1. Geometría

1.1. Ángulos

Subproblema 6.1. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo acutángulo y H su ortocentro. Sea H' el simétrico de H con respecto a la recta BC. Demuestra que H' está en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$.

Problema 1. El triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles en C, y Γ es su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de $\widehat{ABC}$?

Problema 2. $\widehat{ABC}$ es un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y circunferencia circunscrita Ω. M es el punto medio de BC, y AM interseca a Ω en un segundo punto D. La circunferencia ω_1 pasa por C, M y D e interseca a AC en C y en Y. La circunferencia ω_2 pasa por A, M e Y e interseca a AB en A y en Z.

a) Demuestra que $CZ \perp AB$.

b) Si N es el pie de la altura desde B y P es el segundo punto de intersección entre la recta ZN y ω_2, demuestra que $MYPN$ es un paralelogramo.

1.2. Semejanza

Subsubproblema 6.3.1. Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H. Si M es el punto medio de BC, demuestra la siguiente igualdad de distancias $AH = 2 \cdot OM$.

Problema 3. En un trapecio $ABCD$, AD es paralelo a BC. Sabiendo que $AB = AD + BC$, demuestra que la bisectriz de $\widehat{A}$ pasa por el punto medio de CD.

Problema 4. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\widehat{BAC} = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

Subproblema 6.2. Sea $\widehat{AOH'}$ un triángulo isósceles en O. Sea H un punto cualquiera de AH' y sea S un punto de la semirrecta OH con $OS \cdot OH = OA^2$. Demuestra que los puntos A, O, H' y S estan en una misma circunferencia.

1.3. Métrica

Subproblema 6.3. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y sean H y O su ortocentro y circuncentro, respectivamente. Demuestra que $AH = AO$ si y solo si $\widehat{BAC} = 60°$. Si $\widehat{ABC}$ no es equilátero, demuestra que, si pasa lo anterior, OH es perpendicular a la bisectriz de $\widehat{A}$.

Problema 5. En un triángulo $\widehat{ABC}$, la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C son concurrentes y además la bisectriz por A y la mediana por B son perpendiculares. Si el lado AB mide una unidad, hallar cuánto miden los otros dos lados.

Problema 6. Un triángulo acutángulo no equilátero $\widehat{ABC}$ tiene ortocentro H y está inscrito en una circunferencia de radio 1 y centro O. Las rectas OH y BC se cortan en un punto S, fuera del segmento BC y con $SH < SO$. Supón que $OS \cdot OH = 1$. Computa el área del cuadrilátero cóncavo $ABHC$.

2. Álgebra

2.1. Desigualdades

Problema 1. Sean a, b, c reales positivos. Demuestra que las siguientes desigualdades:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c}$

Problema 2. Sean a, b y c tres números reales positivos el producto de los cuales es 1. Demuestra que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

2.2. Polinomios

Problema 3. Sean α, β y γ las tres raíces del polinomio $x^3 - 5x^2 - 6x + 18$. Encuentra los valores de a, b y c para que α^2, β^2 y γ^2 sean las raíces de $x^3 + ax^2 + bx + c$.

Problema 4. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 3x^2 + bx + 1$ son reales y estan en progresión aritmética. Encuentra b.

2.3. Funcionales

Problema 5. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

Problema 6. Encontrar todas las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x+y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x, y reales.