Trigonometría y Triángulos

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA
FÓRMULAS Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Matemáticas 1º de Bachillerato Ciencias y Tecnología

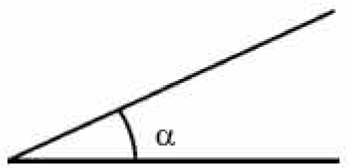
Profesor: Jorge Escribano
Colegio Inmaculada Niña
Granada
www.coleinmaculadanina.org
www.lasmatesdejorge.wikispaces.com

<u>TEMA 1.- INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA</u>

<u>1.- ÁNGULOS</u>

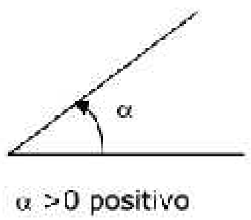
1.- Definición

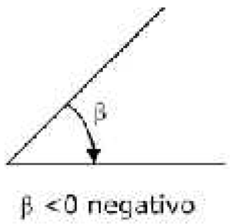
*Un **ángulo** es la parte del plano limitada por dos semirrectas que se cortan.*



A las semirrectas se les llama *lados* y al punto común *vértice*.

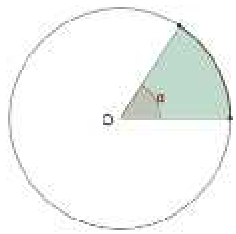
El ángulo es *positivo* si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y *negativo* en caso contrario





2.- Medidas de ángulos

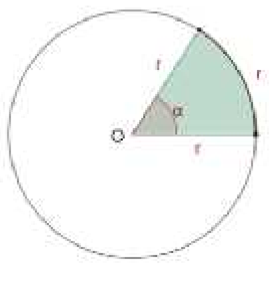
Para medir un ángulo se colocan las semirrectas con el vértice en el centro de una circunferencia:



Existen tres unidades fundamentales de medidas de ángulos:
Grados sexagesimales, *radianes* y *grados centesimales*

Un ***grado sexagesimal (º)*** es lo que mide un ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales, es decir, una circunferencia mide 360 grados sexagesimales (360º).
Por tanto, un ángulo recto medirá 90º y una semicircunferencia 180º.

Un ***radián (rad)*** es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio:



Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, es fácil ver que el ángulo completo de una circunferencia mide 2® radianes.
Por tanto, la equivalencia entre ambas unidades de medida es:

360º $\leftrightarrow$ *2® rad*

Usando esta relación como referencia, se obtienen equivalencias:

$$180^o \quad \leftrightarrow \quad \pi \ rad$$

$$90^o \quad \leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \ rad$$

Por tanto, mediante una sencilla regla de 3 se puede pasar de una unidad de medida a otra.

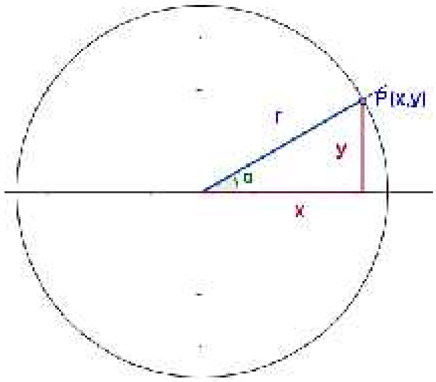
Ejercicio:

Transformar de radianes a grados sexagesimales y viceversa:

$$45^o \ , \ \frac{\pi}{3} \ , \ 270^o \ , \ \frac{5\pi}{4} \ , \ 30^o \ , 120^o \ , \ \frac{7\pi}{6} \ , 315^o$$

Un ***grado centesimal (^{g})*** es lo que mide un ángulo resultante de dividir la circunferencia en 400 partes iguales, es decir, una circunferencia mide 400 grados sexagesimales (400^g). Por tanto, un ángulo recto medirá 100^g y una semicircunferencia 200^g.
Esta unidad de medida de ángulos está en desuso, y nosotros sólo trabajaremos con grados sexagesimales y radianes.

2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Para definir las razones trigonométricas colocamos el ángulo en una circunferencia de radio *r* y con el centro en el origen del sistema de coordenadas.

Cada ángulo tiene un punto asociado en la circunferencia, *P(x,y)*

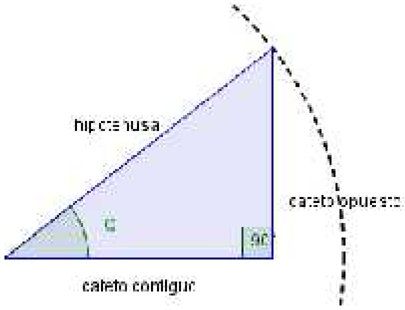
A partir de ese punto, se definen las razones trigonométricas del ángulo α como:

- ***Seno de α*** $\Rightarrow \ sen\alpha = \frac{y}{r}$
- ***Coseno de α*** $\Rightarrow \ cos\alpha = \frac{x}{r}$
- ***Tangente de α*** $\Rightarrow \ tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{y}{x}$

Y sus inversas:

- ***Cosecante de α*** $\Rightarrow \ cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{r}{y}$
- ***Secante de α*** $\Rightarrow \ sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} = \frac{r}{x}$
- ***Cotangente de α*** $\Rightarrow \ cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{x}{y}$

Es importante destacar que las razones trigonométricas están relacionadas con los triángulos rectángulos, ya que si inscribimos un triángulo rectángulo en una circunferencia, las razones trigonométricas definidas anteriormente serán:



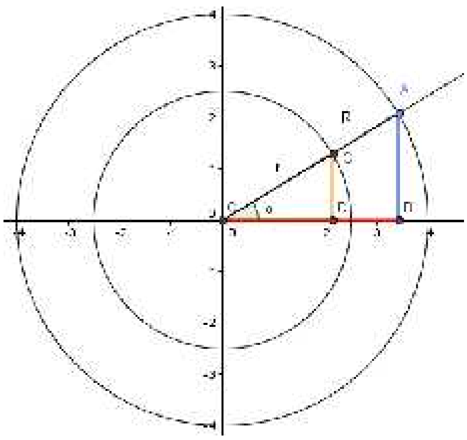
$$sen\sim = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa}$$

$$cos\sim = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa}$$

$$tg\sim = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo}$$

Lo que será muy útil en la resolución de triángulos, como veremos en el tema 3.

Estas definiciones son independientes de la circunferencia sobre la que se sitúa el ángulo ya que, por el Teorema de Tales:



Los triángulos ABO y CDO son semejantes y por tanto:

$$sen\sim = \frac{AB}{R} = \frac{CD}{r}$$

$$cos\sim = \frac{BO}{R} = \frac{DO}{r}$$

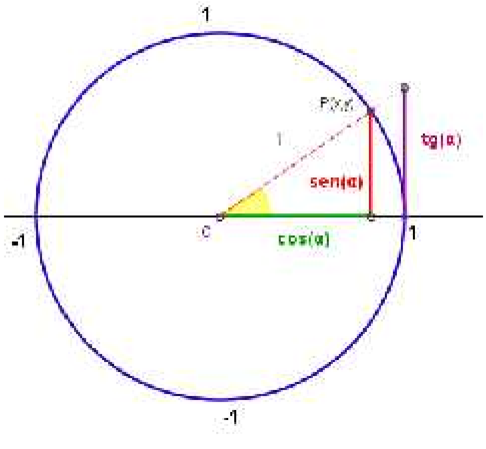
Es por eso que a partir de este momento usaremos como referencia a la hora de situar las razones trigonométricas de un ángulo una circunferencia de radio 1 (y centro el origen de coordenadas), llamada ***circunferencia goniométrica***.

En ella se pueden situar fácilmente de manera gráfica las razones trigonométricas de un ángulo:

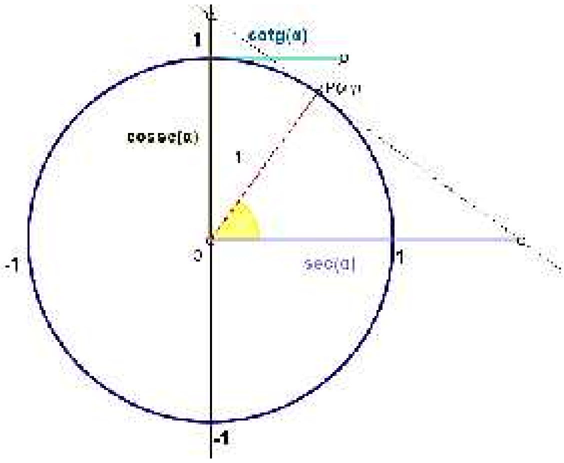
$$sen\sim = y$$

$$cos\sim = x$$

$$tg\sim = \frac{y}{x}$$



Y las inversas:

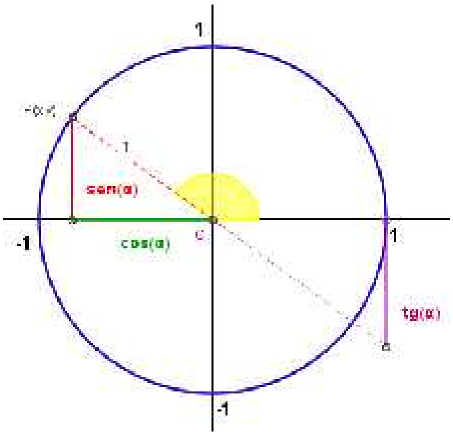


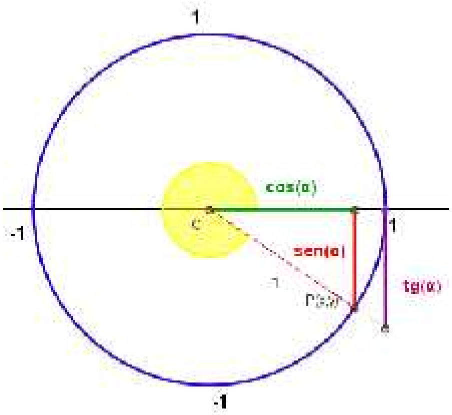
$$co\,sec\sim\ = \frac{1}{y}$$

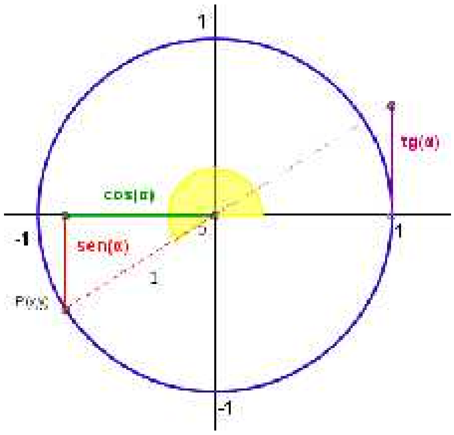
$$sec\sim\ = \frac{1}{x}$$

$$cotg\sim\ = \frac{x}{y}$$

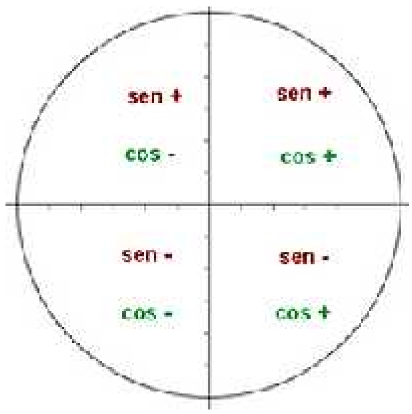
Y en los demás cuadrantes:



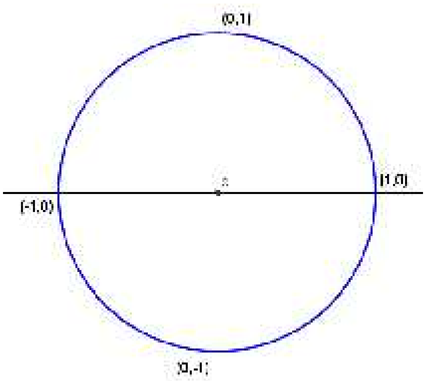




Además, al estar colocada la circunferencia en el origen de coordenadas, los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante serán (la tangente y las inversas quedan como ejercicio):



Y teniendo en cuenta la definición, podemos obtener las razones trigonométricas de algunos ángulos importantes. Por ejemplo:



$$sen90^o = 1 \quad ; \quad cos\,180^o = -1$$

$$sen\frac{3®}{2} = -1 \quad ; \quad tg0^o = 0$$

$$cos\,90^o = 0 \quad ; \quad tg\,270^o \;\; no\,existe\left(\frac{-1}{0}\right)$$

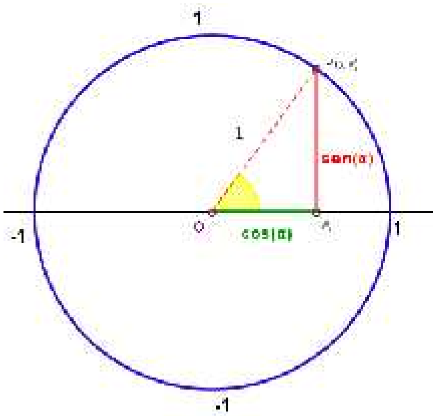
Ejercicio: Completar la siguiente tabla

α	**0º**	**90º** $\left(\frac{\pi}{2}rad\right)$	**180º** $(\pi\ rad)$	**270º** $\left(\frac{3\pi}{2}rad\right)$	**360º** $(2\pi\ rad)$
sen					
cos					
tg					

Conviene además conocer las razones trigonométricas de los ángulos más destacados del primer cuadrante:

α:	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

3.- RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



En el triángulo rectángulo OAP de la figura es fácil ver que, usando en Teorema de Pitágoras, se obtiene la *fórmula fundamental de la trigonometría*:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Si dividimos en la igualdad anterior por $sen^2\alpha$ obtenemos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{1 + cot\,g^2\alpha = cos\,ec^2\alpha}$$

Si ahora dividimos por $cos^2\alpha$:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 + t\,g^2\alpha = s\,ec^2\alpha}$$

Estas relaciones permiten calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo conociendo solo una de ellas. Siempre habrá que elegir un signo teniendo en cuenta el cuadrante en el que se encuentre el ángulo cuyas razones trigonométricas queremos calcular.

Ejemplo 1:

Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante $\left(0^o \leq \alpha \leq 90^o\right)$ *y que* $sen\alpha = \frac{2}{3}$ *, calcular sus restantes razones trigonométricas*

Solución:

Por la fórmula fundamental: $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \Rightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como α está en el primer cuadrante nos quedamos con el positivo y por tanto $cos\alpha = +\frac{\sqrt{5}}{3}$

A partir de aquí es sencillo obtener las restantes razones trigonométricas:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$cos\,ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/3} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$cot\,g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $tg\alpha = -3$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ *, calcular las restantes razones trigonométricas de α*

Solución:

Por la fórmula $1 + t\,g^2\alpha = s\,ec^2\alpha$ obtendremos la secante:

$$sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha = 1 + 9 = 10 \Rightarrow sec\alpha = \pm\sqrt{10}$$

Como α está en el segundo cuadrante, la secante (que es la inversa del coseno) será negativa y por tanto

$sec\alpha = -\sqrt{10}$, de donde también podemos obtener que $cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Para calcular el seno, podemos usar la fórmula fundamental o la definición de tangente:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \Rightarrow sen\alpha = tg\alpha \cdot cos\alpha = (-3)\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Y las otras dos:

$$cos\,ec\alpha = \frac{10}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \quad ; \quad cot\,g\alpha = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio:

Calcular las restantes razones trigonométricas en cada caso:

$a)\ cosec\alpha = -\dfrac{5}{4} \quad ,\ 180^o \le \alpha \le 270^o$

$b)\ cotg\alpha = -\dfrac{1}{2} \quad ,\ \dfrac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$

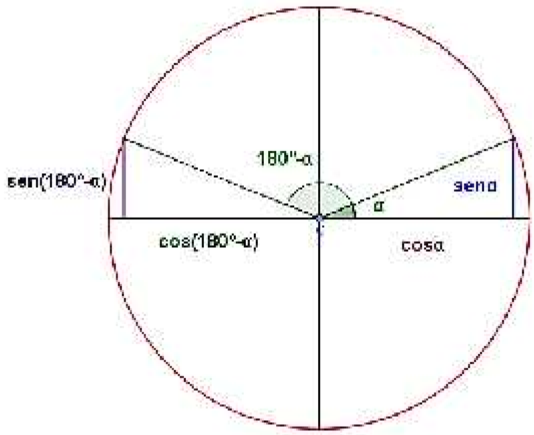
$c)\ cos\alpha = \dfrac{2}{3} \quad ,\ tg\alpha < 0$

4.- RELACIONES ENTRE CUADRANTES

Las fórmulas que se exponen a continuación son válidas para cualquier ángulo esté en el cuadrante que esté, aunque representaremos α como un ángulo del primer cuadrante por comodidad y facilidad de visualizar y porque de este modo permiten relacionar las razones trigonométricas de cualquier ángulo con las de un ángulo del primer cuadrante. Son fórmulas que no conviene memorizar, sino aprender a "visualizarlas" y así poder usarlas cuando se necesiten.

1.- *Ángulos Suplementarios*

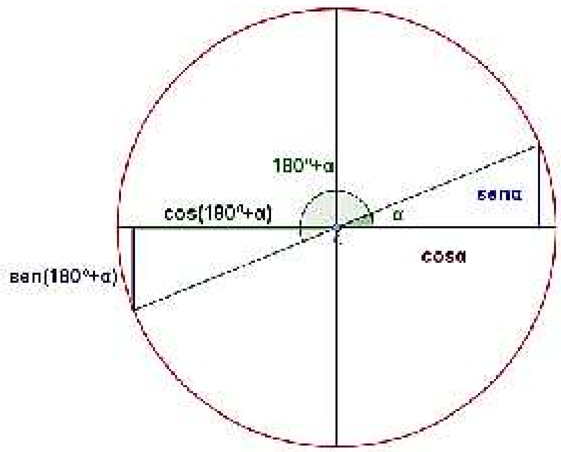
Son aquellos que suman 180º $(\alpha\ \ y\ 180^o - \alpha)$



$$sen(180^o - \alpha) = sen\alpha$$
$$cos(180^o - \alpha) = -cos\alpha$$
$$tg(180^o - \alpha) = -tg\alpha$$

2.- *Ángulos que se diferencian en 180º*

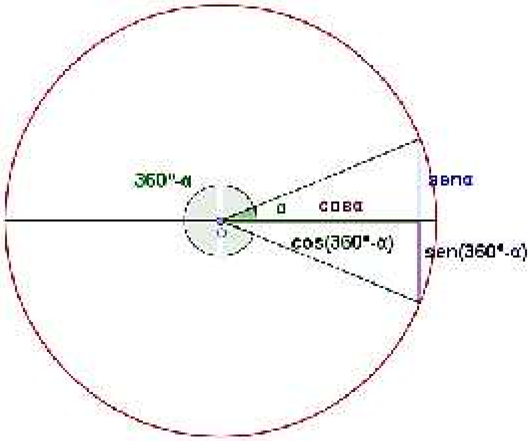
$(\alpha\ \ y\ 180^o + \alpha)$



$$sen(180^o + \alpha) = -sen\alpha$$
$$cos(180^o + \alpha) = -cos\alpha$$
$$tg(180^o + \alpha) = tg\alpha$$

3.- Ángulos opuestos

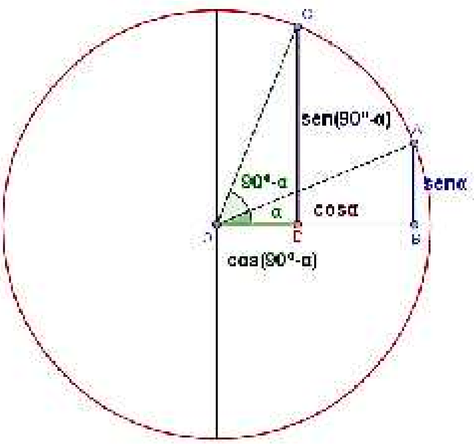
$(\alpha \ \ y \ -\alpha) \quad ó \quad (\alpha \ \ y \ 360^o - \alpha)$



$$sen(360^o - \alpha) = sen(-\alpha) = -sen\alpha$$
$$cos(360^o - \alpha) = cos(-\alpha) = cos\alpha$$
$$tg(360^o - \alpha) = tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

4.- Ángulos Complementarios

Son aquellos que suman 90º $(\alpha \ \ y \ 90^o - \alpha)$

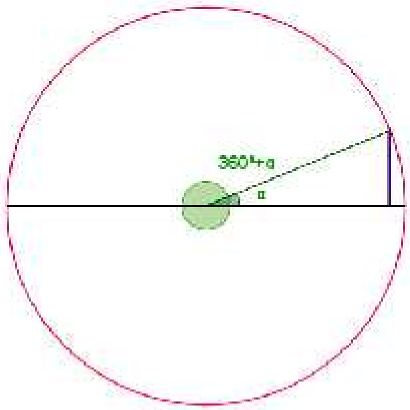


Como los triángulos ABO y CDO son iguales al ser rectángulos y tener la hipotenusa y los ángulos iguales:

$$sen(90^o - \alpha) = cos\alpha$$
$$cos(90^o - \alpha) = sen\alpha$$
$$tg(90^o - \alpha) = cotg\alpha$$

5.- Ángulos mayores de 360º

Como podemos ver, el punto asociado al ángulo α es el mismo que el asociado a 360º + α, y por tanto sus razones trigonométricas serán las mismas. De hecho, si un ángulo da *k* vueltas a la circunferencia y sobra α, sus razones trigonométricas seguirán siendo las mismas que las de α



$$sen(360^o + \alpha) = sen(360^o k + \alpha) = sen\alpha$$
$$cos(360^o + \alpha) = cos(360^o k + \alpha) = cos\alpha$$
$$tg(360^o + \alpha) = tg(360^o k + \alpha) = tg\alpha$$

Ejercicio propuesto:

Razonar las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo α con las del ángulo 90º + α

Ejemplo 1:

Calcular las siguientes razones trigonométricas:

a) $sen120^o$ *b)* $\cos 240^o$ *c)* $tg\left(-\frac{®}{4}\right)$ *d)* $\sec 300^o$ *e)* $cotg510^o$ *f)* $cosec2205^o$

Solución:

a) $sen120^o = sen\left(180-60^o\right) = sen60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 240^o = \cos\left(180^o+60^o\right) = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$

c) $tg\left(-\frac{®}{4}\right) = -tg\left(\frac{®}{4}\right) = -1$

d) $\sec 300^o = \frac{1}{\cos 300^o} = \frac{1}{\cos\left(360^o-60^o\right)} = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{1/2} = 2$

e)

$$\cot g510^o = \frac{1}{tg510^o} = \frac{1}{tg(360^o+150^o)} = \frac{1}{tg150^o} = \left(\otimes\right) = \frac{1}{-\sqrt{3}/3} = -\sqrt{3}$$

$$\otimes \quad tg150^o = tg\left(180^o-30^o\right) = -tg30^o = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f) $\cos ec2205^o = \cos ec\left(360^o\cdot 6+45^o\right) = \cos ec45^o = \frac{1}{sen45^o} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $tg\sim = \frac{1}{3}$, $0 \le \sim \le \frac{®}{2}$, *calcular:*

$a)\,tg\left(180^o-\sim\right)$ $b)\cot g\left(®+\sim\right)$ $c)\,tg\left(-\sim\right)$ $d)\,tg\left(4®+\sim\right)$ $e)\,sen\left(\frac{®}{2}-\sim\right)$

Solución:

a) $tg\left(180^o-\sim\right) = -tg\sim = -\frac{1}{3}$

b) $\cot g\left(®+\sim\right) = \cot g\sim = 3$

c) $tg\left(-\sim\right) = -tg\sim = -\frac{1}{3}$

d) $tg\left(4®+\sim\right) = tg\sim = \frac{1}{3}$

e) $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\,\alpha=\otimes$

Calculamos aparte el cosα:

$$sec^2\alpha=1+tg^2\alpha=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\Rightarrow sec\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{10}{9}}=(\,primer\,cuadrante\,)=+\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow cos\,\alpha=+\frac{3}{\sqrt{10}}=+\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Luego $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\,\alpha=+\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ejercicios:

1.- Calcular las razones trigonométricas directas de los siguientes ángulos:
135º , $\frac{7\pi}{4}$, 210º , 480º , $\frac{5\pi}{6}$, 225º , -210º , $\frac{11\pi}{6}$

2.- Sabiendo que $sen\,\alpha=0'35$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, calcular:

$a)\,sen(180^o-\alpha)$ $b)\,sen(\pi+\alpha)$ $c)\,sen(90^o-\alpha)$

$d)\,sen(2\pi-\alpha)$ $e)\,sen(720^o+\alpha)$ $f)\,cos(3\pi+\alpha)$

3.- Sabiendo que $tg\,\alpha=\frac{4}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, calcular:

$a)\,sen\,\alpha$ $b)\,tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $c)\,cos(180^o+\alpha)$

$d)\,sen(\pi-\alpha)$ $e)\,cot\,g(-\alpha)$ $f)\,sec(3\pi+\alpha)$

EJERCICIOS

1. Completa la tabla:

Radianes	π/3			π		3π/4	5π/4		π/2	
Grados		30º	45º		225º			330º		270º

2.- Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo α:

$a)\ \cos\alpha = \frac{3}{5}\ ,\ \alpha \in 4^o\ C$ $\qquad$ $b)\ \cos\alpha = -\frac{1}{3}\ ,\ 90^o < \alpha < 180^o$

$c)\ \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}\ ,\ \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $d)\ tg\,\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ \cos\alpha < 0$

3.- Expresar en función de ángulos del primer cuadrante, los senos y cosenos de los siguientes ángulos:
120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º

4.- Sin utilizar la calculadora calcula las razones trigonométricas de los ángulos:
a) 765º b) –240º.

5.- Sabiendo que sen 37º=0,6. Calcula las razones de 53º y de 143º

6.- Si $sen\,\alpha = 0'6,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula: $sen(\pi + \alpha)$, $\cos(-\alpha)$, $tg(4\pi + \alpha)$

7.- Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

a) Halla las restantes razones trigonométricas de α

b) Calcula razonadamente los valores de: $\cos(\pi - \alpha)\ ,\ sen(\pi + \alpha)\ ,\ tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

8.- Sabiendo que $tg\,\alpha = \frac{1}{3}\ ,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcular:

$a)\ tg(180^o - \alpha)$ $\qquad$ $b)\ cotg(\pi + \alpha)$ $\qquad$ $c)\ \cos(-\alpha)$ $\qquad$ $d)\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

9.- Calcula, usando la calculadora, el ángulo α en cada caso:

$a)\ sen\,\alpha = 0'743\ ,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad$ $b)\ sen\,\alpha = -0'743\ ,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$c)\ \cos\alpha = 0'374\ ,\ \alpha > \pi$ $\qquad$ $d)\ tg\,\alpha = 1'376\ ,\ sen\,\alpha < 0$

10.- Razona, sin usar calculadora, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si la tangente de un ángulo vale $\frac{1}{3}$, entonces su seno vale 1 y su coseno vale 3

b) Si α, β y γ son tres ángulos de un triángulo, entonces $tg(\alpha+\beta)+tg\gamma=0$

c) $sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+tg\left(\frac{4\pi}{3}\right)+tg\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$

d) No existe ningún ángulo α tal que $sen\alpha+cos\alpha=2$

e) No existe ningún ángulo α tal que $sen\alpha+cos\alpha=1$

<u>*Soluciones:*</u>

1.- π/6, π/4, 5π/4, 11π/6, 3π/2, 60º, 180º, 135º, 225º, 90º

2.- a) senα=-4/5; tgα=-4/3; b) senα=$2\sqrt{2}/3$, tgα=$-2\sqrt{2}$

c) senα=$-\sqrt{5}/3$, cosα=-2/3; d) cosα=$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,senα=$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

3.- sen120º=sen60º, cos120º=-cos60º; sen135º=sen45º, cos135º=-cos45º; sen150º=sen30º, cos150º=-cos30º; sen180º=sen0, cos180º=-cos0; sen210º=-sen30º, cos210º=-cos30º; sen225º=-sen45º, cos225º=-cos45º; sen240º=-sen60º, cos240º=-cos60º; sen270º=-sen90º, cos270º=-cos90º; sen300º=-sen60º, cos300º=cos60º; sen315º=-sen45º, cos315º=cos45º; sen330º=-sen30º, cos330º=cos30º

4.- a) sen765º=cos765º=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen(-240º)=$\sqrt{3}/2$, cos(-240)=-1/2

5.- sen53=0,8; cos53=0,6; sen143=0,6; cos143=-0,8

6.- -0'6, -0'8, -0'75

7.- a) senα=$\sqrt{3}/2$; tgα=$\sqrt{3}$; b) -1/2, $-\sqrt{3}/2$, $1/\sqrt{3}$

8.- $a)-\frac{1}{3}$ $b)3$ $c)-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $d)-\sqrt{10}$

9.- a) 132º b) 228º c) 292º d) 234º

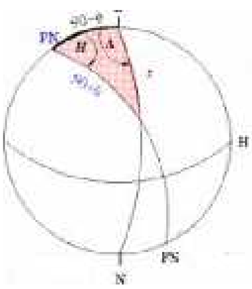
10.- a) Falsa b) Verdadera c) Falsa d) Verdadera e) Falsa

APÉNDICE: BREVE HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA Y APLICACIONES

El origen de la trigonometría (que en griego clásico significa "medición de triángulos", se remonta a las primeras matemáticas conocidas, pues ya los Babilonios (hace unos 3.500 años) usaban los ángulos y las razones trigonométricas para realizar mediciones en agricultura así como en los primeros estudios de astronomía para el cálculo de la posición de cuerpos celestes y la predicción de sus órbitas, en los calendarios y el cálculo del tiempo, y por supuesto en navegación para mejorar la exactitud de la posición y de las rutas.

Por su parte fueron los egipcios quienes establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, criterio que se ha mantenido hasta nuestros días, y utilizaron la medición de triángulos en la construcción de las pirámides.

Los conocimientos de los pueblos anteriores pasaron a la Grecia clásica, donde destacó el matemático y astrónomo *Hiparco de Nicea* en el S.II a.C., siendo uno de los principales desarrolladores de la trigonometría, no en vano se dice que es el padre de la trigonometría. Construyó las tablas de cuerdas en las que iba relacionando las medidas angulares con las lineales. Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0º hasta los 180º e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada.



Unos 300 años más tarde el astrónomo alejandrino *Claudio Ptolomeo* mejoró dichas tablas y las aplicó al cálculo de los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. También aplicó sus teorías trigonométricas en la construcción de astrolabios y relojes de sol, y en la resolución de triángulos esféricos.

Al mismo tiempo que los griegos, los astrónomos de la India, con *Aryabhata* a la cabeza, desarrollaron también un sistema trigonométrico, pero basado en la función seno en vez de en cuerdas. Otro matemático hindú, *Varahamihira*, gracias a los trabajos previos de Aryabhata, comenzó a utilizar una de las fórmulas más famosas de la trigonometría moderna: $sen^2 x + cos^2 x = 1$

La matemática árabe y, en particular, la trigonometría, se alimentó fundamentalmente de la Grecia clásica por un lado y de la India por el otro. A ellos se debe el uso de la circunferencia goniométrica, con $r = 1$, mientras que los griegos usaban $r = 60$.

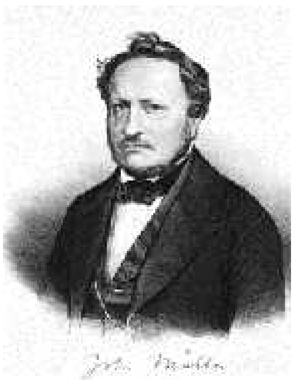
A principios del siglo IX, *Al-Kwarizmi* (matemático de cuyo nombre procede la palabra “algoritmo”), construye las primeras tablas exactas del seno y el coseno y, por primera vez, tabula los valores de la tangente.

Pero quizás el matemático árabe que más aportaciones ofreció a la trigonometría fue *Al-Battani*, quien, además de definir las razones trigonométricas recíprocas (secante y cosecante) y sus tablas, indagó en varias relaciones trigonométricas (ahora clásicas), estableciendo, por ejemplo, que $tg\sim = \frac{sen\sim}{cos\sim}$, o que $sec^2\sim = 1 + tg^2\sim$.

Ya en el siglo X, los matemáticos árabes y, en particular, *Abu al-Wafa*, ya utilizaban las 6 razones trigonométricas clásicas, y aportó entre otras cosas las fórmulas del ángulo doble o el Teorema de las Senos para triángulos esféricos.

Destaca también el matemático andalusí, procedente de la actual Jaén, *Al-Jayyani*, quien con su *Libro de los arcos esféricos desconocidos*, escribe el primer tratado conocido sobre trigonometría esférica.

Teorema del Coseno, métodos de triangulación, mediciones del tamaño de la tierra y de distancias entre lugares… todos estos logros también fueron sucesivamente alcanzados por los matemáticos árabes en su afán por ahondar en las entrañas de la trigonometría.



La trigonometría llega a Europa a partir del siglo XII a través de la cultura árabe. Pero no es hasta el siglo XV cuando se realizan los primeros trabajos de importancia sobre este tema. Quizás el primer matemático europeo que se adentró en el campo de la trigonometría fue *Johann Müller*, conocido como *Regiomontano*, que en su obra *De Triangulis Omnimodis* trata sobre las definiciones básicas relacionadas con la trigonometría, establece el Teorema de los Senos y otros 55 teoremas más y los aplica a la resolución de triángulo, ofrece una fórmula para calcular el área de un triángulo en función de 2 de sus lados y el ángulo que forman, y, finalmente, se ocupa de diversos aspectos de la trigonometría esférica.

Quizás fue en el *Opus palatinum de triangulis* de *Rheticus* (siglo XVI), alumno de Copérnico, en donde se definen, por primera vez, las razones trigonométricas en función de triángulos rectángulos y no a través de circunferencias como venía siendo habitual hasta esos momentos. Asimismo, proporcionó tablas, con una exactitud de 10 segundos, de las seis funciones trigonométricas.

El último gran aporte a la trigonometría clásica fue la invención de los logaritmos por el matemático escocés *John Napier* en 1614. Sus tablas de logaritmos facilitaron en gran medida el arte de la computación numérica, incluyendo la compilación de tablas trigonométricas.

En el siglo XVII comienza a cambiar el carácter geométrico de la trigonometría, inclinándose hacia aspectos más algebraicos y analíticos, y principalmente dos descubrimientos ayudaron en este proceso: el álgebra simbólica, con *François Viète* a la cabeza; y la geometría analítica, con *Fermat* y *Descartes*. De hecho, *Viète* comprueba que algunas ecuaciones algebraicas pueden resolverse en términos de razones trigonométricas.

Pero la herramienta que definitivamente dotó a la trigonometría de su moderno aspecto actual es la invención del Cálculo Infinitesimal a cargo de *Newton* y/o *Leibniz*. En particular, Newton establece el desarrollo en series de potencias del seno y del coseno, aunque parece que parte de estos desarrollos eran ya conocidos por el matemático hindú *Madhava*, y previamente, *James Gregory* en 1671, obtiene el desarrollo en series de potencias de la función arcotangente, consiguiendo, de paso, una bonita relación entre p y los número naturales:

$$\pi = 1 - {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{5} - {}^{1}/_{7} + {}^{1}/_{9} - {}^{1}/_{11} + \cdots$$

La aparición de los números complejos supuso en definitivo impulso a la nueva trigonometría. En particular, *Abraham de Moivre* en 1722 establece la conocida fórmula

$$(\cos(a)+i\ \mathrm{sen}(a))^n=\cos(na)+i\ \mathrm{sen}(na)$$

Nota: la base de los números complejos es el número $i = \sqrt{-1}$

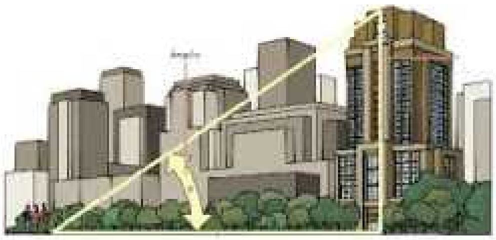
Pero fue el gran matemático suizo *Leonhard Euler* quien estableciera la inseparable relación entre trigonometría y variable compleja con su conocida fórmula $e^{ia} = \cos(a) + i\ \mathrm{sen}(a)$, de la que se puede derivar la *Identidad de Euler*

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

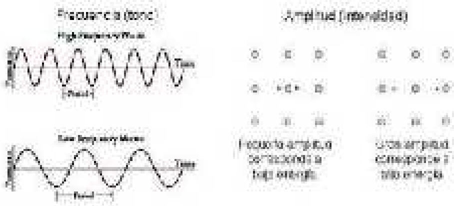
en la que se relacionan de una forma maravillosamente simple los 5 números más importantes de toda la historia.

Existen innumerables usos de la trigonometría y las funciones trigonométricas.
Por ejemplo, la técnica de la triangulación se utiliza en astronomía para medir la distancia a las estrellas cercanas, en geografía para medir distancias entre puntos de referencia, o en sistemas de navegación por satélite.

Las funciones seno y coseno son fundamentales a la teoría de funciones periódicas como las que describen las ondas de sonido y luz.



Entre los campos que utilizan la trigonometría y las funciones trigonométricas se incluyen la astronomía y la navegación, la teoría de la música, la acústica, la óptica, el análisis de los mercados financieros, la electrónica, la teoría de la probabilidad, la estadística, la biología, la imagen médica, farmacia, química, teoría de números, sismología, meteorología, oceanografía, muchas ciencias físicas, topografía y geodesia, la arquitectura, economía, ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería civil, la infografía, cartografía, cristalografía, teoría de juegos,…



TEMA 2.- FÓRMULAS Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

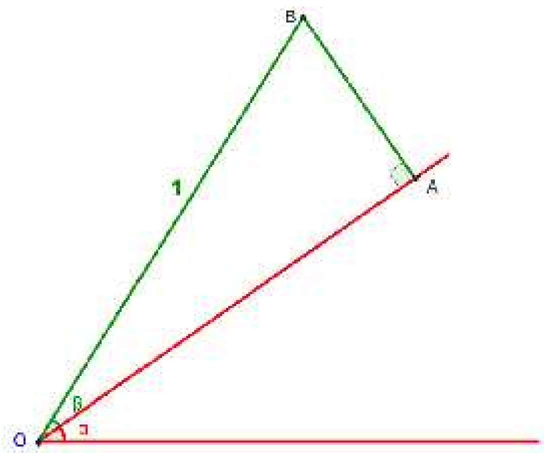
1.- Seno de la Suma

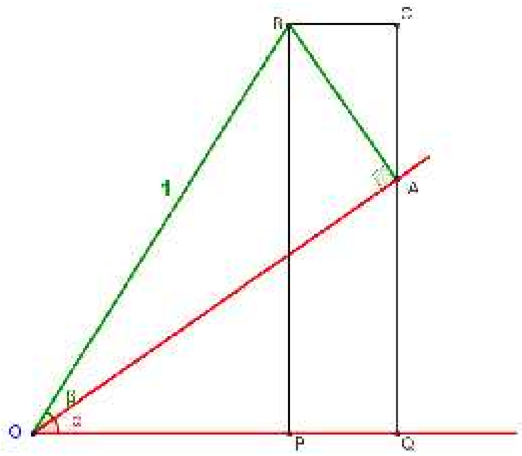
Para calcular el seno de la suma de dos ángulos, α y β, se usa la siguiente fórmula

$$\boxed{sen(\sim + \quad) = sen\sim \cdot cos \quad + cos\sim \cdot sen}$$

Demostración:

Dibujamos un ángulo α y a continuación otro ángulo β, y sobre éste un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, OAB, tal y como se ve en la figura:



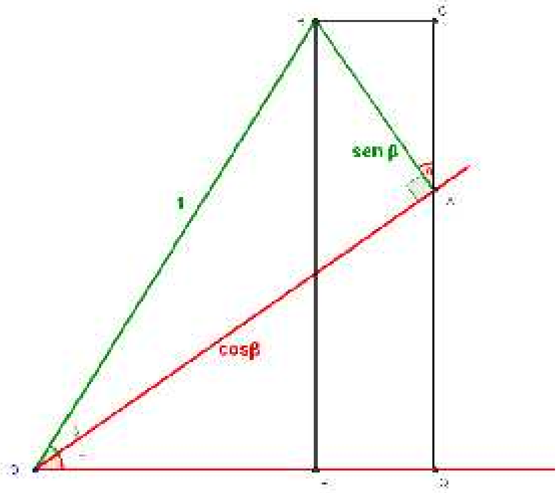


En dicho dibujo colocamos los triángulos rectángulos OPB, OQA y ACB:

En el triángulo OPB está el ángulo α+β, mientras que en el triángulo OQA está el ángulo α

Como la hipotenusa del triángulo OAB es 1, se obtiene en dicho triángulo que $OA = cos \quad ; \quad AB = sen$

Además el ángulo en A del triángulo ACB es igual que α, puesto que los lados que lo forman, AB y AC, son perpendiculares a los lados que forman α, OA y OQ:



En el triángulo OPB $\Rightarrow \quad sen(\alpha+\beta) = BP = QA + AC \ \ (1)$

Por otra parte, en OQA:

$$sen\alpha = \frac{QA}{cos\beta} \Rightarrow QA = sen\alpha \cdot cos\beta$$

En ACB: $\quad cos\alpha = \dfrac{AC}{sen\beta} \Rightarrow AC = cos\alpha \cdot sen\beta$

Por tanto, volviendo a *(1)*:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$$

2.- Coseno de la suma

Para calcular el coseno de la suma de dos ángulos, α y β, se usa la siguiente fórmula

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}$$

Demostración:

La demostración queda propuesta como ejercicio (usar el mismo dibujo que para la demostración anterior)

3.- Tangente de la suma

Para calcular la tangente de la suma de dos ángulos, α y β, se usa la siguiente fórmula

$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}}$$

Demostración:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta} = \text{ Dividiendo todo por } cos\alpha \cdot cos\beta =$$

$$= \frac{\dfrac{sen\alpha \cdot cos\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} + \dfrac{cos\alpha \cdot sen\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha \cdot cos\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} - \dfrac{sen\alpha \cdot sen\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta}} = simplificando = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Nota: para calcular las razones trigonométricas inversas (secante, cosecante y cotangente) de la suma de dos ángulos, se usan estas fórmulas y al resultado se le calcula el inverso.

Ejemplo 1:

Calcular las razones trigonométricas de 75º

Solución:

$$sen75^o = sen\left(45^o + 30^o\right) = sen45^o \cdot cos\,30^o + cos\,45^o \cdot sen30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ (\approx 0'97)$$

$$cos\,75^o = cos\left(45^o + 30^o\right) = cos45^o \cdot cos\,30^o - sen45^o \cdot sen30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ (\approx 0'26)$$

$$tg75^o = tg\left(45^o + 30^o\right) = \frac{tg45^o + tg30^o}{1 - tg45^o \cdot tg30^o} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\ \left(\approx 3'73\right)$$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $sen\alpha = \frac{3}{5}\ ,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\ ;\ cos\beta = \frac{1}{3}\ ,\ \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ *, calcular las razones trigonométricas del ángulo α+β*

Solución:

- $sen\left(\alpha+\beta\right) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$

  Calculamos aparte el cosα y el senβ:

  $$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow cos\alpha = -\frac{4}{5}\ (\alpha \in 2^o C)$$

  $$sen^2\beta + cos^2\beta = 1 \Rightarrow sen^2\beta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow sen\beta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow sen\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\beta \in 4^o C\right)$$

  Sustituyendo:

  $$sen\left(\alpha+\beta\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3+8\sqrt{2}}{15}$$

- Sustituyendo en la fórmula los resultados anteriores:

  $$cos\left(\alpha+\beta\right) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{6\sqrt{2}-4}{15}$$

- $tg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

  Del primer apartado tenemos:

  $$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = -\frac{3}{4}\quad ;\quad tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}$$

  Y sustituyendo: $$tg\left(\alpha+\beta\right) = \frac{-3/4 - 2\sqrt{2}}{1 - \left(-3/4\right)\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)} = \frac{-3-8\sqrt{2}}{4+6\sqrt{2}}$$

Ejercicios:

1.- Calcular las razones trigonométricas de 105º

2.- Sabiendo que $sen\alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < 90^o$, calcular $sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

3.- Calcular el $cos(\alpha+\beta)$ sabiendo que

$$sen\alpha = \frac{5}{13} \ , \ 90^o < \alpha < 180^o \quad ; \quad tg\beta = \frac{12}{5} \ , \ 180^o < \beta < 270^o$$

4.- Si $tg\alpha = 1$, $tg\beta = 2$, $tg\gamma = 3$, calcular $tg(\alpha+\beta+\gamma)$

<u>2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS</u>

1.- Seno de la Diferencia

Para calcular el seno de la diferencia de dos ángulos, α y β, se usa la siguiente fórmula

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta - cos\alpha\cdot sen\beta}$$

Demostración:

Partimos de la fórmula del seno de la suma, y cambiamos β por –β:

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha+(-\beta)) = sen\alpha\cdot cos(-\beta) + cos\alpha\cdot sen(-\beta) =$$

usando las fórmulas de las razones trigonométricas de ángulos opuestos (tema 1)

$$= sen\alpha\cdot cos\beta + cos\alpha\cdot(-sen\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta - cos\alpha\cdot sen\beta$$

Con lo que queda demostrado

2.- Coseno y tangente de la Diferencia

Queda como ejercicio la demostración de las siguientes fórmulas:

$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos\alpha\cdot cos\beta + sen\alpha\cdot sen\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Ejercicios:

1.- Calcular las razones trigonométricas de 15º

2.- Sabiendo que sen12º = 0’2 y sen37º = 0’6, calcula tg49º y cosec25º

3.- Si α y β son dos ángulos del primer cuadrante con $sen\alpha = \frac{12}{13}$, $sen \quad = \frac{4}{5}$, calcular $sen\left(\quad - \alpha \right)$

4.- Si $cot\,g\alpha = \frac{4}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcular $tg\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ y $cot\,g\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

3.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Queremos ahora relacionar las razones trigonométricas de un ángulo α con las del ángulo 2α. Para ello nos basaremos en las fórmulas de la suma de ángulos:

❖ $sen\left(2\alpha\right) = sen\left(\alpha + \alpha\right) = sen\alpha \cdot cos\alpha + cos\alpha \cdot sen\alpha$

Y por tanto:

$$\boxed{sen\left(2\alpha\right) = 2sen\alpha \cdot cos\alpha}$$

❖ $cos\left(2\alpha\right) = cos\left(\alpha + \alpha\right) = cos\alpha \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot sen\alpha$

Y por tanto:

$$\boxed{cos\left(2\alpha\right) = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

❖ $tg\left(2\alpha\right) = tg\left(\alpha + \alpha\right) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha}$

Y por tanto:

$$\boxed{tg\left(2\alpha\right) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$$

Ejercicios:

1.- Hallar las razones trigonométricas del ángulo 2α sabiendo que $cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2.- Si $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $180^o < \alpha < 270^o$; $cos \quad = \frac{1}{2}$, $270^o < \quad < 360^o$, calcular $sen\left(2\alpha + \quad \right)$

3.- Obtener las fórmulas que permitan obtener las razones trigonométricas del ángulo 3α en función de las razones trigonométricas de α

4.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Queremos ahora relacionar las razones trigonométricas de un ángulo α con las del ángulo $\frac{\sim}{2}$

Por un lado vamos a usar la fórmula fundamental cambiando el ángulo α por $\frac{\sim}{2}$:

$$sen^2\sim + cos^2\sim = 1 \quad \Rightarrow \quad sen^2\left(\frac{\sim}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\sim}{2}\right)=1$$

También usaremos la fórmula del coseno del ángulo doble, cambiando también el ángulo α por $\frac{\sim}{2}$:

$$cos(2\sim)=cos^2\sim - sen^2\sim \quad \Rightarrow \quad cos(\sim)=cos^2\left(\frac{\sim}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\sim}{2}\right)$$

Si juntamos ambas expresiones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1=cos^2\left(\frac{\sim}{2}\right)+sen^2\left(\frac{\sim}{2}\right) \\ cos(\sim)=cos^2\left(\frac{\sim}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\sim}{2}\right) \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones:

$$1+cos\sim = 2cos^2\left(\frac{\sim}{2}\right)$$

De donde obtenemos la fórmula para el coseno del ángulo mitad:

$$\boxed{cos\left(\frac{\sim}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cos\sim}{2}}}$$

(El signo dependerá del cuadrante en que esté $\frac{\sim}{2}$)

Si ahora restamos las dos ecuaciones del sistema anterior:

$$1-cos\sim = 2sen^2\left(\frac{\sim}{2}\right)$$

De donde obtenemos la fórmula para el coseno del ángulo mitad:

$$\boxed{sen\left(\frac{\sim}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\sim}{2}}}$$

(El signo dependerá del cuadrante en que esté $\frac{\sim}{2}$)

Y por último, al dividir las fórmulas anteriores obtenemos la de la tangente:

$$tg\left(\frac{\sim}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{\sim}{2}\right)}{cos\left(\frac{\sim}{2}\right)}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\sim}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cos\sim}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\left(\frac{\sim}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\sim}{1+cos\sim}}}$$

Ejercicios:

1.- Calcula $tg\frac{\text{®}}{8}$

2.- Si $tg\sim\ = -\sqrt{3}$ y α está en el cuarto cuadrante, calcular la tangente y la cosecante de $\frac{\sim}{2}$

3.- Calcular el $tg\left(\frac{\sim +\quad}{2}\right)$ sabiendo que

$$sen\sim\ = \frac{3}{5}\ ,\ 90^o < \sim < 180^o \quad ;\quad tg\quad = \frac{4}{3}\ ,\ 0^o < \quad < 90^o$$

5.- IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas son igualdades en las que aparecen razones trigonométricas. Para demostrar dichas identidades conviene en general partir de uno de los miembros de la igualdad y operando (sustituyendo fórmulas, simplificando,…) llegar al otro miembro.

Ejemplo 1:

Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{sen\sim - cos\sim}{tg\sim - 1} = cos\sim$$

Solución:

Sustituimos en la parte de la izquierda la tangente:

$$\frac{sen\sim - cos\sim}{tg\sim - 1} = \frac{sen\sim - cos\sim}{\frac{sen\sim}{cos\sim} - 1} = Operando\,en\,el\,deno\,min\,ador = \frac{sen\sim - cos\sim}{\frac{sen\sim - cos\sim}{cos\sim}} = \frac{cos\sim\left(sen\sim - cos\sim\right)}{sen\sim - cos\sim} = cos\sim$$

Y hemos llegado por tanto a lo que pretendíamos demostrar

Ejemplo 2:

Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{sen\left(\sim +\quad\right)}{sen\left(\sim -\quad\right)} = \frac{tg\sim + tg}{tg\sim - tg}$$

Solución:

Partimos del miembro de la izquierda y sustituimos las fórmulas del seno de la suma y diferencia de ángulos:

$$\frac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sen\beta}{sen\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sen\beta}=Dividiendo\ por\ cos\alpha\cdot cos\beta=$$

$$=\frac{\dfrac{sen\alpha\cdot cos\beta}{cos\alpha\cdot cos\beta}+\dfrac{cos\alpha\cdot sen\beta}{cos\alpha\cdot cos\beta}}{\dfrac{sen\alpha\cdot cos\beta}{cos\alpha\cdot cos\beta}-\dfrac{cos\alpha\cdot sen\beta}{cos\alpha\cdot cos\beta}}=Simplificando=\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$$

Con lo que queda demostrada la identidad

Ejemplo 3:

Demuestra la siguiente identidad:

$$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2sen\alpha-sen(2\alpha)}{2sen\alpha+sen(2\alpha)}$$

Solución:

Partimos en este caso de la parte derecha y aplicamos las fórmulas del ángulo doble:

$$\frac{2sen\alpha-sen(2\alpha)}{2sen\alpha+sen(2\alpha)}=\frac{2sen\alpha-2sen\alpha\cdot cos\alpha}{2sen\alpha+2sen\alpha\cdot cos\alpha}=sacando\ factor\ común=$$

$$=\frac{2sen\alpha(1-cos\alpha)}{2sen\alpha(1+cos\alpha)}=simplificando=\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$$

Que es justamente el cuadrado de la fórmula de la tangente del ángulo mitad

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}\ \Rightarrow\ tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$$

Con lo que queda demostrada la identidad

Ejercicio:

Demuestra las siguientes identidades:

$a)\ sen(2\alpha)+1=(sen\alpha+cos\alpha)^2$

$b)\ \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)}=\dfrac{tg\alpha\cdot cot\,g\beta+1}{tg\alpha\cdot cot\,g\beta-1}$

$c)\ sen\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)-cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\,cos\alpha$

$d)\ 2tg\alpha\cdot cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)-sen\alpha=tg\alpha$

$e)\ cos\alpha\cdot cos(\alpha-\beta)+sen\alpha\cdot sen(\alpha-\beta)=cos\beta$

$f)\ \dfrac{cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{cos(2\alpha)}=\dfrac{1}{2}$

6.- ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son aquellas en las que la incógnita en las que aparecen razones trigonométricas y la incógnita es un ángulo.

Por ejemplo: $2senx = 1$; $senx + cos\,x = 1$; $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos\,x = \frac{1}{2}$

Empezamos resolviendo algunas ecuaciones trigonométricas sencillas, en las que sólo interviene una razón trigonométrica y un ángulo *x*:

- $2senx = 1 \;\Rightarrow\; senx = \frac{1}{2}$

  Es en este momento recordamos las razones trigonométricas de los ángulos conocidos, y por tanto $x = 30^o$.

  Pero existe otro ángulo en una circunferencia con el mismo seno (en este caso en el segundo cuadrante al ser positivo): $x = 180^o - 30^o = 150^o$

  Luego en una circunferencia esta ecuación tiene 2 soluciones, pero en realidad existen infinitas soluciones obtenidas al dar vueltas a la circunferencia.
  Expresaremos por tanto las soluciones de esta ecuación como:

  $$\begin{matrix} x = 30^o + 360^o\,k \\ x = 150^o + 360^o\,k \end{matrix} \quad , \quad \text{o en radianes} \quad \begin{matrix} x = \frac{®}{6} + 2k® \\ x = \frac{5®}{6} + 2k® \end{matrix}$$

Nota: siempre expresaremos las soluciones en radianes

- $cos\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

  El coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en 45º. Al ser negativo, buscamos los ángulos asociados a 45º del segundo y tercer cuadrante (180º - α y 180º + α)

  Luego las soluciones serán: $\left\{\begin{matrix} x = 135^o + 360^o\,k \\ x = 225^o + 360^o\,k \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} x = \frac{3®}{4} + 2k® \\ x = \frac{5®}{4} + 2k® \end{matrix}\right.$

- $tgx = -\sqrt{3}$

  La tangente vale $\sqrt{3}$ en 60º, luego será negativa en los ángulos correspondientes al segundo y cuarto cuadrante (180º - α y 360º - α)

  Luego las soluciones serán: $\left\{\begin{matrix} x = 120^o + 360^o\,k \\ x = 300^o + 360^o\,k \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} x = \frac{2®}{3} + 2k® \\ x = \frac{5®}{3} + 2k® \end{matrix}\right.$

- $sen\left(2x\right)=1$

  El único ángulo donde el seno vale 1 es el de 90º

  Por tanto $\quad 2x=90^o \quad \Rightarrow \quad x=45^o \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\circledR}{4}+2k\circledR$

Ejercicio:

Resuelve:

$a)\cos x=-\frac{1}{2} \qquad b)\cot gx=-1 \qquad c)\cos ecx=-2$

$d)senx=0 \qquad e)3\sec x+2\sqrt{3}=0 \qquad f)\cos\left(3x\right)=\frac{1}{2}$

Más complicadas resultan aquellas ecuaciones en las que aparecen distintas razones trigonométricas y distintos ángulos. Como pasos aconsejables a seguir en la resolución de estas ecuaciones están:

1. *Expresar todo en función de un mismo ángulo*
2. *Expresar todo en función de una sola razón trigonométrica*
3. *Resolver la ecuación resultante*
4. *Comprobar las soluciones en la ecuación original*

Vemos algunos ejemplos:

- $2sen^2x+3\cos x=3$

  En este caso sustituimos el sen^2x en función del coseno y resolvemos la ecuación de segundo grado correspondiente:

$$2\left(1-\cos^2 x\right)+3\cos x=3 \quad \Rightarrow \quad 2-2\cos^2 x+3\cos x=3 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2 x-3\cos x+1=0$$

$$\cos x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}=\begin{cases}\cos x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Si $\cos x=1 \quad \Rightarrow \quad x=0^o$

Si $\cos x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=60^o \\ x=300^o\end{cases}$

Tenemos por tanto 3 posibles soluciones de la ecuación. Es fácil comprobar que todas cumplen la ecuación inicial, por tanto, las soluciones de esta ecuación son:

$x=0+2k\circledR \quad ; \quad x=\frac{\circledR}{3}+2k\circledR \quad ; \quad x=\frac{5\circledR}{3}+2k\circledR$

- $senx + cos\, x = \sqrt{2}$

Como hay dos razones trigonométricas, sustituimos, de la fórmula fundamental, el seno o el coseno en función de la otra razón trigonométrica, es decir:

$$senx + \sqrt{1 - sen^2 x} = \sqrt{2}$$

Y ya sólo queda resolver esta ecuación radical (dejar la raíz sola, elevar al cuadrado,…):

$$\sqrt{1 - sen^2 x} = \sqrt{2} - senx \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{1 - sen^2 x}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - senx\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 - sen^2 x = 2 + sen^2 x - 2\sqrt{2} senx \quad \Rightarrow \quad 2sen^2 x - 2\sqrt{2} senx + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos:

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 45^o \\ x = 135^o \end{cases}$$

Al comprobar las dos posibles soluciones en la ecuación inicial, vemos que la de 135º no la cumple. Por tanto, la solución de esta ecuación (que en realidad son infinitas) es:

$$x = \frac{®}{4} + 2k®$$

- $cos\left(\frac{®}{6} + x\right) = senx$

Desarrollamos el coseno de la suma y sustituimos los valores conocidos:

$$cos\frac{®}{6} \cdot cos\, x - sen\frac{®}{6} \cdot senx = senx \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} cos\, x - \frac{1}{2} senx = senx$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\, cos\, x - senx = 2senx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\, cos\, x = 3senx$$

Sustituyendo el coseno en función del seno y elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - sen^2 x}\right)^2 = \left(3senx\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 3 - 3sen^2 x = 9sen^2 x$$

$$\Rightarrow \quad 3 = 12sen^2 x \quad \Rightarrow \quad sen^2 x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad senx = \pm\frac{1}{2}$$

Calculamos *x* en cada caso:

$$Si \;\; senx = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 30^o \\ x = 150^o \end{cases} \quad ; \quad Si \;\; senx = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 210^o \\ x = 330^o \end{cases}$$

Al comprobar las soluciones, no sirven ni 150º ni 330º, luego las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{®}{6} + 2k® \quad ; \quad x = \frac{7®}{6} + 2k®$$

- $sen2x - tgx = 0$

Sustituyendo el seno del ángulo doble y la tangente: $2senx\cos x - \dfrac{senx}{\cos x} = 0$

Quitando denominadores y sacando factor común:

$2senx\cos^2 x - senx = 0 \quad \Rightarrow \quad senx\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$

De donde:

O bien $senx = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0^o \\ x = 180^o \end{cases}$

O bien $2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$Si \;\; \cos x = +\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 45^o \\ x = 315^o \end{cases}$

$Si \;\; \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 135^o \\ x = 225^o \end{cases}$

Al comprobar vemos que sirven todas, y por tanto las soluciones de esta ecuación son:

$x = 0 + 2k\circledR \quad ; \quad x = \circledR + 2k\circledR$

$x = \dfrac{\circledR}{4} + 2k\circledR \quad ; \quad x = \dfrac{3\circledR}{4} + 2k\circledR \quad ; \quad x = \dfrac{5\circledR}{4} + 2k\circledR \quad ; \quad x = \dfrac{7\circledR}{4} + 2k\circledR$

Ejercicio:

Resuelve:

$a)\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$ $\qquad b)tgx \cdot \sec x = \sqrt{2}$ $\qquad c)4sen\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\cos x = 3$

$d)\dfrac{sen\left(x + \dfrac{\circledR}{6}\right)}{\cos\left(x + \dfrac{\circledR}{3}\right)} = 1$ $\qquad e)3\cos x \cdot \cos 2x - 2\cos^3 x = 0$ $\qquad f)tg2x + tgx = 0$

$g)sen\left(\circledR - x\right) = \cos\left(\dfrac{3\circledR}{2} - x\right) + \cos\circledR$ $\qquad h)sen\left(\dfrac{\circledR}{4} - x\right) + \sqrt{2}senx = 0$ $\qquad i)tg2x + 2\cos x = 0$

7.- SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Por supuesto son sistemas en los que aparecen ecuaciones trigonométricas. Los métodos de resolución son los habituales (sustitución, reducción o igualación), si bien el más habitual es el de sustitución. Vemos algunos ejemplos:

- $\begin{cases} sen x + sen y = 1 \\ x + y = \dfrac{®}{2} \end{cases}$

Por sustitución, despejamos en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = \frac{®}{2} - x \quad \Rightarrow \quad sen x + sen\left(\frac{®}{2} - x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad sen x + cos\, x = 1$$

Y ahora resolvemos la ecuación trigonométrica obtenida poniendo el seno en función del coseno (o al revés):

$$\sqrt{1 - cos^2 x} = 1 - cos\, x \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{1 - cos^2 x}\right)^2 = \left(1 - cos\, x\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 - cos^2 x = 1 + cos^2 x - 2 cos\, x \quad \Rightarrow \quad 2 cos^2 x - 2 cos\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad cos^2 x - cos\, x = 0$$

$$\Rightarrow \; cos\, x\left(cos\, x - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} cos\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 90^o \; , \; x = 270^o \\ cos\, x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0^o \end{cases}$$

Nota: ***en los sistemas de ecuaciones trigonométricas nos quedaremos, por simplificar, únicamente con las soluciones del primer cuadrante***

Así pues, si $x = 90^o \Rightarrow y = 0^o$
$x = 0^o \Rightarrow y = 90^o$

Luego este sistema tiene dos soluciones en el primer cuadrante, que serán:

$$\left(90^o , 0^o\right) \; y \; \left(0^o , 90^o\right) \approx \left(\frac{®}{2}, 0\right) \; y \; \left(0, \frac{®}{2}\right)$$

- $\begin{cases} sen x - sen y = \dfrac{1}{2} \\ cos\left(x + y\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

En la segunda ecuación podríamos desarrollar la fórmula del coseno de la suma, pero sólo conseguiríamos complicar la ecuación.

Podemos deducir que si $cos\left(x + y\right) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x + y = 120^o$

Ahora despejamos y sustituimos en la primera ecuación: $x = 120^o - y$

$$sen\left(120^o - y\right) - seny = \frac{1}{2} \Rightarrow sen120^o \cdot cos\, y - cos\,120^o \cdot seny - seny = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}cos\, y + \frac{1}{2}seny - seny = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{3}\, cos\, y + seny - 2seny = 1 \Rightarrow \sqrt{3}\, cos\, y = 1 + seny$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\sqrt{1 - sen^2 x} = 1 + seny \Rightarrow 3 - 3sen^2 y = 1 + sen^2 y + 2seny \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4sen^2 y + 2seny - 2 = 0 \Rightarrow 2sen^2 y + seny - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow seny = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como trabajamos sólo con soluciones del primer cuadrante $seny = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 30^o$

Y por tanto $x = 90^o$

Luego la solución del sistema es $\left(90^o, 30^o\right) \approx \left(\frac{\circledR}{2}, \frac{\circledR}{6}\right)$

➢ $\begin{cases} sen^2 x + cos^2 y = 1 \\ cos^2 x - sen^2 y = 1 \end{cases}$

Como aparecen cuatro razones trigonométricas, ponemos el sistema en función de dos de ellas:

$\begin{cases} sen^2 x + 1 - sen^2 y = 1 \\ 1 - sen^2 x - sen^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sen^2 x - sen^2 y = 0 \\ -sen^2 x - sen^2 y = 0 \end{cases}$ y ahora por reducción, sumando las dos ecuaciones:

$$-2sen^2 y = 0 \Rightarrow seny = 0 \Rightarrow y = 0^o$$

Si ahora sustituimos por ejemplo en la primera ecuación del sistema:

$$sen^2 x + 1 = 1 \Rightarrow sen^2 x = 0 \Rightarrow senx = 0 \Rightarrow x = 0^o$$

Luego la solución es $\left(0^o, 0^o\right) \approx \left(0, 0\right)$

Ejercicio:

Resuelve:

$$a)\begin{cases} senx+seny=\dfrac{3}{2} \\ senx\cdot seny=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} cos\left(x+y\right)=\dfrac{1}{2} \\ sen\left(x-y\right)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad c)\begin{cases} senx+seny=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ senx-seny=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} sen^2x+cos^2\,y=\dfrac{3}{4} \\ cos^2\,x-sen^2y=\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad e)\begin{cases} tgx+tgy=2 \\ x+y=\dfrac{\text{®}}{2} \end{cases} \qquad f)\begin{cases} senx\cdot cos\,y=\dfrac{1}{4} \\ cos\,x\cdot seny=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

EJERCICIOS

1.- Sabiendo que $sen\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, halla las razones trigonométricas de 2α y α/2.

2.- Sabiendo que tgα=1/2, halla tg(α+45º) y tg(45º-α).

3.- Sabiendo que $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ y que $\cos\alpha < 0$, calcular:

$a) tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad b) \cot g\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

4.- Sabiendo que $sec\alpha = -2$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcular:

$a) sen2\alpha \quad b) cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad c) sen\left(\alpha - 30^o\right) \quad d) tg\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \quad e) cosec\left(\alpha + 1650^o\right)$

5.- Si $sen\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $sen\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, calcular:

$a) \cos(\alpha - \beta) \quad b) sen(2\beta) \quad c) tg\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

6.- Calcula $cos\left(\alpha - \beta\right)$ sabiendo que $sen\alpha = \frac{4}{5}$ y $sen\beta = \frac{12}{13}$ y que α y β son ángulos del mismo cuadrante

7.- Si $tg\alpha = -2$, calcula $sen4\alpha$ y $cos4\alpha$

8.- Dos ángulos agudos α y β verifican que $7tg\alpha = 1$, $10sen^2\beta = 1$

a) ¿Cuál de los dos ángulos es mayor?

b) Calcula $tg\left(\alpha + 2\beta\right)$

c) Indica razonadamente cuál es el ángulo $\alpha + 2\beta$

9.- Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que $sen\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, calcular el valor de la tangente de α

10.- Simplifica las siguientes expresiones:

$a) \frac{sen2\alpha}{1 - cos^2\alpha} \qquad b) \frac{sen\alpha + cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \qquad c) sen2\alpha \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot cos2\alpha$

10.- Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

$a)\dfrac{\cos^2 a}{1+sena}=1-sena$ $\qquad b)\left(sena-\cos a\right)^2+\left(sena+\cos a\right)^2=2$

$c)tg\left(\dfrac{\circledR}{4}+a\right)\cdot tg\left(\dfrac{\circledR}{4}-a\right)=1$ $\qquad d)1+sen\left(2a\right)=\left(sena+\cos a\right)^2$

$e)sen\left(a+b\right)\cdot sen(a-b)=\cos^2 b-\cos^2 a$ $\qquad f)\left(sen\dfrac{a}{2}+\cos\dfrac{a}{2}\right)^2=1+sena$

$g)\ tg\left(\dfrac{\circledR}{4}+\sim\right)-tg\left(\dfrac{\circledR}{4}-\sim\right)=2tg\sim$ $\qquad h)2\cos\left(\dfrac{\circledR}{4}+\sim\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\circledR}{4}-\sim\right)=\cos 2\sim$

$i)\cos^2\left(\dfrac{\sim -}{2}\right)-\cos^2\left(\dfrac{\sim +}{2}\right)=sen\sim\cdot sen$ $\qquad j)sen\sim=\dfrac{2tg\left(\dfrac{\sim}{2}\right)}{1+tg^2\left(\dfrac{\sim}{2}\right)}$

11.- Resuelve las ecuaciones:

$a)tgx=\sqrt{2}\cos x$ $\qquad b)3\cos x=2\sec x-\dfrac{5}{2}$ $\qquad c)\dfrac{\cos x}{tgx}=\dfrac{3}{2}$

$d)6\cos^2 x+6sen^2x=5+senx$ $\qquad e)senx-2\cos(2x)=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad f)4sen\left(\dfrac{x}{2}\right)+2\cos x=3$

$g)6\cos^2 x+\cos\left(2x\right)=5$ $\qquad h)1+\cos x+\cos\left(2x\right)=0$ $\qquad i)\dfrac{1}{\cos x}=senx+\cos x$

$j)tg\left(\dfrac{\circledR}{4}+x\right)-3tgx=2$ $\qquad k)\cos x-\dfrac{2tgx}{1+tg^2x}=0$ $\qquad l)\cos^2\dfrac{x}{2}+\cos x=\dfrac{1}{2}$

$ll)senx-\sqrt{3}\cos x=2$ $\qquad m)tg\left(4x-\dfrac{\circledR}{4}\right)=-1$ $\qquad n)tg2x+tgx=0$

12.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)\left.\begin{array}{l}senx+seny=1\\ senx-seny=1\end{array}\right\}$ $\qquad b)\left.\begin{array}{r}\cos x+seny=\dfrac{3}{2}\\ y-x=\dfrac{\circledR}{6}\end{array}\right\}$ $\qquad c)\left.\begin{array}{r}\dfrac{senx}{seny}=2\\ x-y=\dfrac{\circledR}{3}\end{array}\right\}$

$d)\left.\begin{array}{c}x-2y=0\\ \cos x+seny=1\end{array}\right\}$ $\qquad e)\left.\begin{array}{r}senx+\cos y=1\\ x+y=\dfrac{\circledR}{2}\end{array}\right\}$ $\qquad f)\left.\begin{array}{r}sen^2x-\cos^2 y=\dfrac{1}{2}\\ \cos^2 x-\cos^2 y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$

$g)\left.\begin{array}{r}senx+seny=\dfrac{3}{2}\\ x+y=120^\circ\end{array}\right\}$ $\qquad h)\left.\begin{array}{r}senx+seny=\dfrac{3}{2}\\ \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$

13.- Responde razonadamente y sin usar la calculadora a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es posible que un ángulo tenga igual secante que cosecante?
b) Si senα=1’25, ¿cuánto vale cos(2α)?
c) Si un ángulo mide 1’5 radianes, ¿es agudo, obtuso o recto?
d) ¿Es cierto que $sen\left(12® - \sim\right) = sen\sim$?
e) Si un ángulo α pertenece al tercer cuadrante, ¿en qué cuadrante están $\frac{\sim}{2}$ y $2\sim$?
f) ¿Es cierto siempre que $sen\sim + sen \quad = sen\left(\sim + \quad\right)$?
g) Como $sen\left(2\sim\right) = 2sen\sim \cdot cos\sim$, entonces ¿$cos\,ec\left(2\sim\right) = 2\,cos\,ec\sim \cdot sec\sim$?

<u>Soluciones:</u>

1.- sen(2α)=24/25, cos(2α)=-7/25; sen(α/2)= $\frac{\sqrt{5}}{5}$, cos(α/2)= $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2.- 3; 1/3

3.- 3; 7

4.- $a)\frac{\sqrt{3}}{2} \quad b)-\frac{1}{2} \quad c)-\frac{1}{2} \quad d)-\sqrt{3} \quad e)1$

5.- a) 0 b) $-\frac{24}{25}$ c) $-\frac{2}{11}$

6.- $\frac{63}{65}$

7.- $\frac{24}{25}\ ;\ -\frac{7}{25}$

8.- a) β b) 1 c) 45º

9.- $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

10.- $a)2\cot g\sim \quad b)1 \quad c)sen\sim$

11.- a) 45, 135 b) 60, 300 c) 30, 150 d) 90 e) 30, 150, 228 y 312 (aprox.)

f) 60, 300 g) 30, 150, 210 y 330 h) 90, 120, 240 y 270

i) 0, 45, 135, 180, 225, 315 j) 30, 150, 210 y 330 k) 30, 150

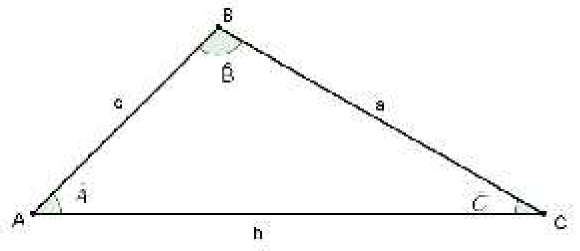
l) 90, 270 ll) 150 m) 45, 90 n) 0, 180, 30, 150, 210 y 330

12.- a) (90,0) b) (0,30), (60,90) c) (30,90) d) (60,30)
e) (30,60) f) (90,45) g) (30,90), (90,30) h) (90,30)

TEMA 3.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1.- INTRODUCCIÓN

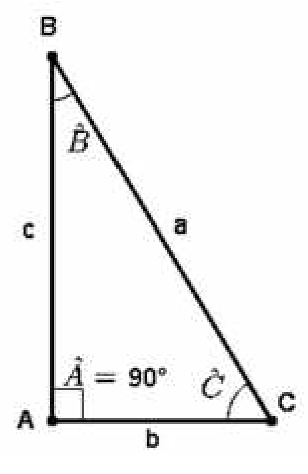
Resolver un triángulo en general consiste en conocer las medidas de sus tres lados y sus tres ángulos. Habitualmente nombraremos los vértices como *A*, *B* y *C*, sus ángulos correspondientes como $\hat{A}$,$\hat{B}$ y $\hat{C}$ y a los lados apuestos a cada vértice como *a*, *b* y *c*:



Los teoremas y propiedades que usaremos para la resolución de triángulos dependerán de si son o no triángulos rectángulos.

2.- TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En la resolución de los triángulos rectángulos, con sus elementos como el de la figura, usaremos por un lado que $\hat{B}+\hat{C}=90^o$, además del teorema de Pitágoras: $a^2=b^2+c^2$



Por otra parte las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$:

$$sen\hat{B}=\frac{b}{a} \quad , \quad cos\,\hat{B}=\frac{c}{a} \quad , \quad tg\hat{B}=\frac{b}{c}$$

$$sen\hat{C}=\frac{c}{a} \quad , \quad cos\,\hat{C}=\frac{b}{a} \quad , \quad tg\hat{C}=\frac{c}{b}$$

Conviene tener en cuenta que bastan dos datos para resolver estos triángulos, y que no hay una única manera de resolver un triángulo rectángulo, sino que usando de formas diferentes las fórmulas anteriores se puede llegar igualmente a la solución.

Ejemplo 1:

Resolver un triángulo rectángulo del que se conocen un cateto b = 15 cm y el ángulo $\hat{C}$ *=50º*

Solución:

Claramente el ángulo $\hat{B}$ será $\hat{B} = 90^o - 50^o = 40^o$
Podemos calcular el cateto *c* por ejemplo con:

$$tg\hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot tg\hat{C} \Rightarrow c = 15 \cdot tg50^o \approx 17'88\,cm.$$

Sólo falta calcular la hipotenusa, por ejemplo con:

$$\cos\hat{C} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{\cos\hat{C}} = \frac{15}{\cos 50^o} \approx 23'34\,cm.$$

Ejemplo 2:

Resolver un triángulo rectángulo del que se conocen un cateto b = 11 cm y la hipotenusa a = 20 cm.

Solución:

Por Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 400 - 121 = 279 \quad \Rightarrow \quad c \approx 16'7\,cm$

Para calcular los ángulos:

$$sen\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{11}{20} = 0'55 \Rightarrow \hat{B} = arcsen(0'55) \approx 33'37^o$$
$$\hat{C} = 90^o - 33'37^o = 56'63^o$$

Ejemplo 3:

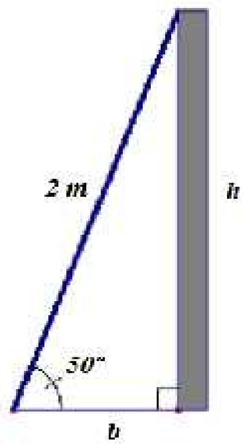
Una escalera de 2 m. está apoyada en una pared formando un ángulo de 50º con el suelo. Halla la altura a la que llega y la distancia que separa su base de la pared

Solución:

A la vista del dibujo: $sen50^o = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2sen50^o = 1'53\,m$

Para sacar *b*, por ejemplo: $\cos 50^o = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2\cos 50^o = 1'29\,m$

Luego la escalera alcanza una altura en la pared de 1’53 m y se encuentra situada a 1’29 m de dicha pared

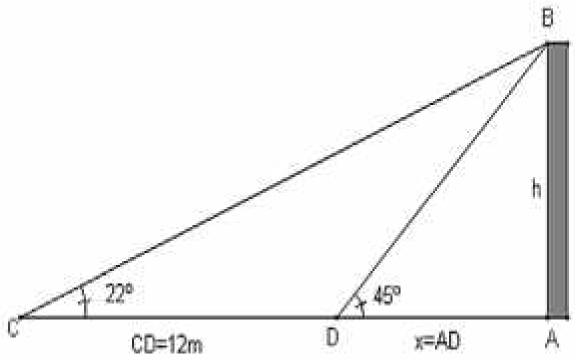


Ejemplo 4:

El ángulo de elevación del punto más alto de una torre medido desde un punto C del suelo es de 22º. Avanzamos 12 m. hacia la torre y dicho ángulo es ahora de 45º. Calcular la altura de la torre

Solución:

En primer lugar representamos gráficamente el problema:



En el triángulo DAB: $tg\,45^o = \dfrac{h}{x}$

En el triángulo CAB: $tg\,22^o = \dfrac{h}{x+12}$

Tenemos por tanto dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvemos por igualación despejando *h*:

$$\left.\begin{array}{r} h = x\,tg\,45^o \\ h = (x+12)\,tg\,22^o \end{array}\right\} \Rightarrow \; x\,tg\,45^o = (x+12)\,tg\,22^o \;\Rightarrow\; x = 0'404(x+12)$$

$$\Rightarrow \; x = 0'404x + 4'848 \;\Rightarrow\; 0'596x = 4'848 \;\Rightarrow\; x \approx 8'13$$

Luego la torre mide aproximadamente 8’13 m.

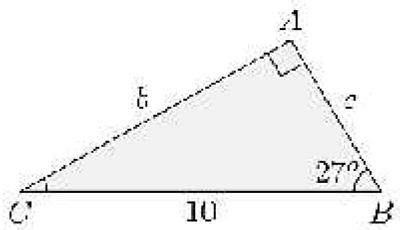
Nota: estos problemas “de doble medida” son un ejemplo clásico de aplicación de triángulos rectángulos, y se suele usar la tangente en su resolución

Ejercicios:

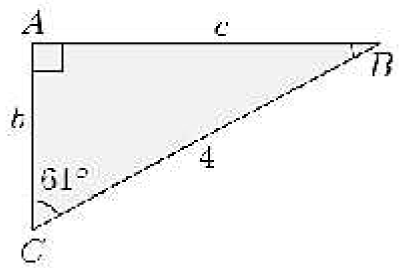
1.- La base de un triángulo isósceles mide 55 cm., y su lados iguales 39 cm. Calcula los ángulos del triángulo

2.- Resuelve:

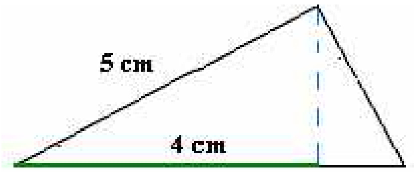
(a)



(b)



3.- En un triángulo rectángulo, un cateto mide 5 cm, y su proyección sobre la hipotenusa, 4 cm.
Calcula la longitud de la hipotenusa y del otro cateto

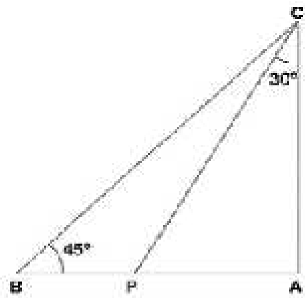


4.- Calcula el lado y la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm.

5.- Un montículo es observado por una persona desde el suelo bajo un ángulo de 55º. Otra persona, situada a 150 metros de la primera y al otro lado del montículo, lo observa con un ángulo de 75º. Calcula la altura del montículo y las distancias que hay entre el montículo y cada persona.

6.- Con un teodolito de 1’5 m de altura, situado a 75 m de una torre, se ha observado ésta con un ángulo de 40º con la horizontal. Halla la altura de la torre.

7.- Calcula el perímetro del triángulo rectángulo *ABC*, sabiendo que la longitud del segmento CP es $2\sqrt{3}$ cm.



8.- En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa con un ángulo de elevación de 50º, y el punto más alto del edificio con un ángulo de elevación de 40º. Halla la altura del edificio.

3.- TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Para resolver un triángulo no rectángulo usaremos, además del hecho de que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$, dos teoremas especiales que amplían lo visto en triángulos rectángulos.

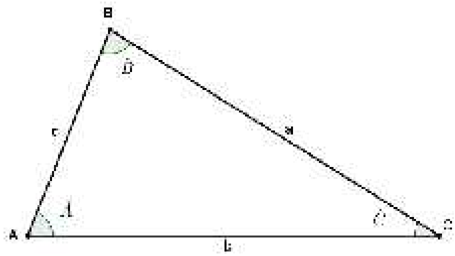
Conviene destacar que la resolución de un triángulo cualquiera puede tener una solución única, dos soluciones o ninguna solución, dependiendo de los datos, y que para que un triángulo tenga sentido al ángulo mayor le tiene que corresponder el lado opuesto mayor, y que al ángulo menor le tiene que corresponder el lado opuesto menor, por la propia definición de ángulo. Esto es algo que deberemos comprobar en las posibles soluciones siempre que resolvamos un triángulo.

Veamos ahora los dos teoremas que vamos a utilizar:

Teorema del Seno

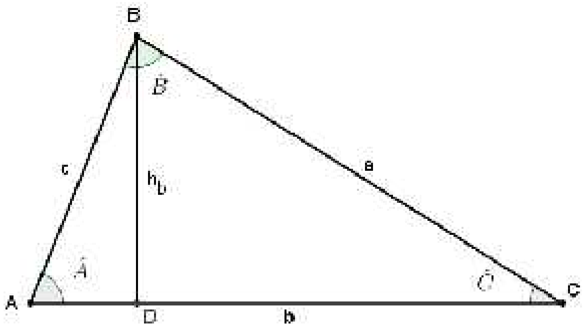
"Los lados de un triángulo cualquiera son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos", es decir:

$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}}$$



Demostración:

La altura h_b correspondiente al vértice B divide al triángulo en dos triángulos rectángulos



En ADB:

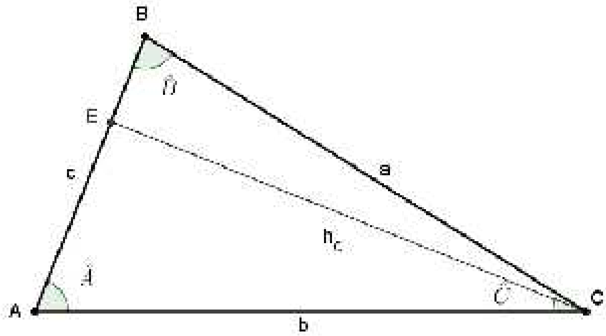
$$sen\hat{A}=\frac{h_b}{c}\ \Rightarrow\ h_b=c\cdot sen\hat{A}$$

En CDB:

$$sen\hat{C}=\frac{h_b}{a}\ \Rightarrow\ h_b=a\cdot sen\hat{C}$$

De donde igualando obtenemos: $c\cdot sen\hat{A}=a\cdot sen\hat{C}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{sen\hat{A}}=\dfrac{c}{sen\hat{C}}$

Si hacemos lo mismo con la altura correspondiente al vértice C:



En AEC:

$$sen\hat{A}=\frac{h_c}{b}\ \Rightarrow\ h_c=b\cdot sen\hat{A}$$

En CEB:

$$sen\hat{B}=\frac{h_c}{a}\ \Rightarrow\ h_c=a\cdot sen\hat{B}$$

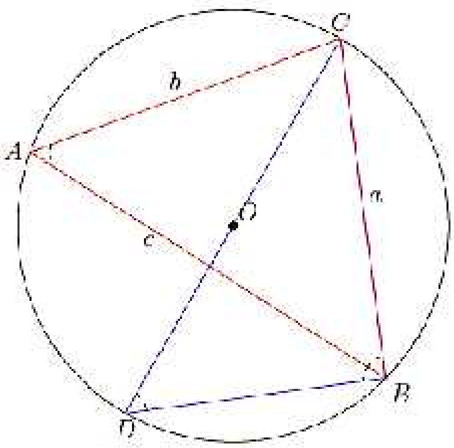
De donde igualando obtenemos: $b\cdot sen\hat{A}=a\cdot sen\hat{B}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{sen\hat{A}}=\dfrac{b}{sen\hat{B}}$

Y uniendo ambas igualdades obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Curiosidad:

Si construímos la circunferencia de radio *r* circunscrita al triángulo ABC y trazamos el diámetro CD:



En ABC: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$

En el triángulo DBC el ángulo $\hat{B}$ es de 90º por abarcar un diámetro, y aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\hat{D}} = \frac{2r}{sen90^o} = 2r$$

Como los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$ por abarcar el mismo arco (a):

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2r$$

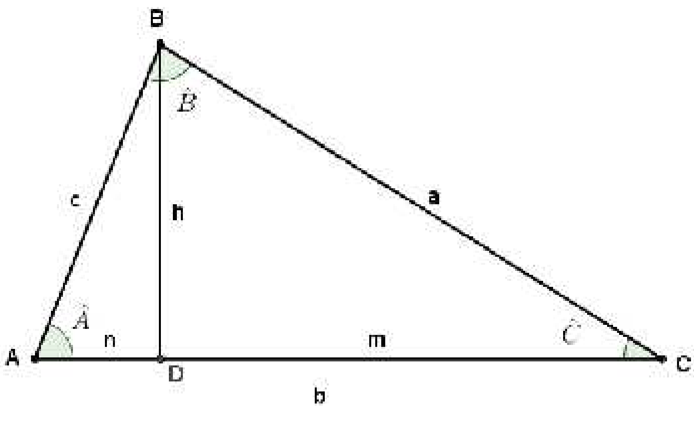
Luego la proporción entre los lados de un triángulo y los senos de sus ángulos opuestos coincide con el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo

Teorema del Coseno

"En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de dichos lados por el coseno del ángulo que forman", es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \end{aligned}}$$

Demostración:



La altura *h* divide al triángulo en dos triángulos rectángulos.

En BDC: $a^2 = m^2 + h^2$

Como $m = b - n$, y además en ADB $h^2 = c^2 - n^2$:

$$a^2 = (b-n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + n^2 - 2bn + c^2 - n^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$

En ADB: $\cos\hat{A} = \frac{n}{c} \;\Rightarrow\; n = c\cos\hat{A}$

Luego $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Las otras dos igualdades se demuestran obviamente tomando las otras alturas del triángulo.

Nota: Si el triángulo fuera rectángulo por ejemplo en el ángulo $\hat{A}$, quedaría justo el Teorema de Pitágoras. Es decir, el Teorema del Coseno es una ampliación del Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos.

Consideraciones a tener en cuenta para resolver triángulos

- Cuando calculamos un ángulo usando el Teorema del Seno, al despejar aparece una expresión como: $sen\hat{A} = 0'72$
  Con la calculadora obtenemos $\hat{A} = arcsen(0'72) \approx 46^o$
  Pero existe otro posible ángulo en un triángulo cuyo seno valga eso: $\hat{A} = 180^o - 46^o = 134^o$
  Eso da lugar a dos posibles soluciones que hay que tener en cuenta

- También podría pasar que $sen\hat{A}' = 1'12$, lo cual es imposible y por tanto el triángulo no tendría solución

- Cuando aparezcan varias posibles soluciones, hay que comprobar su validez teniendo en cuenta que, como ya comentamos, al ángulo mayor le corresponde el lado opuesto mayor y al ángulo menor el lado opuesto menor

- Es por todo esto, y para evitar calcular soluciones que luego no sirvan, por lo que usaremos como norma general el Teorema del Coseno a la hora de calcular ángulos (el tercer ángulo se calcula sabiendo que suman 180º)

- Podemos guiarnos por la siguiente tabla, aunque no es estrictamente necesario si tenemos en cuenta el punto anterior:

I. Dos ángulos y un lado	**II. Dos lados y el ángulo comprendido**	**III. Dos lados y el ángulo no comprendido**	**IV. Tres lados**
• Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$ • Los otros dos lados con el Teorema del Seno	• Tercer lado y un ángulo con el Teorema del Coseno • Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$	• Segundo ángulo con el Teorema del Seno • Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$ • Tercer lado con el Teorema del Seno	• Dos ángulos con el Teorema del Coseno • Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$
Solución única	Solución única	Una, dos o ninguna solución	Una o ninguna solución

Ejemplo 1:

Resuelve un triángulo en el que a = 5cm., $\hat{B} = 40^o$, $\hat{C} = 60^o$

Solución:

El ángulo $\hat{A}$ será $\hat{A} = 180^o - 40^o - 60^o = 80^o$

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot sen\hat{B}}{sen\hat{A}} = \frac{5sen40^o}{sen80^o} = 3'26\,cm$$
$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot sen\hat{C}}{sen\hat{A}} = \frac{5sen60^o}{sen80^o} = 4'4\,cm$$

Ejemplo 2:

Resuelve un triángulo en el que a = 5cm., b = 7 cm., $\hat{C} = 50^o$

Solución:

Calculamos el tercer lado con el Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 25 + 49 - 70\cos 50^o = 29 \Rightarrow c = 5'39\,cm.$$

Usamos de nuevo el Teorema del Coseno para calcular el ángulo $\hat{A}$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 29 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 5'39} = 0'702 \Rightarrow \hat{A} = 45'41^o$$

Y el otro ángulo será $\hat{B} = 180^o - 50^o - 45'41^o = 84'59^o$

Ejemplo 3:

Resuelve un triángulo en el que a = 3cm., b = 5 cm., c = 10 cm.

Solución:

Por el Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 100 - 9}{100} = 1'16$$

Como no existe ningún ángulo cuyo coseno sea mayor que 1, este triángulo no tiene solución

Ejemplo 4:

Resuelve un triángulo en el que a = 4cm., b = 5 cm., $\hat{A} = 45^o$

Solución:

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad sen\hat{B} = \frac{b \cdot sen\hat{A}}{a} = \frac{5sen45^o}{4} = 0'88 \quad \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 61'64^o \\ \hat{B}_2 = 180^o - 61'64^o = 118'36^o \end{cases}$$

Si $\hat{B}_1 = 61'64^o \quad \Rightarrow \quad \hat{C}_1 = 180^o - 45^o - 61'64^o = 73'36^o$

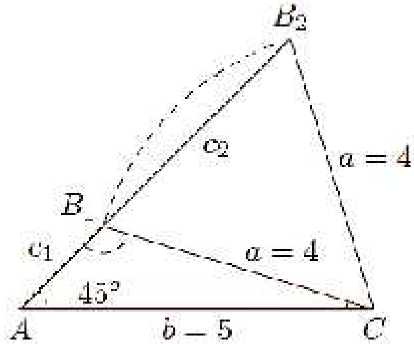
El lado *c* será: $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{c_1}{sen\hat{C}_1} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dfrac{a \cdot sen\hat{C}_1}{sen\hat{A}} = \dfrac{4sen73'36}{sen45} \approx 5'42\,cm$

Si $\hat{B}_2 = 118'36^o \quad \Rightarrow \quad \hat{C}_2 = 180^o - 45^o - 118'36^o = 16'64^o$

El lado *c* será: $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{c_2}{sen\hat{C}_2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{a \cdot sen\hat{C}_2}{sen\hat{A}} = \dfrac{4sen16'64}{sen45} \approx 1'62\,cm$

Las dos posibles soluciones serán por tanto:

$a = 4\,cm$	$\hat{A} = 45^o$	$a = 4\,cm$	$\hat{A} = 45^o$
$b = 5\,cm$	$\hat{B}_1 = 61'64^o$	$b = 5\,cm$	$\hat{B}_2 = 118'36^o$
$c_1 = 5'42\,cm$	$\hat{C}_1 = 73'36^o$	$c_2 = 1'62\,cm$	$\hat{C}_2 = 16'64^o$



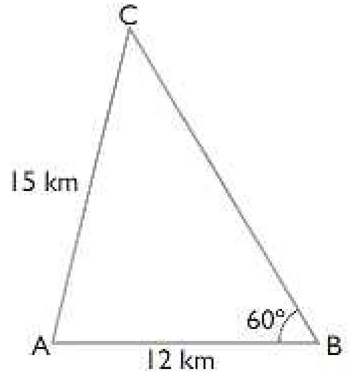
Y como podemos comprobar, ambas soluciones son válidas

Ejemplo 5:

Tres pueblos A,B y C están unidos por carreteras rectas que forman un triángulo; la distancia de A hasta B es de12 km, de A hasta C de 15 km y el ángulo que forman las visuales desde B hasta A y C mide 60°.Calcula la distancia del pueblo B al C

Solución:

En primer lugar, representamos gráficamente la situación planteada en el problema:



Conocemos dos lados y el ángulo no comprendido entre ellos:
$b = 15\ km.,\ c = 12\ km.,\ \hat{B} = 60^o$

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \Rightarrow sen\hat{C} = \frac{c \cdot sen\hat{B}}{b} = \frac{12 \cdot sen60^o}{15} = 0'69$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 43'63^o \\ \hat{C} = 136'37^o \end{cases}$$

La segunda solución no tiene sentido pues con el ángulo $\hat{B}$ ya sumarían más de 180º

Luego $\hat{C} = 43'63^o \Rightarrow \hat{A} = 180^o - 60^o - 43'63^o = 76'37^o$

Y de nuevo por el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \Rightarrow a = \frac{b \cdot sen\hat{A}}{sen\hat{B}} = \frac{15 \cdot sen76'37^o}{sen60^o} = 16'83$$

Luego la distancia de B a C es de *16'83 km.*

Ejercicios:

1.- Resuelve los siguientes triángulos:

$a)\ a = 12\,cm., b = 16\,cm., c = 10\,cm.$

$b)\ a = 7\,cm., b = 22\,cm., \hat{C} = 40^o$

$c)\ a = 4\,cm., \hat{B} = 45^o, \hat{C} = 60^o$

$d)\ a = 12\,cm., b = 15\,cm., \hat{A} = 48^o$

$e)\ b = 20\,cm., c = 14\,cm., \hat{A} = 35^o$

$f)\ a = 12'6\,cm., b = 26'4\,cm., \hat{B} = 124^o$

2.- Desde la puerta de mi casa veo el cine, que está a 120 m., y el quiosco, que está a 85 m., y el ángulo que forman ambas visuales es de 40º. Calcular la distancia entre el cine y el quiosco

3.- Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 kilómetros por hora, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 82º. ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

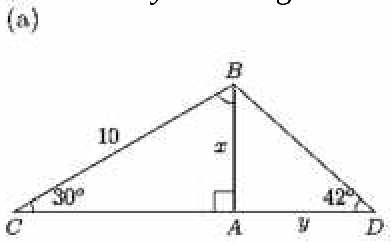
4.- El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC mide 72 cm. si dos de los ángulos del triángulo son de 60º y 45º. Resuelve el triángulo y calcula su área

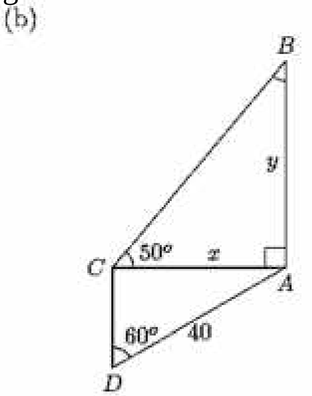
EJERCICIOS

1.- La base de un triángulo isósceles mide 20 m y el ángulo opuesto 74º. Calcula los lados y la superficie

2.- Una escalera de bomberos de 10 m. de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º, y si se apoya sobre la otra fachada dicho ángulo es de 30º. ¿Cuál es la anchura de la calle? ¿Qué altura se alcanza con la escalera sobre cada fachada?

3.- Calcular *x* e *y* en los siguientes triángulos:





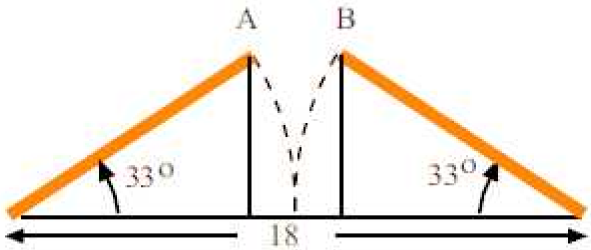
4.- Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30º. A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcular la altura de la montaña.

5.- Una montaña de 650 m. de altura separa dos pueblos A y B. Desde A se ve la cima C de la montaña con un ángulo de elevación de 24º, y desde B con 36º. ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos?

6.- Dos edificios están separados entre sí por 20 m. Desde la azotea de uno de ellos, de 40 m. de altura, veo la azotea del otro con un ángulo de elevación de 70º. Halla su altura.

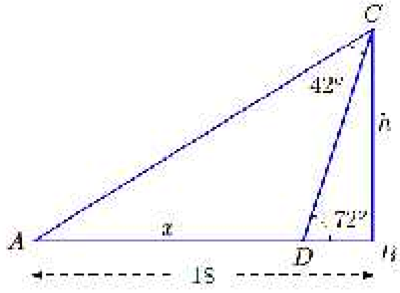
7.- Dos puentes levadizos iguales están elevados 33º, y sus bases separadas 18 m., como indica la figura:

¿Qué distancia separa los puntos A y B?

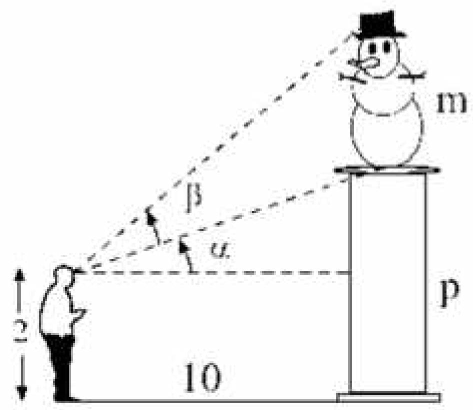


8.- Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9’2 cm.

9.- Calcular x y h en el siguiente gráfico:



10.- Una persona de 2 m. se sitúa a 10 m. de una estatua de longitud m sobre un pedestal de longitud p. Si calcula los ángulos $\alpha = 20º$ y $\beta = 15º$, halla la longitud de la estatua.



11.- Resolver los siguientes triángulos:

$a)\ a = 10, b = 9, \hat{C} = 70^o$

$b)\ a = 12, \hat{A} = 30^o, \hat{B} = 100^o$

$c)\ a = 4, b = 8, \hat{B} = 40^o$

$d)\ a = 6, b = 7, c = 8$

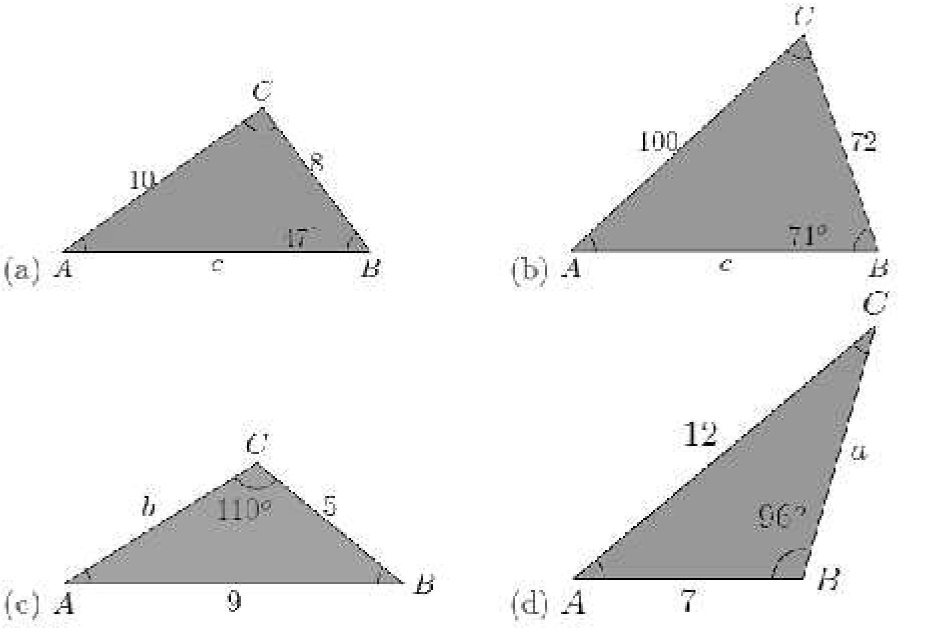
$e)\ a = 8, b = 12, c = 20$

$f)\ b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^o$

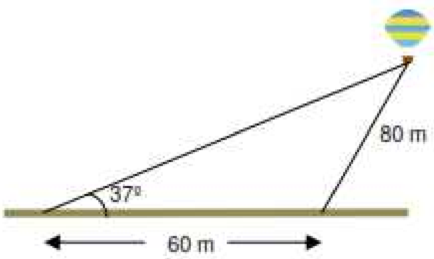
$g)\ a = 10, \hat{A} = 45^o, \hat{C} = 75^o$

$h)\ a = 1, c = \sqrt{3}, \hat{B} = 30^o$

12.- Hallar los elementos que faltan de cada triángulo:



13.- Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso.

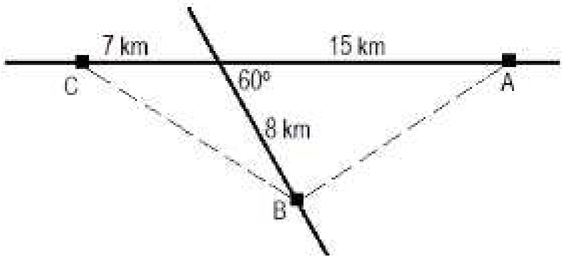


14.- Dos caminantes salen del mismo punto por dos caminos distintos que forman entre sí un ángulo de 120º. Uno anda a 5 km/h y el otro, a 3 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro al cabo de tres horas?

15.- Una señal de socorro de un teléfono móvil A se escucha desde dos antenas B y C separadas entre sí 25km,el ángulo B mide 54°y el ángulo C mide 66°.Calcula las distancias que hay desde cada una de las antenas B y C al teléfono móvil.

16.- Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20º y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120º. ¿Cuál es la anchura del río?

17.- Dos carreteras se cruzan con un ángulo de 60º. Desde dicho cruce, las distancias a tres pueblos A, B y C, son respectivamente 15, 8 y 7 km, tal como se indica en la figura. ¿Cuál de los pueblos A o C está más cerca de B en línea recta?



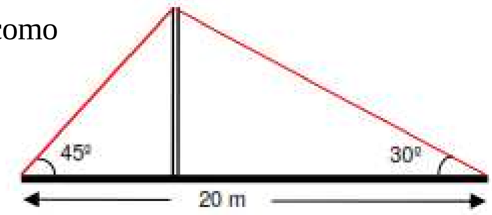
18.- Un solar tiene forma de triángulo y se conocen dos lados, que miden 18 m y 23 m, y el ángulo que forman, que es de 125°. Si el m^2 vale 30 €, calcular el valor del solar

19.- Desde dos puntos de la orilla, A y B, separados entre sí 450 m., observamos dos barcos C y D. Con un teodolito se han medido los ángulos: CAD = 48°, BAD = 57°,ABC = 42°y CBD = 53°. Calcular la distancia entre los dos barcos.

20.- Desde mi casa veo la fuente que está en el centro de la plaza mayor y también veo el ayuntamiento, que sé que está al menos a 50 m. He preparado un teodolito para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha dado 26º23'. La distancia desde mi casa a la fuente es de 40 m y la distancia de la fuente al ayuntamiento es de 30 m. ¿Qué distancia hay desde mi casa al ayuntamiento?

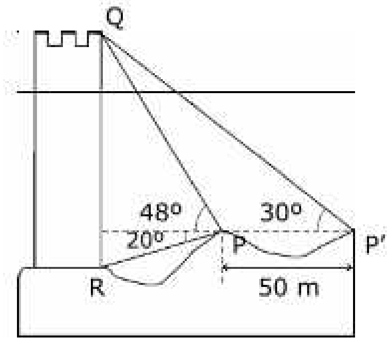
21.- Antonio y Beatriz se encuentran en una misma orilla de un río separados por 60 m. Carlos está en un punto de la otra orilla. Las visuales desde Antonio a Beatriz y arlos forman 60º, y desde Beatriz a Antonio y Carlos 80º. Halla la anchura del río

22.- Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?



23.- El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m.

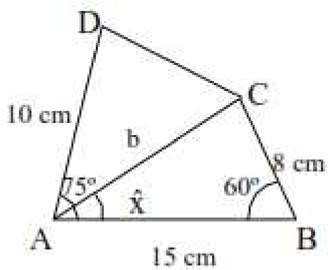
24.- Halla la altura de la torre QR, de pie inaccesible, con los datos de la figura:



25.- Dos automóviles parten de un punto al mismo tiempo. Uno va hacia el Este a una velocidad de 120 km/h, y el otro hacia el Noroeste a 100 km/h. Al cabo de una hora y media ¿qué distancia los separa?

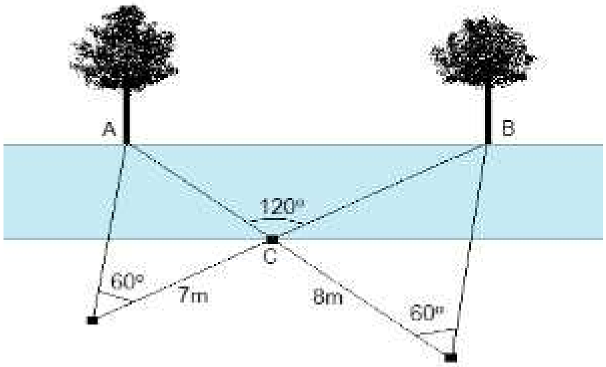
26.- Demostrar que en un triángulo cualquiera, su área es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.
Utilizar el resultado anterior para calcular el área de un triángulo en el que
$a = 8\,cm.,\ \hat{B} = 30^o\ ,\ \hat{C} = 45^o$

27.- Halla $b,\ \hat{X}$ y el área de la figura:

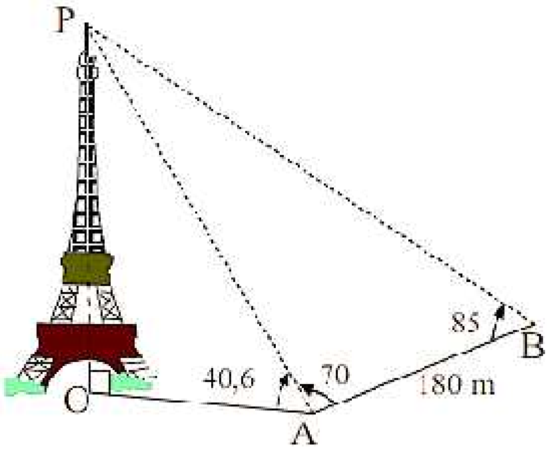


28.- Las diagonales de un paralelogramo miden 15 y 12 m., y forman un ángulo de 60º. Halla la longitud de sus lados.

29.- Desde un punto C de la orilla de un río, se observan dos árboles A y B situados en la orilla opuesta bajo un ángulo de 120º. Si nos alejamos 8m desde C en la dirección opuesta al árbol A, el ángulo medido entre los dos árboles es ahora de 60º. Y si nos alejamos 7m, también desde C pero en la dirección opuesta al árbol B, se mide también un ángulo de 60º. Calcula de forma exacta la distancia AB entre los árboles.

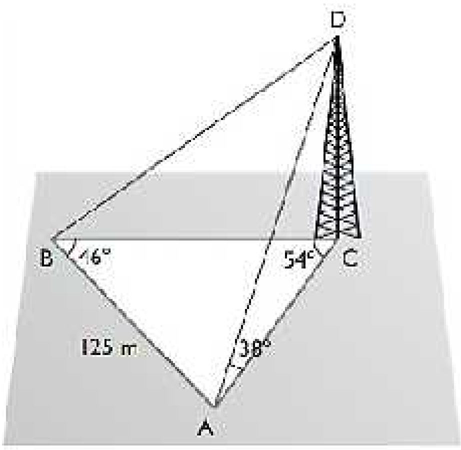


30.- Para calcular la altura de la torre Eiffel una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados entre sí 180 m. Calcula la OP de la torre Eiffel.



31.- Dos automóviles salen del mismo punto a las 10 h de la mañana en direcciones que forman entre sí 72º. Uno va a 90 km/h y otro a 82 km/h. ¿A qué hora les separarán 126 km?

32.- Con los datos de la figura, calcular la altura CD de la torre:



<u>*Soluciones: (aproximadas)*</u>

1.- 16’62m. ; 132’7 m^2

2.- 15’73 m; 7’07 y 5 m.

3.- a) x = 5, y = 5’55 b) x = 34’64, y = 41’28

4.- 136’6 m.

5.- 2354’56 m.

6.- 90’95 m.

7.- 2’9 m.

8.- a = 9’55 cm.; Área = 307’51 cm^2

9.- h = 3’46, x = 14’6

10.- 3’36 m.

11.-
$a)\ a = 10 \quad b = 9 \quad c = 10.93 \qquad \hat{A} = 59{,}3^o \quad \hat{B} = 50{,}7^o \quad \hat{C} = 70^o$

$b)\ a = 12 \quad b = 23{,}63 \quad c = 18{,}38 \qquad \hat{A} = 30^o \quad \hat{B} = 10^o \quad \hat{C} = 50^o$

$c)\ a = 4 \quad b = 8 \quad c = 10{,}64 \qquad \hat{A} = 18{,}71^o \quad \hat{B} = 40^o \quad \hat{C} = 121{,}25^o$

$d)\ a = 6 \quad b = 7 \quad c = 8 \qquad \hat{A} = 46{,}56^o \quad \hat{B} = 57{,}9^o \quad \hat{C} = 75{,}5^o$

$e)\ a = 8 \quad b = 12 \quad c = 20 \Longrightarrow$ no tiene solución.

$f)\ b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^o \longrightarrow$ no tiene solución.

$g)\ a = 8{,}16 \quad b = 10 \quad c = 11{,}15 \qquad \hat{A} = 45^o \quad \hat{B} = 60^o \quad \hat{C} = 75^o$

$h)\ a = 1 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{3} \qquad \hat{A} = 30^o \quad \hat{B} = 30^o \quad \hat{C} = 120^o$

12.-
a) $\hat{A} = 35'8^o \ , \ \hat{C} = 97'19^o \ , c = 13'56$
b) $\hat{A} = 42'9^o \ , \ \hat{C} = 66'1^o \ , c = 96'69$
c) $\hat{A} = 31'5^o \ , \ \hat{B} = 38'5^o \ , b = 5'97$
d) $\hat{A} = 48'54^o \ , \ \hat{C} = 35'46^o \ , a = 9'04$

13.- 71’8 m. y 119’31 m.

14.- 21 km.

15.- 26’37 y 23’35 km.

16.- 53’21 m.

17.- Los dos igual

18.- 5086’8 €

19.- 715 m.

20.- 60’11 m.

21.- 59’9 m.

22.- Cable 25 m.; mástil 7’32 m.

23.- 87’89º

24.- 79’82 m.

25.- 305’1 km

26.- Área = 11’71 cm^2

27.- b = 13 cm., $\hat{X} = 32'2^o$, Área = 114’75 cm^2

28.- 6’87 y 11’72 m.

29.- 13 m.

30.- 276’1 m.

31.- 11h 15’

32.- 86’83 m.

FORMULARIO

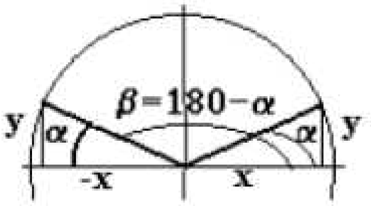
Relaciones Fundamentales

$\boxed{sen^2\sim + cos^2\sim = 1}$ $\boxed{1 + tg^2\sim = sec^2\sim}$ $\boxed{1 + cotg^2\sim = cosec^2\sim}$

Relaciones entre Cuadrantes

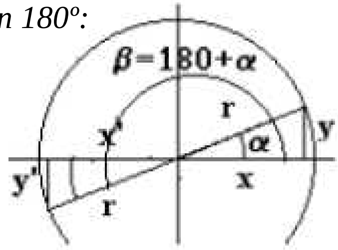
Ángulos suplementarios:

$$sen(180^o - \sim) = sen\sim$$
$$cos(180^o - \sim) = -cos\sim$$
$$tg(180^o - \sim) = -tg\sim$$



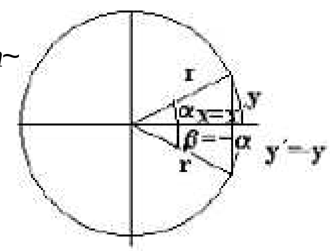
Ángulos que difieren en 180º:

$$sen(180^o + \sim) = -sen\sim$$
$$cos(180^o + \sim) = -cos\sim$$
$$tg(180^o + \sim) = tg\sim$$



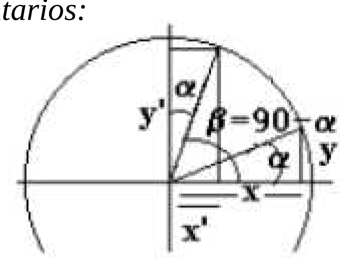
Ángulos opuestos:

$$sen(360^o - \sim) = sen(-\sim) = -sen\sim$$
$$cos(360^o - \sim) = cos(-\sim) = cos\sim$$
$$tg(360^o - \sim) = tg(-\sim) = -tg\sim$$



Ángulos complementarios:

$$sen(90^o - \sim) = cos\sim$$
$$cos(90^o - \sim) = sen\sim$$
$$tg(90^o - \sim) = cotg\sim$$



Suma y Diferencia de Ángulos

$\boxed{sen(\sim \pm \quad) = sen\sim \cdot cos \quad \pm cos\sim \cdot sen}$ $\boxed{cos(\sim \pm \quad) = cos\sim \cdot cos \quad \mp sen\sim \cdot sen}$

$$\boxed{tg(\sim \pm \quad) = \frac{tg\sim \pm tg}{1 \mp tg\sim \cdot tg}}$$

Ángulo Doble

$$\boxed{sen(2\sim) = 2sen\sim \cdot cos\sim}$$

$$\boxed{cos(2\sim) = cos^2\sim - sen^2\sim}$$

$$\boxed{tg(2\sim) = \frac{2tg\sim}{1 - tg^2\sim}}$$

Ángulo Mitad

$$\boxed{sen\left(\frac{\sim}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\sim}{2}}}$$

$$\boxed{cos\left(\frac{\sim}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\sim}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{\sim}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\sim}{1 + cos\sim}}}$$

Teorema Pitágoras $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Teorema del Seno $\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}}$

Teorema del Coseno $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$