TALLER DE PREPARACIÓN PARA LA OLIMPIADA MATEMÁTICA

En la primera parte de la sesión trabajamos algunas aplicaciones del principio del palomar. Pasamos luego a recordar algunas técnicas de conteo enfatizando la importancia de los números binomiales y trabajando el principio de inclusión-exclusión. En la última parte trabajaremos algunos problemas de aritmética.

1. El principio del palomar (y algo más)

El principio del palomar (a veces llamado principio de Dirichlet o principio de las cajas) establece que si n palomas se distribuyen en m palomares y si $n > m$, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma. Hay aplicaciones muy sencillas del mismo que encontramos en nuestra vida diaria; por ejemplo, si sabemos que una persona ha comido 16 yogures a lo largo de la semana, podemos concluir que un día ha comido al menos tres.
Vamos a analizar algunas aplicaciones menos sencillas del mismo y que han aparecido en algunas olimpiadas.

Problema 1. Una tienda que abre todos los días del año ha vendido, durante el año 2022, un total de 629 bicicletas. Sabiendo que cada día del año ha vendido al menos una bicicleta, probar que hay un periodo de días consecutivos durante los cuales se han vendido exactamente 100 bicicletas.

Problema 2. En un polígono regular de 67 lados, dibujamos todos los segmentos que conectan dos vértices, incluyendo los lados del polígono. Escogemos n de esos segmentos y le asignamos a cada uno un color a escoger entre 10 posibles. Encontrar el mínimo valor de n tal que, sin importar los n segmentos elegidos, cumple que hay siempre un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.

Problema 3. Consideremos una sucesión de $nm + 1$ números reales diferentes. Probar que siempre hay una subsucesión creciente de longitud $n + 1$ o una subsucesión decreciente de longitud $m + 1$.
Observación. Una subsucesión de una sucesión dada consiste en tomar algunos términos de la misma, manteniendo el orden. Por ejemplo, si consideramos la sucesión $(4, 6, 3, 7, 9, 2)$*, tenemos que* $(4, 9, 2)$*,* $(3, 2)$ *o* (6) *son subsucesiones de la misma.*

Problema 4. Marcamos 6000 puntos en un círculo, y los coloreamos usando 10 colores de forma que dentro de cada grupo de 100 puntos consecutivos todos los colores se han usado. Determinar el menor entero positivo k con la siguiente propiedad: en cada coloración que cumpla las condiciones especificadas, es posible encontrar un grupo de k puntos consecutivos en el que se usan todos los colores.

2. Combinatoria enumerativa

La mayoría de problemas de combinatoria se centran en contar las cantidades de elementos de un conjunto. Este primer problema repasa alguno de los principios más habituales.

Problema 5. Los siguientes apartados son independientes entre sí.

(a) Hallar el número de soluciones enteras de la ecuación

$$abcde = 2^{100},$$

donde $a, b, c, d, e \geq 1$. ¿Qué pasa si imponemos que $a, b, c, d, e > 1$?

(b) Hallar el número de maneras de elegir 25 números entre 100 y 999 de manera que la diferencia entre dos de ellos es siempre al menos 37 (en valor absoluto).

Problema 6. Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados. Encontrar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es rectángulo, y el número de ternas para las cuales es acutángulo.

Problema 7. Determinar cuántas palabras de longitud 21 se pueden formar con los números $\{-1, 0, 1\}$ de manera que contienen exactamente 5 ceros, la suma de los primeros k números es no-negativa para todo k y la suma de los 21 números es 0.

3. Teoría de grafos

El lenguaje de la teoría de grafos resulta muchas veces útil para reformular enunciados complicados de combinatoria. No se espera que conozcáis resultados profundos sobre el tema, pero la familiaridad con los conceptos básicos (vértice, arista, grado de un vértice o componente conexa) simplifica algunos problemas.

Problema 8. Adela y Baltasar se encuentran en una fiesta junto a otras 100 parejas. Algunas personas se dan la mano durante la fiesta, aunque nadie lo hace ni consigo mismo ni con su esposa. Adela observa que cuando considera al resto de asistentes (es decir, todos menos ella, pero incluyendo a su pareja Baltasar) todos han estrechado la mano con un número diferente de personas. ¿Con cuántas personas se ha dado la mano Baltasar?

Problema 9. En la comida de una olimpiada participan n personas ($n \geq 2023$). Es conocido que cada uno es amigo de por lo menos 2022 personas más (la amistad es siempre recíproca). Probar que es posible colocar a al menos 2023 personas en círculo para bailar una muñeira de forma que cada uno de los que participe en el baile esté colocado entre dos amigos suyos.

Problema 10. Sea $n \geq 2$ un entero. Ágata y Bartolomé juegan al siguiente juego que implica a n ciudades de Andalucía. Exactamente dos de ellas tienen una fábrica (Granada y Sevilla). Inicialmente no hay ninguna carretera. Ágata y Bartolomé juegan en turnos de la siguiente manera: cada vez, el jugador al que le toca selecciona dos ciudades C_1 y C_2 tales que:

- C_1 y C_2 no están conectadas por una carretera;
- al menos una de ellas está conectada por una serie de carreteras con una fábrica (o tiene ella misma la fábrica).

Pierde el jugador que hace que se pueda ir de una fábrica a otra. Si Ágata empieza, determinar para qué $n \geq 2$ tiene una estrategia ganadora.

4. Problemas de juegos

Acabamos la parte de combinatoria con un par de problemas más sobre juegos, bastante frecuentes en olimpiadas y donde el objetivo suele ser diseñar la estrategia óptima desde el punto de vista de uno de los jugadores.

Problema 11. Tenemos un montón con 2022 piedras. Amalia y Benito juegan por turnos siguiendo estas normas:

1. En cada turno, el jugador puede sacar $1, 2, 3, 4$ o 5 piedras del montón.
2. En cada turno, el jugador no puede sacar exactamente la misma cantidad de piedras que el jugador que realizó el movimiento anterior.

Pierde el jugador que no puede realizar un movimiento válido. Si Amalia empieza, ¿qué jugador tiene una estrategia ganadora?

Problema 12. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego: primero deciden un entero N. Luego, escriben números en la pizarra por orden. Amalia empieza escribiendo un 1. Después, cuando uno ha escrito el número n, el otro escribe o bien $n+1$ o bien $2n$, siempre y cuando el número no sea mayor que N. El jugador que escribe N en la pizarra gana. Determinar quién gana para $N = 2022$ y encontrar el número de enteros positivos $N \leq 2022$ tales que Bernardo tiene una estrategia ganadora.

5. Un poco de aritmética

Acabamos la sesión con algunos problemas de teoría de números, repasando conceptos como la aritmética modular o la divisibilidad.

Problema 13. Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$a^2 + 3b^2 = 2c^2.$$

Problema 14. Encontrar todos los enteros (positivos) tales que $a^2 + 4b$ y $b^2 + 4a$ son ambos cuadrados perfectos.

Problema 15. Encontrar todas las parejas de enteros no negativos (a, b) que satsifacen

$$a^3 b^2 = (a^2 + b)^3.$$

Problema 16. Sea $n > 6$ un número perfecto y sea $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ su factorización, de manera que $1 < p_1 < \ldots < p_k$. Probar que e_1 es par.

Problema 17. Sea a un número entero y $p \geq 3$ un número primo. Probar que

$$a^p + (a+1)^p + \ldots + (a+p-1)^p$$

siempre es múltiplo de p^2.

Problema 18. Consideremos el polinomio

$$P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdots (x + d_9),$$

donde $d_1, d_2, \ldots, d_9$ son enteros diferentes. Demostrar que existe un entero N de manera que para todo $x \geq N$, el número $P(x)$ es divisible por algún primo mayor que 20.