de hipérbolas.*

Ejemplo 1:

Calcular la ecuación y los elementos de la hipérbola que tiene un foco en el punto (5,0) y cuya diferencia de distancias a los focos es 6

Solución:

Como *F(5,0)*, tenemos que *c = 5*
Además *2a = 6*, luego *a = 3*
Despejamos *b:* $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$

Por tanto la ecuación de la hipérbola será: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Y sus elementos serán:

Focos: *F(5,0), F'(-5,0)*

Vértices: *A(3,0), A'(-3,0), B(0,4), B'(0,-4)*

Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x \quad ; \quad y = -\frac{4}{3}x$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1'67$

Ejemplo 2:

Calcular los elementos de la hipérbola de ecuación $3x^2 - y^2 = 12$

Solución:

Primero obtenemos la ecuación reducida dividiendo por 12:

$$3x^2 - y^2 = 12 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

De donde $a = 2$, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Y por tanto: $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4$

Y sus elementos serán:

Focos: *F(4,0), F'(-4,0)*

Vértices: *A(2,0), A'(-2,0), B(0,* $2\sqrt{3}$ *), B'(0,-* $-2\sqrt{3}$ *)*

Asíntotas: $y = \sqrt{3}\,x \quad ; \quad y = -\sqrt{3}\,x$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

Ejercicios:

1.- Calcular la ecuación y los elementos de la hipérbola que tiene un vértice en el punto *(0,4)* y cuya distancia focal es 10

2.- Calcular la ecuación y los elementos de la hipérbola de excentricidad *2* y semieje mayor 10

2.- Calcular los elementos de las elipses:

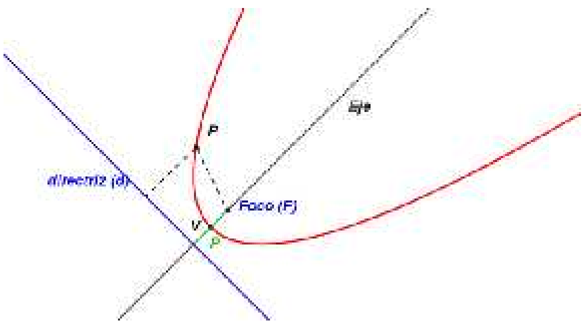
$$a)\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1 \qquad b)2x^2-6y^2-12=0 \qquad c)x^2-y^2=9$$

4.- Calcular la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto *P(-5,3)*

6.- LA PARÁBOLA

6.1 Definición y Elementos

La ***parábola*** *es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto y una recta*



Elementos:

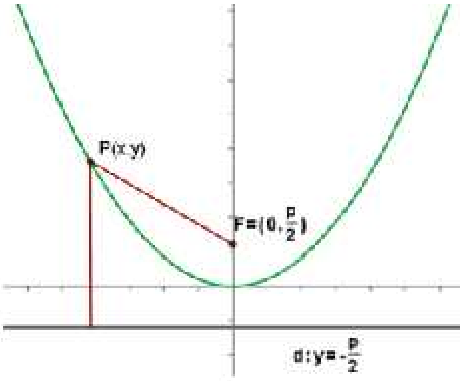
- *Foco:* el punto fijo *F*
- *Directriz: la recta d*
- *Eje:* recta perpendicular a *d* que pasa por *F*
- *Vértice:* punto de corte de la parábola con su eje, V
- *Parámetro:* distancia del foco a la directriz, *p*

6.2 Ecuación de la parábola

Para simplificar, vamos a estudiar las parábolas cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas *(0,0)* y su eje con uno de los ejes (el de abscisas o el de ordenadas). Es decir, trabajaremos con parábolas *verticales* u *horizontales*:

6.2.1 Parábolas con eje el eje de ordenadas (Verticales)

a) Foco en la parte positiva del eje OY (vertical hacia arriba)



Foco: $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$

Directriz: $d \equiv y = -\dfrac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad d \equiv y + \dfrac{p}{2} = 0$

Calculamos las distancias de un punto P(x.y) al foco y a la directriz:

$$d(P,F) = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\left(x, y-\frac{p}{2}\right)\right| = \sqrt{x^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$d(P,d) = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

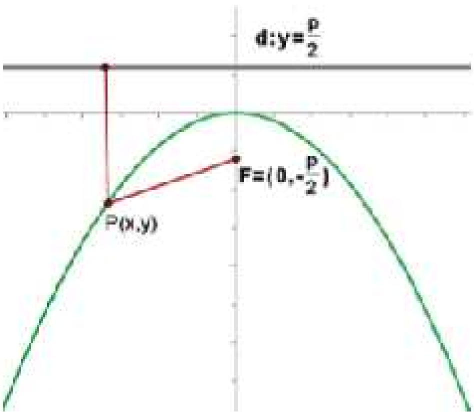
Por definición: $d\left(P,F\right) = d\left(P,d\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + \left(y-\dfrac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \dfrac{p}{2}\right|$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\left(\sqrt{x^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\left|y+\frac{p}{2}\right|\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \cancel{y^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} - py = \cancel{y^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} + py$$

$\Rightarrow \qquad \boxed{x^2 = 2py}$ que es la ***ecuación reducida*** de estas parábolas

b) Foco en la parte negativa del eje OY (vertical hacia abajo)



Foco: $F\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$

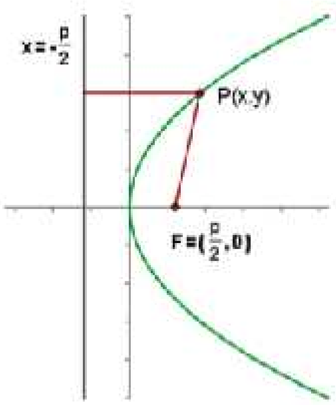
Directriz: $d \equiv y = \dfrac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad d \equiv y - \dfrac{p}{2} = 0$

Queda como ejercicio demostrar que en este caso la ecuación reducida es:

$$\boxed{x^2 = -2py}$$

6.2.2 Parábolas con eje el eje de abscisas (Horizontales)

a) Foco en la parte positiva del eje OX (horizontal hacia la derecha)



Foco: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

Directriz: $d \equiv x = -\frac{p}{2} \Rightarrow d \equiv x + \frac{p}{2} = 0$

Calculamos las distancias de un punto P(x.y) al foco y a la directriz:

$$d(P,F) = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\left(x-\frac{p}{2},y\right)\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d(P,d) = \left|x+\frac{p}{2}\right|$$

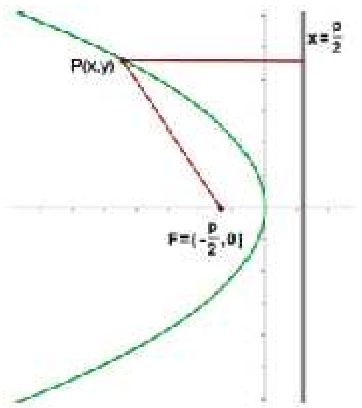
Por definición: $d(P,F) = d(P,d) \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\left(\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\left|x+\frac{p}{2}\right|\right)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} - px + y^2 = \cancel{x^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} + px$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y^2 = 2px}$ que es la ***ecuación reducida*** de estas parábolas

b) Foco en la parte negativa del eje OX (horizontal hacia la izquierda)



Foco: $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$

Directriz: $d \equiv x = \frac{p}{2} \Rightarrow d \equiv x - \frac{p}{2} = 0$

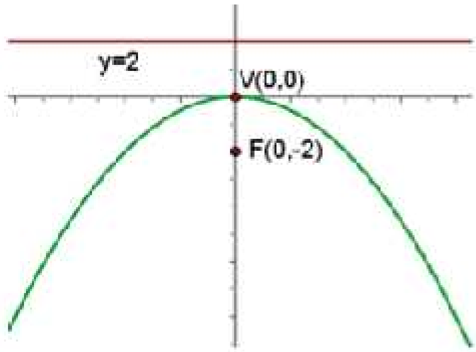
Queda como ejercicio demostrar que en este caso la ecuación reducida es:

$$\boxed{y^2 = -2px}$$

Ejemplo 1:

Calcular la ecuación y los elementos de la parábola de foco el punto (0,-2)

Solución:



Se trata de una parábola vertical hacia abajo, luego su directriz será la recta $y = 2$

El parámetro es la distancia del foco a la directriz, es decir, $p = 4$

Luego su ecuación será:

$$x^2 = -2py \quad \Rightarrow \quad x^2 = -8y$$

Ejemplo 2:

Calcular los elementos de la parábola $y^2 = -3x$

Solución:

Por su ecuación se trata de una parábola horizontal hacia la izquierda.

Además: $2p = 3 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{2}$. Por tanto:

Foco: $F\left(-\frac{p}{2},0\right) \Rightarrow F\left(-\frac{3}{4},0\right)$

Directriz: $d \equiv x = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad d \equiv x = \frac{3}{4}$

Ejercicios:

1.- Calcular la ecuación y los elementos de la parábola de foco el punto *(0,4)*

2.- Calcular los elementos de las parábolas $a)\ y^2 + 10x = 0 \qquad b)\ 3x^2 + 9y = 0$

3.- Calcular la ecuación y los elementos de la parábola de directriz la recta $y = 3$

4.- Calcular la ecuación de la parábola de foco el punto (2,1) y directriz la recta $y = x$
(Ojo: es oblicua, y por tanto sólo se puede calcular su ecuación usando la definición)

5.- Calcular la ecuación y los elementos de la parábola de eje el eje de abscisas y que pasa por el punto *P(4,2)*

Ejercicios de Cónicas

1.- Calcular la ecuación y los elementos de la elipse que pasa por el punto *(0,4)* y cuyo eje mayor mide 10

2.- Calcular la ecuación y los elementos de la hipérbola que tiene un vértice en *(0,3)* y que pasa por el punto $P\left(5,\frac{9}{4}\right)$

3.- Calcular m para que la cónica $2x^2 + my^2 = 16$ sea una hipérbola equilátera y calcular sus elementos

4.- Calcular la ecuación de la parábola de foco el origen de coordenadas y directriz la recta $r \equiv 4x - 3y + 1 = 0$

5.- Clasificar las siguientes cónicas y calcular sus elementos:

$a)\ x^2 - y^2 = 4$

$b)\ x^2 + y^2 = 4$

$c)\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$

$d)\ x^2 = 10y$

$e)\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$

$f)\ y^2 + 4x = 0$

$g)\ -x^2 + 9y^2 = -9$

$h)\ x^2 - 4y^2 = 16$

$i)\ 4x^2 + 4y^2 = 9$

$j)\ 16x^2 + 25y^2 = 400$

$k)\ 6y^2 + 2x = 0$

$l)\ x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

$m)\ 4x^2 + 5y^2 = 20$

$n)\ 8x^2 - 9y^2 = 72$

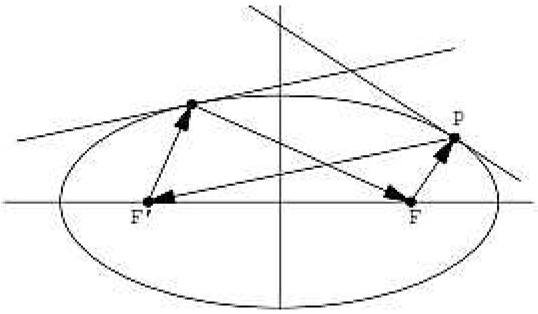
$o)\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 4$

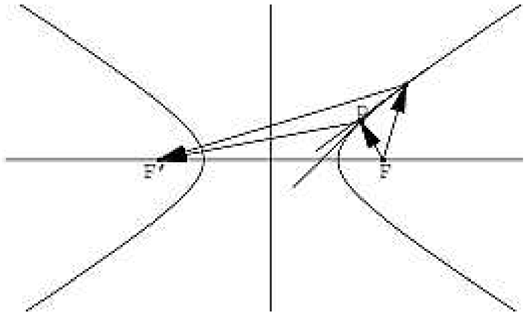
$p)\ x + 4y^2 = 0$

APÉNDICE

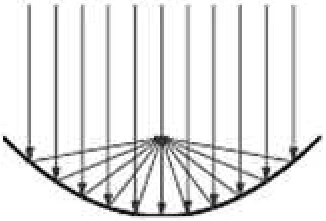
Propiedades Reflexivas de las Cónicas

- En la elipse y en la hipérbola, los rayos que parten de un foco al reflejarse en la cónica siguen la dirección hacia el otro foco:



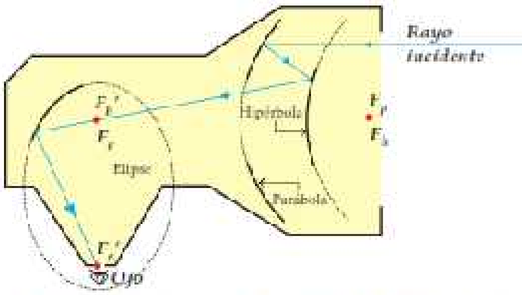


- En la parábola, todos los rayos que provienen de la misma dirección convergen en el foco. También al revés, es decir, los rayos provenientes del foco al reflejarse en la parábola siguen una dirección paralela al eje de ésta



Cónicas en la vida real

- Los cables de los puentes colgantes, las trayectorias de los proyectiles o de los chorros de agua de un surtidor, los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos tienen formas parabólicas.



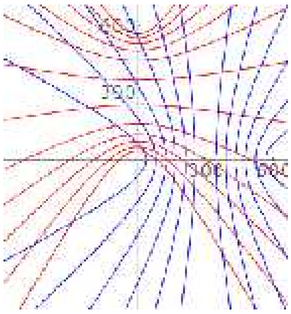
Propiedad de las tres cónicas utilizadas en el diseño de un telescopio.

Por ejemplo, en los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en la lámpara, salen formando rayos paralelos

- Es de sobra conocido que los planetas y los satélites describen órbitas elípticas. Por ejemplo, la órbita de la Tierra alrededor del Sol tiene una excentricidad aproximada de 0’0167, mientras que la del cometa Halley es aproximadamente de 0’9675

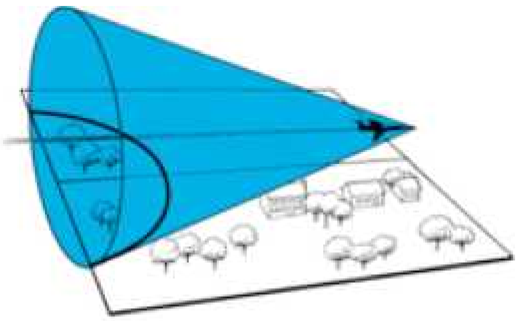
- Hoy en día en medicina se utiliza un tratamiento revolucionario y poco agresivo para el tratamiento de las piedras de riñón, usando una cámara semielipsoidal. A grandes rasgos genera energía en un foco de la elipse y la enfoca hacia el otro foco donde se encuentra la piedra, provocando su destrucción.

- El sistema de navegación Loran (Long range navigation) para aviones y barcos se basa en las intersecciones de hipérbolas para conocer con exactitud su situación



- En Óptica y en propagación de ondas se utilizan lentes elípticas

- En aeronáutica se usan las hipérbolas para, por ejemplo, determinar la región de la superficie terrestre en donde en un momento determinado se oye o se ha oído el motor de un avión



EJERCICIOS

1.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos *(1,1)* y *(5,3)*

2.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas $r \equiv x+y+1=0 \quad ; \quad s \equiv 2x+2y+4=0$. ¿Qué es?

3.- Calcula la mediatriz del segmento de extremos *A(2,-3)* y *B(-4,1)*

4.- Calcula las bisectrices de las rectas $r \equiv y = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad , \quad s \equiv y = 2x+1$

5.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a *A(2,0)* es el doble que al *B(-1,0)*. ¿Qué es?

6.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto *A(8,0)* es el doble que a la recta $r \equiv x = 2$. ¿Qué es?

7.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano *P(x,y)* tales que los vectores que los unen con los puntos *A(2,1)* y *B(-6,1)* sean ortogonales. ¿Qué es?

8.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos *A(-3,1)* y *B(0,1)* es 2. ¿Qué es?

9.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de las distancias a los puntos *A(-4,0)* y *B(4,0)* es 40. ¿Qué es?

10.- Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ es igual a $2\sqrt{2}$. ¿Qué es?

11.- Halla las ecuaciones de las circunferencias:
a) de centro *C(2,0)* y radio 3
b) de centro *C(0,2)* y radio 3
c) de centro *C(-2,3)* y radio 4

12.- Halla el centro y el radio de las circunferencias:
a) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$; b) $x^2+y^2-2y-8=0$; c) $x^2+y^2-2x-6y+6=0$.

13.- Dadas las ecuaciones de segundo grado siguientes, determinar cuáles son ecuaciones de circunferencia y hallar, en su caso, centro y radio.
a) $x^2-y^2-4x-4y+2=0$
b) $2x^2+2y^2-2x-2y-1=0$
c) $x^2+y^2-4x-2y= - 1$
d) $x^2+y^2-xy+x-1=0$

14.- Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es el punto *C(2,3)*

15.- Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de centro *C(-1,3)* en el punto de tangencia *(2,5).*

16.- Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A(2,3), B(0,-1)* y *C(-1,0)*

17.- ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro es *C(-1,3)* y pasa por el punto *P(-2,1)*?

18.- Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos *A(1,1)* y *B(3,-1)*

19.- ¿Qué posiciones ocupan los puntos *A(-1,0), B(3,3), C=(2,2), D=(5,-1)* respecto a la circunferencia: $x^2+y^2-6x-2y+6=0$?

20.- Halla la ecuación de la circunferencia de centro *C(1,2)* y tangente a la recta $r \equiv y = -2x+9$

21.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A(4,3)* y *B(-2,3)* y tiene su centro en la recta $r \equiv 2x-y-1=0$

22.- Halla la posición de la bisectriz del primer y tercer cuadrante respecto a la circunferencia $C \equiv x^2+y^2-4x-4y+6=0$

23.- Calcula la longitud de una cuerda determinada por la recta $r \equiv x + y = 4$ al cortar a la circunferencia $C \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

24.- ¿Para qué valor de *a* la recta $r \equiv y = -2x+a$ es tangente a la circunferencia $C \equiv x^2+y^2-2x = 4$? Calcula también los puntos de tangencia

25,. Estudia la posición relativa de las circunferencias

$$a)\, C_1 \equiv x^2+y^2-4x-6y+8=0 \ ; \ C_2 \equiv x^2+y^2-2x-4y=0$$
$$b)\, C_1 \equiv O(4,-3), r=3 \ ; \ C_2 \equiv x^2+y^2-4x+10y-13=0$$
$$c)\, C_1 \equiv x^2+y^2-4x-2y-8=0 \ ; \ C_1 \equiv x^2+y^2+8x+6y+8+12=0$$

26.- Dados los puntos *A(0,-3)* y *B(4,1)*, calcular:

a) La ecuación de la circunferencia en la que *A* y *B* son extremos de un diámetro
b) La ecuación de la recta tangente a la circunferencia anterior en *A*
c) La ecuación de la circunferencia concéntrica con la anterior tangente la recta $r \equiv 4x-3y-6=0$

27.- Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados están sobre las rectas $r \equiv x-2y+1=0$, $s \equiv x+3y-14=0$, $t \equiv 2x+y-3=0$

28.- Escribe la ecuación de una elipse cuya suma de distancias a los focos (8,0) y (-8,0) vale 20.

29.- Halla la ecuación de la hipérbola cuya diferencia de distancias a (3,0) y (-3,0) es 4

30.- Escribe la ecuación reducida de la hipérbola en la que una de las asíntotas es $y=\frac{1}{2}x$ y que pasa por el punto $\left(4,\sqrt{3}\right)$

31.- Escribe la ecuación de una elipse con un foco en el punto *(-15,0)* y un vértice en el punto *(17,0)*

32.- Calcular el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $\left(1,0\right)$ y de la recta $r \equiv x+y=0$. Clasificar la cónica resultante y obtener su vértice y la ecuación de su eje.

33.- Calcular la ecuación y los elementos de la cónica de excentricidad *e = 0'6* y que tiene un foco en el punto *(-3,0)*

34.- Calcular la ecuación y los elementos de la cónica de excentricidad *e = 1'5* y que tiene un foco en el punto *(-3,0)*

35.- Una hipérbola equilátera pasa por el punto $P(3,\sqrt{5})$. Halla su ecuación y las coordenadas de los vértices y de los focos.

36.- Halla *b* para que $2x^2+by^2=3$ sea la ecuación de una hipérbola equilátera

37.- Calcular la ecuación y los elementos de la cónica de excentricidad $e = \frac{5}{4}$ y que tiene un vértice en el punto *(0,3)*

38.- Calcula los elementos de las siguientes cónicas:

a)	$x^2+16y^2=25$	b)	$(x^2/9)-(y^2/16)=1$	c)	$x^2/16-y^2/48=1$
d)	$y^2-x=0$	e)	$y^2+x=0$	f)	$y^2+x^2=1$
g)	$6y^2-24x=0$	h)	$x^2/16+y^2/7=1$	i)	$x^2+y^2-2x+2y-2=0$

<u>*Soluciones:*</u>

1.- $2x+y-8=0$

2.- Es la recta paralela a *r* y *s*: $2x+2y+3=0$

3.- $3x-2y+1=0$

4.- $x-3y+4=0$; $3x+y-2=0$

5.- Es la circunferencia de centro (-2,0) y radio 2

6.- Es la hipérbola $3x^2 - y^2 = 48$

7.- Es la circunferencia de centro (-2,1) y radio 4

8.- Es la circunferencia de centro (1,1) y radio 2

9.- Es la circunferencia de centro (0,0) y radio 2

10.- Es la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$

11.- a) $x^2+y^2-4x-5=0$; b) $x^2+y^2-4y-5=0$; c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

12.- a) C(1,-1), r=5; b) C(0,1), r=3; c) C(1,3), r=2

13.- a) No; b) Si, $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, r = 1; c) Sí, C(2,1), r=2; d) No

14.- $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

15.- $3x+2y-16=0$

16.- $(x-1)^2+(y-1)^2=5$

17.- $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

18.- $(x-2)^2+y^2=2$

19.- A exterior, B pertenece a la circunferencia, C interior, D exterior

20.- $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

21.- $(x-1)^2+(y-1)^2=13$

22.- Secante en los puntos (1,1) y (3,3)

23.- $2\sqrt{2}$

24.- Para a = -3, tangente en (-1,-1); para a = 7, tangente en (3,1)

25.- a) Secantes en *(3,1)* y *(0,4)* ; b) interiores ; c) tangentes exteriores en *(-1,-1)*

26.- $a)\, x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0 \quad b)\, x + y + 3 = 0 \quad c)\, x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

27.- $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

28.- $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

29.- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

30.- $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

31.- $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$

32.- Parábola $x^2\ x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 2 = 0$; $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; eje $\equiv x - y - 1 = 0$

33.- Elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

34.- Hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

35.- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

36.- b = -2

37.- $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$