1. Geometría

1.1. Ángulos

Subproblema 6.1. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo acutángulo y H su ortocentro. Sea H' el simétrico de H con respecto a la recta BC. Demuestra que H' está en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$.

Llamando α, β y γ a los ángulos de $\widehat{ABC}$, tenemos que:

$$\widehat{CBH} = 90° - \widehat{ACB} = 90° - \gamma$$

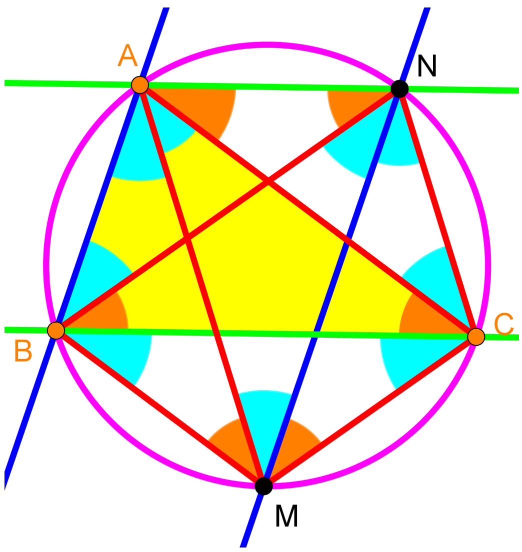
$$\widehat{HCB} = 90° - \widehat{CBA} = 90° - \beta$$

$$\widehat{BHC} = 180° - \widehat{CBH} - \widehat{HCB} = 180° - (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta + \gamma$$

Como H' está en el lado de BC opuesto a A, basta comprobar que el ángulo $CH'B$ es $180° - \widehat{BAC}$, pero por simetría, tenemos $\widehat{CH'B} = \widehat{BHC} = \beta + \gamma = 180° - \alpha$.

Problema 1. El triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles en C, y Γ es su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de $\widehat{ABC}$?

Los cuadriláteros $ANCB$ y $NMBA$ son trapecios porque $AN \parallel BC$ y $NM \parallel BA$, pero también son cuadriláteros cíclicos. Un trapecio es cíclico si y solo si es isósceles, así que $AB = CN$ y $AN = BM$. Dado que ángulos que miran segmentos iguales son iguales, podemos calcular todos los ángulos, como en el siguiente dibujo:

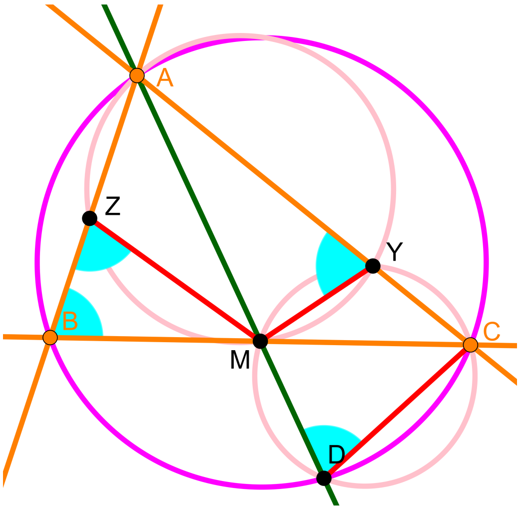


Dado que $\widehat{ABC}$ es isósceles en C, los ángulos en A y en B son iguales, cosa que implica que los ángulos naranja y cian del dibujo anterior son iguales. Cinco de esos ángulos son necesarios para cubrir los 180° del triángulo $\widehat{ABC}$, así que cada uno mide $180°/5 = 36°$. Los ángulos del triángulo $\widehat{ABC}$ son entonces $\widehat{A} = 72°$, $\widehat{B} = 72°$, $\widehat{C} = 36°$.

Problema 2. $\widehat{ABC}$ es un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y circunferencia circunscrita Ω. M es el punto medio de BC, y AM interseca a Ω en un segundo punto D. La circunferencia ω_1 pasa por C, M y D e interseca a AC en C y en Y. La circunferencia ω_2 pasa por A, M e Y e interseca a AB en A y en Z.

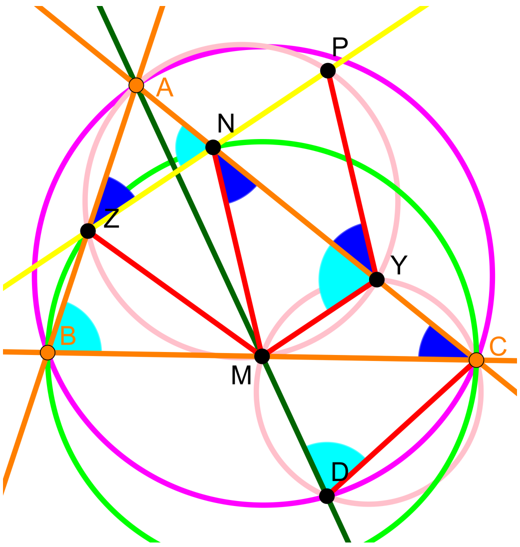
a) Demuestra que $CZ \perp AB$.

b) Si N es el pie de la altura desde B y P es el segundo punto de intersección entre la recta ZN y ω_2, demuestra que $MYPN$ es un paralelogramo.



Por arco capaz en Ω, el ángulo $\widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \beta$. Ahora usamos que los ángulos opuestos del cuadrilátero cíclico $DCYM$ suman 180° para concluir que $\widehat{AYM} = \beta$. Razonamos análogamente con $YAZM$ y obtenemos que $\widehat{BZM}$ también es β. Así, $\widehat{BZM}$ es isósceles en M, y Z está en la circunferencia centrada en M y radio $MB = MC$, así que $\widehat{BZC}$ es recto porque ve un diámetro y $CZ \perp AB$. Eso concluye a).

Para b), veremos que $MY \parallel NP$ y que $MN \parallel YP$. En primer lugar, N también está en la circunferencia de diámetro BC. Con el cuadrilátero cíclico $BZNC$ vemos que $\widehat{ANZ} = \widehat{CBA} = \beta$. De antes, ya teníamos que $\widehat{NYM} = \beta$, así que $MY \parallel NP$ porque ambas rectas cortan la recta AC con el mismo ángulo.



Por otro lado, el ángulo $\widehat{ACB}$, que llamaremos γ, es igual a $\widehat{NZA}$ porque $\widehat{BZN}$ es suplementario a ambos. Este segundo está inscrito en ω_2 y mira la cuerda AP, así que $\widehat{AYP}$ también es γ. Ahora sabemos el ángulo en que YP corta AC es γ, así que solo hace falta ver que coincide con el ángulo entre MN y AC, es decir $\widehat{MNC}$. Como $\widehat{MNC}$ es isósceles en M, se sigue que en efecto $\widehat{MNC} = \gamma$ y concluimos la parte b).

1.2. Semejanza

Subsubproblema 6.3.1. Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H. Si M es el punto medio de BC, demuestra la siguiente igualdad de distancias $AH = 2 \cdot OM$.

Sean $A' = M$, B', C' los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Los lados del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ son paralelos a los de $\widehat{ABC}$ y los triángulos son semejantes. La razón de semejanza es 2 porque la paralela media mide la mitad del lado correspondiente. El ortocentro H' de $\widehat{A'B'C'}$ es la intersección de sus alturas, que son perpendiculares a los lados del triángulo pequeño y por tanto también del grande. Como esas alturas pasan por los puntos medios de los lados de $\widehat{ABC}$, son sus mediatrices, y el punto de corte es $H' = O$. Como la razón de semejanza es 2, se tiene que $AH = 2 \cdot A'H' = 2 \cdot OM$.

Nota: Los triángulos no solo son semejantes, sino que son homotéticos con razón -2. El centro de homotecia es el baricentro de ambos triángulos $G = G'$, cosa que nos permite concluir que H, G y O están alineados y que $GH = 2 \cdot OG$.

Problema 3. En un trapecio $ABCD$, AD es paralelo a BC. Sabiendo que $AB = AD + BC$, demuestra que la bisectriz de $\widehat{A}$ pasa por el punto medio de CD.

Sea E el punto de AB con $AE = AD$ (y por tanto $BE = BC$). Las bisectrices de $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ se cortan en un punto I. Veremos que I pertenece a CD y es su punto medio. Los triángulos $\widehat{ADI}$ y $\widehat{AEI}$ son congruentes, ya que un lado coincide, otro es igual y el ángulo que forman esos dos lados es la mitad de $\widehat{A}$ en ambos casos. Similarmente, $\widehat{BCI}$ y $\widehat{BEI}$ también son congruentes. Así, $IC = IE = ID$ y solo hace falta ver que I, C y D estan alineados.

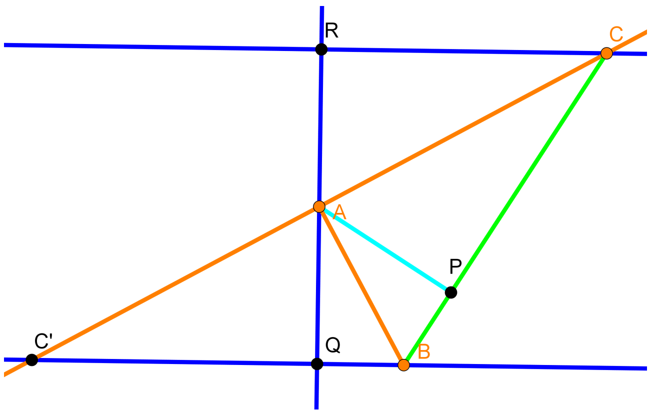
Ahora vamos a calcular el ángulo $\widehat{DIC}$ y comprobar que es $180°$. Para eso llamamos α y β a los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ del trapecio, y sabemos $\alpha + \beta = 180°$ porque $AD \parallel BC$. Así, el triángulo $\widehat{ABI}$ tiene ángulos $\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\beta}{2}$ y $180° - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 90°$. Ahora, usando la susodicha congruencia de triángulos:

$$\widehat{DIC} = \widehat{DIA} + \widehat{AIB} + \widehat{BIC} = \widehat{AIE} + 90° + \widehat{EIB} = 90° + \widehat{AIB} = 90° + 90° = 180°$$

Problema 4. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\widehat{BAC} = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

Demostraremos que P está en la circunferencia de centro A que es tangente a las dos rectas. Considera Q y R, las proyecciones de A a las rectas r y s, respectivamente. Nuestro objetivo es ver que $AP = AQ$, y lo veremos de dos formas:

Forma 1: Consideramos el punto C' de intersección entre r y AC. Como A está en la paralela media de r y s, A es el punto medio de CC'. Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABC'}$ son rectangulos y sus catetos respectivos miden igual, así que són congruentes. Eso nos implica que la altura AP de $\widehat{ABC}$ y la altura AQ de $\widehat{ABC'}$ miden igual.



Forma 2: Tenemos dos triángulos rectángulos $\widehat{AQB}$ y $\widehat{CRA}$, que son semejantes, ya que

$$\widehat{ABQ} = 90° - \widehat{QAB} = 180° - 90° - \widehat{QAB} = \widehat{CAR}$$

Por otro lado, también tenemos otra familia de triángulos rectángulos semejantes $\widehat{ABP}$ y $\widehat{APC}$, que son semejantes a $\widehat{ABC}$ por ángulos. Además, las dos familias de triángulos son semejantes entre sí, ya que el cociente entre los catetos de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AQB}$ son iguales porque $\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{RA}{QB} = \dfrac{AQ}{QB}$, donde la primera igualdad es por la semejanza entre $\widehat{AQB}$ y $\widehat{CRA}$.

En consecuencia, los triángulos $\widehat{AQB}$ y $\widehat{APB}$ son semejantes, y además congruentes porque comparten hipotenusa. Por tanto, los dos catetos correspondientes AQ y AP coinciden.

Subproblema 6.2. Sea $\widehat{AOH'}$ un triángulo isósceles en O. Sea H un punto cualquiera de AH' y sea S un punto de la semirrecta OH con $OS \cdot OH = OA^2$. Demuestra que los puntos A, O, H' y S estan en una misma circunferencia.

La condición se puede reescribir como $\dfrac{OS}{OA} = \dfrac{OA}{OH}$. Dado que los triángulos $\widehat{SOA}$ y $\widehat{AOH}$ comparten el ángulo en O, estamos en condiciones de aplicar el criterio de lado-ángulo-lado y concluir que son semejantes. Eso nos implica la igualdad de ángulos $\widehat{OSA} = \widehat{HAO} = \widehat{H'AO}$. Usando que $\widehat{AOH'}$ es isósceles, este ángulo también es igual a $\widehat{OH'A}$. Por arco capaz mirando OA, los puntos A, O, H' y S estan en una misma circunferencia, como queríamos ver.

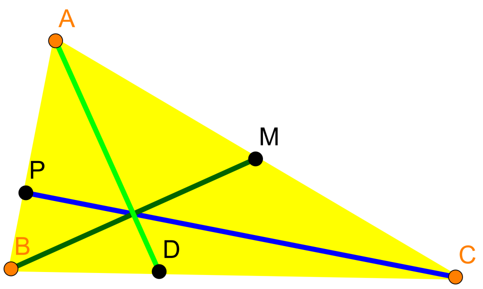
1.3. Métrica

Subproblema 6.3. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y sean H y O su ortocentro y circuncentro, respectivamente. Demuestra que $AH = AO$ si y solo si $\widehat{BAC} = 60°$. En este caso, si $H \neq O$ demuestra que OH es perpendicular a la bisectriz de $\widehat{A}$.

Sabemos que $AO = R$, el radio de la circunferencia circunscrita, y que $AH = 2 \cdot OM$. Como $\widehat{BOC}$ es el ángulo central que mira la cuerda BC, sabemos que $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$, y $\widehat{BOM} = \alpha$ es la mitad. Entonces, $OM = OB \cos\alpha = R\cos\alpha$ y $AH = 2R\cos\alpha$. La condición $AH = AO$ es equivalente a $2R\cos\alpha = R$, que es lo mismo que $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, que pasa si y solo si $\alpha = 60°$.

Podemos calcular los ángulos $\widehat{BAH}$ y $\widehat{OAC}$. Usando que la recta AH es una altura y que $OA = OC$, el primer ángulo forma parte de un triángulo rectángulo y el segundo de un triángulo isósceles, y es fácil ver que ambos valen $90° - \beta$, donde $\beta = \widehat{CBA}$. Entonces, la bisectriz de $\widehat{HAO}$, que es perpendicular a OH debido a $\widehat{HAO}$ isósceles, coincide con la de $\widehat{BAC}$, ya que dejamos $90° - \beta$ por cada lado. Eso demuestra la segunda parte del enunciado.

Problema 5. En un triángulo $\widehat{ABC}$, la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C son concurrentes y además la bisectriz por A y la mediana por B son perpendiculares. Si el lado AB mide una unidad, hallar cuánto miden los otros dos lados.



Llamamos D, M y P a los pies de la bisectriz, mediana y altura del enunciado, respectivamente. Como la bisectriz de $\widehat{BAM}$ es perpendicular a BM, podemos concluir que $\widehat{ABM}$ es isósceles en A, así que $AM = AB = 1$ y MC también, que nos implica $AC = 2$. Ahora falta encontrar el tercer lado. Por el teorema de la bisectriz, la proporción $\dfrac{BD}{DC}$ es igual a $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Usando ahora el teorema de Ceva, tenemos:

$$1 = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{1}{2},$$

o $AP = 2PB$. Como $AP + PB = 1$, debe pasar $AP = \dfrac{2}{3}$ y $PB = \dfrac{1}{3}$. Ahora, usando el teorema de Pitágoras,

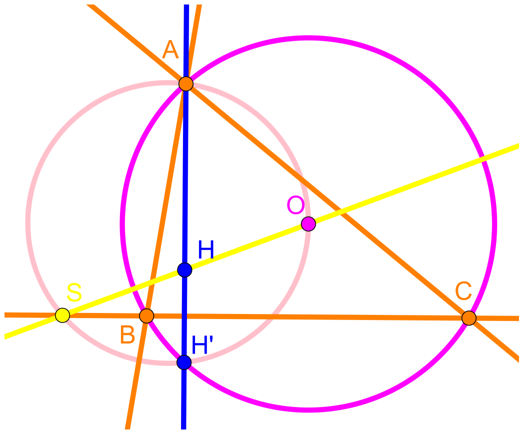
$$BC^2 = BP^2 + CP^2 = BP^2 + (CA^2 - AP^2) = \frac{1}{9} + 4 - \frac{4}{9} = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3},$$

y $BC = \sqrt{\dfrac{11}{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}$

Problema 6. Un triángulo acutángulo no equilátero $\widehat{ABC}$ tiene ortocentro H y está inscrito en una circunferencia de radio 1 y centro O. Las rectas OH y BC se cortan en un punto S, fuera del segmento BC y con $SH < SO$. Supón que $OS \cdot OH = 1$. Computa el área del cuadrilátero cóncavo $ABHC$.

Si $[XYZ]$ denota el área del triángulo $\widehat{XYZ}$, tenemos que el área del cuadrilátero en cuestión se puede calcular como $[ABC] - [BCH]$. Como estos triángulos tienen la misma base, la diferencia de áreas será igual a un medio de la base por la diferencia de alturas: $\dfrac{1}{2}BC \cdot AH$. Dado que $BC = 2R \operatorname{sen} \alpha$ por el teorema del seno y $AH = 2R\cos\alpha$, podemos expresar el área en función del ángulo $\alpha = \widehat{BAC}$, y da $2R^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$.

Consideramos H', el simétrico a H con respecto a BC. Este punto está en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, así que $OH' = OA = 1$. Entonces, por el subproblema 6.2., tenemos que S, H', O y A estan en la misma circunferencia.



El triángulo $\widehat{SHH'}$ es isósceles en S porque la mediatriz de HH' es BC que pasa por S. Los ángulos iguales $\widehat{SHH'}$ y $\widehat{HH'S}$ son iguales a $\widehat{OHA}$ y a $\widehat{AOH}$, respectivamente por ángulos opuestos y arco capaz. Eso nos dice que $\widehat{AOH}$ es isósceles.

Por el subproblema 6.3., tenemos que $\alpha = 60°$, así que la respuesta és $\operatorname{sen}(2 \cdot 60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Álgebra

2.1. Desigualdades

Problema 1. Sean a, b, c reales positivos. Demuestra que las siguientes desigualdades:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c}$

Solucionaremos la parte a) de varias formas:

Forma 1: La expresión es equivalente a $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$, pero esto es evidente cuando se escribe el miembro izquierdo como $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Forma 2: La desigualdad es simétrica en a, b y c, así que podemos suponer que $a \geq b \geq c$. Entonces, por reordenamiento con (a, b, c) y (b, c, a) tenemos

$$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \geq a \cdot c + b \cdot b + c \cdot a,$$

y la desigualdad de la izquierda es la que queremos.

Forma 3: Vamos a aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores (a, b, c) y (b, c, a), obteniendo así

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + a^2} \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$$

Para la parte b), identificamos el lado derecho de la desigualdad como una media geométrica de a, b y c, ponderada con pesos respectivos de a, b y c. La desigualdad entre las medias geométrica y armónica de tres valores x_1, x_2, x_3 con pesos p_1, p_2, p_3 se lee:

$$\sqrt[p_1+p_2+p_3]{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3}} \geq \frac{p_1 + p_2 + p_3}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \frac{p_3}{x_3}}$$

Aplicándola a a, b y c:

$$\sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \geq \frac{a+b+c}{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}} = \frac{a+b+c}{3}$$

Problema 2. Sean a, b y c tres números reales positivos el producto de los cuales es 1. Demuestra que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Las condiciones que nos dan son $abc = 1$ y $a+b+c > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Para quitarnos los denominadores, multiplicamos el miembro derecho de la segunda condición por $1 = abc$, obtieniendo así $a+b+c > bc+ca+ab$.

Consideramos el producto $(a-1)(b-1)(c-1) = abc-ab-bc-ca+a+b+c-1 = -ab-bc-ca+a+b+c > 0$. Como no es cero, vemos que ninguna de las tres variables vale 1. Además, como es positivo, debe haber un número par de variables menores que 1, así que o hay 0 o hay 2. Si todas las variables fueran mayores que 1, entonces sería imposible que el producto diese 1, así que descartamos el primer caso. En el caso restante, hay dos de las tres variables que son menores que 1, así que solo hay una que sea mayor, como queríamos ver.

2.2. Polinomios

Problema 3. Sean α, β y γ las tres raíces del polinomio $x^3 - 5x^2 - 6x + 18$. Encuentra los valores de a, b y c para que α^2, β^2 y γ^2 sean las raíces de $x^3 + ax^2 + bx + c$.

Las relaciones de Cardano-Vieta nos dicen

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 5 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -6 \\ \alpha\beta\gamma = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -a \\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = b \\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 = -c \end{cases}$$

De aquí inmediatamente deducimos $c = -(-18)^2 = -324$. Elevando la primera igualdad al cuadrado, obtenemos

$$-a + 2(-6) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (\alpha+\beta+\gamma)^2 = 5^2 = 25$$

Resolviendo, obtenemos $a = -37$. Finalmente, elevando la segunda igualdad al cuadrado:

$$b + 2(-18)(5) = \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 = (-6)^2 = 36,$$

que nos da $b = 216$.

Problema 4. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 3x^2 + bx + 1$ son reales y estan en progresión aritmética. Encuentra b.

Sean α, β y γ las tres raíces del polinomio en orden ascendiente. Si d es la diferencia común, podemos escribir $\alpha = \beta - d$ y $\gamma = \beta + d$.

Ahora tenemos:

$$\begin{cases} 3 = \alpha+\beta+\gamma = (\beta-d)+\beta+(\beta+d) = 3\beta \\ b = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \\ -1 = \alpha\beta\gamma = (\beta-d)\beta(\beta+d) = \beta^3 - d^2\beta \end{cases}$$

De la primera ecuación sacamos $\beta = 1$, y de la tercera sacamos que $d^2 = 2$, por lo que las tres raíces son $1-\sqrt{2}$, 1 y $1+\sqrt{2}$.

Finalmente, $b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (1-\sqrt{2})1 + 1(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 1$. Alternativamente, una vez sabemos que $\beta = 1$ es una raíz, sabemos que $1^3 - 3\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 1 = 0$, de donde sacamos $b = 1$.

2.3. Funcionales

Problema 5. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

Fijémonos que la ecuación nos relaciona $f(x)$ y $f(1-x)$ de forma lineal. Dado que $1-(1-t) = t$, podemos sustituir $x = t$ y $x = 1-t$ por separado y obtener:

$$t^2 f(t) + f(1-t) = 2t - t^4$$

$$(1-t)^2 f(1-t) + f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4$$

Ahora podemos ver esto como un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas $f(t)$ y $f(1-t)$, y los coeficientes son funciones de t. De la primera ecuación podemos despejar $f(1-t)$ y sustituirla en la segunda. Nos queda:

$$(1-t)^2\left[2t - t^4 - t^2 f(t)\right] + f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4$$

$$\left[-(1-t)^2 t^2 + 1\right] f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4 - (1-t)^2 \cdot (2t - t^4)$$

$$[-t^4 + 2t^3 - t^2 + 1] f(t) = t^6 - 2t^5 + 2t^3 - 2t^2 + 1$$

Haciendo la división, podemos ver que $t^6 - 2t^5 + 2t^3 - 2t^2 + 1 = (-t^2+1)(-t^4+2t^3-t^2+1)$, así que sacamos $f(t) = -t^2 + 1$.

Es necesario ver que esta función en efecto cumple la funcional:

$$x^2(1-x^2) + 1 - (1-x)^2 = x^2 - x^4 + 1 - 1 + 2x - x^2 = 2x - x^4$$

Problema 6. Encontrar todas las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x+y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x, y reales.

Como la ecuación se debe cumplir para cualquier valor de x y de y, podemos poner $x = 0$ y obtener que $f(f(y)) = f(0) + y$. Esto nos dice que es biyectiva, esto es, sobreyectiva e inyectiva:

En efecto, es sobreyectiva si para cada valor t real encontrar *algo* con $f(algo) = t$. Poniendo $y = t - f(0)$ lo encontramos: $f\Big(f(t - f(0))\Big) = f(0) + (t - f(0)) = t$.

Para ver que es inyectiva, se tiene que ver que si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$. Dicho de otra manera, si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. En nuestro caso eso pasa, ya que si suponemos $f(a) = f(b)$, tenemos $f(0) + a = f(f(a)) = f(f(b)) = f(0) + b$, que nos implica $a = b$.

Ahora volvemos a la ecuación original y ponemos $y = 0$. De aquí sacamos $f(x + f(x)) = f(2x)$. Como la función es inyectiva, debe pasar que los argumentos coincidan: $x + f(x) = 2x$, de donde sacamos $f(x) = x$.

Así pues, la función solución, si existe, tiene que cumplir $f(x) = x$ para cada x, así que está determinada. Solo falta comprobar si nuestro único candidato a solución lo es o no, y en este caso lo es porque $x + (x+y) = 2x + y$.