Problemas

1. Tenemos que f es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que verifica:

1. $f(n+2) - f(n) = 4n + 6$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(2022) - f(2021) = 4044$.

Determina el valor de $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Escribimos

$$\begin{aligned} f(2022) - f(2020) &= 4 \times 2020 + 6, \\ f(2020) - f(2018) &= 4 \times 2018 + 6, \\ &\vdots \\ f(2) - f(0) &= 4 \times 0 + 6. \end{aligned}$$

Sumando se tiene

$$\begin{aligned} f(2022) - f(0) &= 4(2020 + 2018 + \cdots + 2 + 0) + 6 \times 1011 \\ &= 8(1010 + 1009 + \cdots + 1 + 0) + 6 \times 1011 \\ &= 4 \times 1010 \times 1011 + 6 \times 1011. \end{aligned}$$

En la misma forma se tiene:

$$\begin{aligned} f(2021) - f(2019) &= 4 \times 2019 + 6, \\ f(2019) - f(2017) &= 4 \times 2017 + 6, \\ &\vdots \\ f(3) - f(1) &= 4 \times 1 + 6. \end{aligned}$$

Sumando se tiene

$$\begin{aligned} f(2021) - f(1) &= 4(2019 + 2017 + \cdots + 3 + 1) + 6 \times 1010 \\ &= 4 \times 1010^2 + 6 \times 1010 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} 4044 = f(2022) - f(2021) &= 4 \times 1010 \times 1011 + 6 \times 1011 - (4 \times 1010^2 + 6 \times 1010) + f(0) - f(1) \\ &= 4 \times 2010 + 6 + f(0) - f(1) \end{aligned}$$

Como consecuencia, se tiene $f(1) = f(0) + 2$.
Entonces

$$f(2) = 4 \times 0 + 6 + f(0) = f(1) + 4 = f(1) + 2 \times 1 + 2.$$

$$f(3) = 4 \times 1 + 6 + f(1) = f(2) + 6 = f(2) + 2 \times 3 + 2.$$

Vamos a probar que se tiene $f(n+1) = f(n) + 2n + 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0, 1, 2$ es claro. Supongamos que es cierto para $n \leq t$ y vamos a probarlo para $t + 1$, con $t \geq 1$. Se tiene:

$$\begin{aligned} f(t+2) &= f(t) + 4t + 6 = f(t-1) + 2(t-1) + 2 + 4t + 6 \\ &= f(t-1) + (4(t-1) + 6) + (2t + 4) \\ &= f(t+1) + 2t + 4 = f(t+1) + 2(t+1) + 2. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\{f(n)\}_n$ es una sucesión aritmética con diferencia una sucesión aritmética de orden 1; esto significa que $\{f(n)\}_n$ es una sucesión aritmética de orden 2, y por tanto su expresión es del tipo $f(n) = an^2 + bn + c$, con $a \neq 0$.
Tenemos la diferencia $f(2022) - f(2021) = 4044$, por tanto se verifica:

$$\begin{aligned} f(2022) - f(2021) &= 4044 \\ a2022^2 + b2022 + c - (a2021^2 + b2021 + c) &= 4044 \\ a(2022^2 - 2021^2) + b(2022 - 2021) &= 4044 \\ a4043 + b &= 4044 \end{aligned}$$

Otra relación que tenemos es $f(1) - f(0) = 2$, por tanto $a + b = 0$, y deducimos que a y b deben verificar $a = 1 = b$. El valor de c no podemos determinarlo, de hecho cualquier valor es adecuado; por tanto las soluciones son de la forma $f_c(n) = n^2 + n + c$, siendo $c \in \mathbb{N}$.

2. Sea ABC un triángulo isósceles, con $AB = AC$. Sea P un punto cualquiera del segmento BC, no en los extremos, y N el punto medio de AP. Se construye el trapecio (convexo) $M_1M_2N_2N_1$ con: M_1 punto medio de BP, M_2 punto medio de PC, M_1N_1 y M_2N_2 perpendiculares a BC, tales que N, N_1 y N_2 están alineados. Demostrar que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 1. Sea D el punto medio de BC y E el pie de la perpendicular desde N a BC. Entonces:

$$M_1M_2 = M_1D + DM_2 = BD - BM_1 + DC - CM_2 = 2BD - M_1P - M_2P = BC - M_1M_2$$

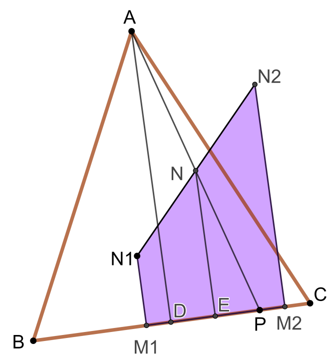

Figure 1: Esquema para resolver el problema.

Por tanto $M_1M_2 = BC/2$. Por el teorema de Thales se tiene que: $DE = EP$ y $NE = AD/2$. Por otro lado,

$$M_1D = BD - BM_1 = DC - M_1P = DC - (M_1D + DP) =$$

$$= (DC - DP) - M_1D = PC - M_1D = 2PM_2 - M_1D$$

Por tanto, $M_1D = PM_2$. Así $M_1E = M_1D + DE = PM_2 + EP = M_2E$, es decir, E es el punto medio de M_1M_2.

Por el teorema de Thales se deduce que N también es el punto medio de N_1N_2. Luego el área del trapecio $M_1M_2N_2N_1$ es

$$NE \cdot M_1M_2 = (AD/2)(BC/2) = AD \cdot BC/4$$

como se quería probar.

Solución 2. Tomando un sistema de referencia en el que BC es el eje de abcisas y D el origen de coordenadas, se tiene:

$$A = (0, a), \quad B = (-b, 0), \quad C = (b, 0), \quad P = (c, 0)$$

Entonces

$$N = (c/2, a/2), \quad M_1 = (\frac{c-b}{2}, 0), \quad M_2 = (\frac{c+b}{2}, 0),$$

$$N_1 = (\frac{c-b}{2}, x), \quad N_2 = (\frac{c+b}{2}, y)$$

La exigencia de que N, N_1 y N_2 estén alineados se corresponde a que

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & c-b & 2x \\ 2 & c+b & 2y \\ 2 & c & a \end{vmatrix} = 4(a - x - y)$$

Por tanto, la condición equivale a que $x + y = a$. Si T y S son las áreas del trapecio y del triángulo, respectivamente:

$$T = \frac{x+y}{2} M_1M_2 = \frac{ab}{2}, \qquad S = ab$$

3. Un grupo de padres e hijos se sienta alrededor de una mesa circular (equidistante cada uno con los vecinos). En total hay $2n$ padres y $2n$ hijos. Prueba que es posible trazar un diámetro de la mesa que divida el grupo en dos partes con el mismo número de componentes, y que tenga el mismo número de padres y de hijos.

Solución. Se considera el grupo sentado a la mesa, y se elige uno al azar que servirá como referencia, y se numera como 1; el resto, en sentido horario, se numera 2,3, $\ldots$, hasta $4n$.

Tomamos las $2n$ primeras personas, y llamamos p al número de padres y h al número de hijos de este grupo. Tenemos $p + h = 2n$, y por tanto p y h son pares ó impares simultáneamente, por lo que $p - h = 2k$, esto es, es un número par.

Movemos la selección una posición en el sentido horario, con lo que entra en el grupo el $2n + 1$ y sale el 1. Si 1 y $2n + 1$ son padres, entonces los nuevos valores de p y h verifican $p - h = 2(k + 1)$; si son hijos, entonces $p - h = 2(k - 1)$, y si son alternativamente padre e hijo ó hijo y padre, se tiene $p - h = 2k$. En resumen, al movernos una posición en el sentido horario k varía en $+1$, -1 ó en 0.

Después de un cierto número de movimientos llegamos a que el grupo está formado por $2n + 1, 2n + 2, \ldots, 4n$, que es el complemento del grupo inicial, por lo que la distribución de padres e hijos es $h - p = (2n - p) - (2n - h) = 2(-k)$. Hemos pasado de k a $-k$ dando pasos de longitud $+1$, -1 ó 0, por lo que hemos recorrido todos los enteros entre k y $-k$. Como 0 es uno de estos enteros, resulta que en un determinado momento se tiene $p - h = 0$, esto es $p = h$, por lo que el grupo queda dividido en dos con el mismo número de padres e hijos en cada uno de los subgupos.

4. Un número natural $n < 1000$ se dice *4malagueño* si tiene la siguiente propiedad: Para cualquier múltiplo N de n de 4 cifras, $N = abcd$, se verifica que todas las permutaciones circulares de él ($N' = bcda$, $N'' = cdab$, $N''' = dabc$) también son múltiplos de n. Por ejemplo, 11 es un número *4malagueño*. Obtener todos los números *4malagueños*.

Solución. Sea n un número tal que cualquier múltiplo de 4 cifras verifica que su permutación circular también es múltiplo de n. Elegimos un múltiplo N de n de 4 cifras que empiece por 1: $N = 1bcd$.
Lema: Dado un número cualquiera $n = abc$ de 1,2 o 3 cifras, siempre se puede encontrar un múltiplo de 4 cifras que empiece por 1. Basta probarlo para un número n de 3 cifras $n = abc$. Si $a = 1$, basta tomar $10n$. Si $a = 2$, como $200 \leq n < 300$ basta tomar $1000 \leq 5n < 1500$. Si $a = 3$, el mismo razonamiento conduce a que $1200 \leq 4n < 1600$. Si $a = 4$, el mismo razonamiento conduce a que $1200 \leq 3n < 1500$. Si $500 \leq n < 1000$, se tiene que $1000 \leq 2n < 2000$.
Si n tiene 2 cifras, entonces $10n$ tiene 3 cifras y se razona como antes. Y así sucesivamente.
Siguiendo con la solución, entonces $N' = bcd1$ también es múltiplo de n. Se tiene que

$$N' - 10N = b10^3 + c10^2 + d10 + 1 - 10^4 - b10^3 - c10^2 - d10 = -9999$$

Por tanto, $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ es un múltiplo de n.
Recíprocamente, sea n un divisor cualquiera de 9999. Sea $N = abcd$ un múltiplo cualquiera de n, entonces $N' = bcda$ verifica:

$$N' = b10^3 + c10^2 + d10 + a = 10N - a10^4 + a = 10N - 9999a$$

De donde se deduce que también N' es múltiplo de n. Repitiendo el razonamiento se obtiene el resultado para cualquier permutación circular de N.
En suma los números *4malagueños* menores de 1000 son los que son divisores de 9999, es decir: 3,9,11,101,33,303,909