RESUMEN DE MATEMÁTICAS II

Un resumen de todo el temario necesario para superar correctamente 2º Bachillerato y Selectividad.

2º BACHILLERATO
2022/2023

1.- Álgebra de Matrices

Dimensión

$$dim(A_{m\times n}) = m \times n = filas \times columnas$$

Producto de un número por una matriz

Asociativa

$$m \cdot (n \cdot A) = (m \cdot b) \cdot n$$

Distributiva

$$m \cdot (A + B) = m \cdot A + m \cdot B$$

Suma y Resta de Matrices

Conmutativa

$$A + B = B + A$$

Asociativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Elemento Neutro

$$A + O = O + A = A$$

Elemento Opuesto o Simétrico

$$A + (-A) = 0$$

Producto de Matrices

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 4} = C_{2\times 4}$$

Asociativa

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Distributiva

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

Elemento Neutro

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Conmutativa

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Transposición de Matrices

$$(A^t)^t = A$$

$$k \cdot (A)^t = k \cdot A^t$$

$$(A)^t + (B)^t = A^t + B^t$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$Si\ A\ es\ simétrica \rightarrow A^t = A$$

Inversa de una Matriz

$$|A| \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t$$

$$I^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

2.- Determinantes

Cálculo del Determinante de Cualquier Orden

Adjunto

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$$

Para cualquier Orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$$

Propiedades de los Determinantes

$$|A| = |A^t|$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & b \\ a & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\det(k \cdot A_n) = k^n \cdot \det(A_n)$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$|I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & 3a & c \\ d & 3d & f \\ g & 3g & i \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & xa+yb \\ d & e & xd+ye \\ g & h & xi+yh \end{vmatrix} = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ 0 & e & d \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = (a \cdot e \cdot i)$$

$$A \cdot A^{-1} = I \to |A \cdot A^{-1}| = |I| \to |A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Rango de una Matriz

$$A_{n\times n}:\ Rg(A) \leq n \to \begin{cases} todos\ |A|_n = 0 \to\ Rg(A) < n \\ agún\ |A|_n \neq 0 \to\ Rg(A) = n \end{cases}$$

Propiedades

$$Rg\,(A^t) = Rg\,(A) \qquad Rg\,(-A) = Rg\,(A) \qquad \exists\,(A)^{-1}{}_{n\times n} \leftrightarrow Rg\,(A) = n$$

3.- Sistemas de Ecuaciones Lineales

Tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales	
Sistema Compatible Determinado	Una solución
Sistema Compatible Indeterminado	Infinitas soluciones
Sistema Incompatible	Ninguna solución
Teorema de Rouchè–Frobenius	
$Rg(M) = Rg(M^{*}) = nº\ incógnitas$	**Compatible Determinado**
$Rg(M) = Rg(M^{*}) \neq nº\ incógnitas$	**Compatible Indeterminado**
$Rg(M) \neq Rg(M^{*})$	**Incompatible**

4.- Los Vectores

Vector Cero	Vector Opuesto	Vectores Unitarios	
		Misma dirección y sentido	Misma dirección y sentido opuesto
$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$	$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$	$\vec{u} = \frac{1}{\vec{v}} \cdot \vec{v}$	$\vec{u} = \frac{-1}{\vec{v}} \cdot \vec{v}$

Operaciones

Producto por un número $k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_x, k \cdot v_y)$

Propiedades

Asociativa	Distributiva I	Distributiva II	Producto por 1
$a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$	$(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$	$a(\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$	$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Diferencia de vectores $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Suma de vectores $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Propiedades

Asociativa	Conmutativa	Vector Nulo	Vector Opuesto
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$	$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

Punto medio $M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$

Expresión Analítica de un Vector

Combinación Lineal $a\vec{v} + b\vec{u} = (av_1 + bu_1, av_2 + bu_2)$

	2 vectores ($\mathbb{R}^2$)	3 vectores ($\mathbb{R}^3$)
Linealmente Dependientes	Alineados	Coplanarios
Linealmente Independientes	No Alineados	No Coplanarios

Coordenadas de un Vector Respecto de una Base

$$\vec{v} = a\,\vec{x} + b\,\vec{y} + c\,\vec{z}$$

$$\vec{v}\,(a, b, c)$$

Operaciones con Coordenadas

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \qquad a \cdot \vec{u} = (au_1, au_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2) \qquad a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2)$$

Producto Escalar de 2 vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\ (\vec{u}, \vec{v}) = \boldsymbol{k} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = \boldsymbol{k}$$

Propiedades

Conmutativa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Distributiva

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

2 vectores

$$\left| \begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \neq 0 \\ \vec{v} \neq 0 \end{array} \right. \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Asociativa Mixta

$$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$$

Aplicaciones

Módulo

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Ángulo

$$cos\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Vector Proyección

$$\vec{u}' = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

Normalización

$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\, \vec{u}$$

Producto Vectorial de 2 vectores

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ (\alpha)$$

Propiedades

Anticonmutativa

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Distributiva respecto a la Suma

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

Misma Dirección

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Asociativa Mixta

$$k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$$

Aplicaciones: Áreas

Triángulo

$$A = \frac{1}{2}\, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Paralelogramo

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Producto Mixto de 3 vectores

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \qquad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \rightarrow LD \rightarrow Coplanarios$$

Aplicaciones: Volúmenes

Tetraedro

$$V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$$

Paralelepípedo

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$

5.- Rectas y Planos. Problemas Métricos

Ecuaciones de Recta

Vectorial	Paramétricas	Continua	Implícita o General
$r \equiv R + \lambda \cdot \vec{d}_r$	$r \equiv \begin{cases} x = a + \lambda v_1 \\ y = b + \lambda v_2 \\ z = c + \lambda v_3 \end{cases}$	$r \equiv \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$	$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

Ecuaciones de un Plano

Vectorial	Paramétricas	Implícita o General
$\pi \equiv P + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$	$\pi \equiv \begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

Posiciones Relativas

2 Rectas

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ s_1 - r_1 & s_2 - r_2 & s_3 - r_3 \end{pmatrix}$$

Coincidentes	S.C.I	$Rg(M) = Rg(M^+) = 1$	**Paralelas**	S.I	$Rg(M) = 1 \neq Rg(M^+) = 2$
Secantes	S.C.D	$Rg(M) = Rg(M^+) = 2$	**Se Cruzan**		$Rg(M) = 2 \neq Rg(M^+) = 3$

1 Recta y 1 Plano

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Recta Contenida en el Plano	S.C.I	$Rg(M) = Rg(M^+) = 2$
Secantes	S.C.D	$Rg(M) = Rg(M^+) = 3$
Paralelos	S.I	$Rg(M) = 2 \neq Rg(M^+) = 3$

2 Planos

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Coincidentes	S.C.I	$Rg(M) = Rg(M^+) = 1$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
Secantes		$Rg(M) = Rg(M^+) = 2$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
Paralelos	S.I	$Rg(M) = 1 \neq Rg(M^+) = 2$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

3 Planos

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se cortan en 1 Punto	S.C.D	$Rg(M) = Rg(M^{+}) = 3$
Los 3 se Cortan en 1 Recta	S.C.I	$Rg(M) = Rg(M^{+}) = 2$
Coincidentes	S.C.I	$Rg(M) = Rg(M^{+}) = 1$
2 Coincidentes y el otro Paralelo / **3 Paralelos**	S.I	$Rg(M) = 1 \neq Rg(M^{+}) = 2$
Se Cortan 2 a 2 pero Ningún punto en Común a los 3	S.I	$Rg(M) = 2 \neq Rg(M^{+}) = 3$

Haz de Planos de arista r

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$(Ax + By + Cz + D) + \lambda(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ángulos

2 Rectas

$$\cos\left(\vec{d}_r, \vec{d}_s\right) = \frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot \left|\vec{d}_s\right|}$$

2 Planos

$$\cos\left(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta\right) = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|}$$

Rectas y Planos

$$sen(\alpha) = \frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|}$$

Distancias

2 Puntos

$$d\,(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$$

1 Punto y 1 Recta

$$d\,(P, r) = \frac{\left|\vec{d}_r \times \overrightarrow{RP}\right|}{\left|\vec{d}_r\right|}$$

1 Punto y 1 Plano

$$d\,(P, \pi) = \frac{\left|Ax_p + By_p + Cz_p + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1 Recta y 1 Plano paralelos

$$d\,(r, \pi) = d(R, \pi)$$

2 Planos paralelos

$$d\,(\alpha, \beta) = d(P_\alpha, \beta)$$

2 Rectas

Paralelas

$$d\,(r, s) = \frac{\left|\vec{d}_r \times \overrightarrow{RS}\right|}{\left|\vec{d}_r\right|}$$

Se Cruzan

$$d\,(r, s) = \frac{V_{paralelepípedo}}{A_{base}} = \frac{\left[\vec{d}_r,\ \vec{d}_s,\ \overrightarrow{RS}\right]}{\left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right|}$$

6.- Límites, Continuidad y Asíntotas

Límite de una función en un punto

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Operaciones con ∞

Sumas y Restas

$$\infty \pm k = \pm\infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

Producto

$$\infty \cdot (\pm k) = \pm\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

División

$$\frac{0}{k} = 0 \qquad \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{\infty}{k} = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0 \qquad \frac{k}{0} = \infty$$

Potencia

$$0^k \begin{cases} 0 & si\ k > 0 \\ \infty & si\ k < 0 \end{cases}$$

$$k^\infty \begin{cases} \infty & si\ k > 1 \\ 0 & si\ 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$k^{-\infty} = 0$$

$$0^\infty = 0$$

$$\infty^\infty = \infty$$

Indeterminaciones

$\frac{k}{0}$

Se hallan los límites laterales

$\frac{0}{0}$

Se factoriza y se simplifica

∞^0 o 0^0

Se toman logaritmos

$\infty \cdot 0$

$$lim(f \cdot g) = \begin{cases} lim \dfrac{f}{1/g} = \dfrac{\infty}{\infty} \\ lim \dfrac{g}{1/f} = \dfrac{0}{0} \end{cases}$$

$\infty - \infty$

Se multiplica y se divide por el conjugado

$\frac{\infty}{\infty}$

Método I

Dividir todos los términos entre la x con mayor grado

Método II

Hacer el límites únicamente de las x con mayor grado

1^∞

Método I

$$lim\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

Método II

$$lim\, f(x)^{g(x)} = e^{lim\, g(x) \cdot [f(x) - 1]}$$

Asíntotas y Ramas Infinitas

Asíntotas

Verticales

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$$

$$\exists\ A.V\ en\ x = k$$

Horizontales

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

$$\exists\ A.H\ en\ y = k$$

Oblicuas

$$m\colon \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = k \qquad n\colon \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = k$$

$$\exists\ A.O\ en\ y = mx + n$$

Ramas Infinitas

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Continuidad en un punto

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(a)$$

Discontinuidad en un punto

Inevitable de Salto Infinito	Inevitable de Salto Finito	Evitable
Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe	$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$	$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) \neq f(a)$

Teoremas

Teorema de Bolzano

$$Si\ f(x)\ cumple: \begin{cases} ser\ continua\ en\ [a,b] \\ signo\ f(a) \neq signo\ f(b) \end{cases} \rightarrow \exists\ c \in (a,b) / f(c) = 0$$

Teorema de Darboux o de los Valores Intermedios

$$Si\ f(x)\ cumple: \begin{cases} ser\ continua\ en\ [a,b] \\ f(a) < k < f(b) \end{cases} \rightarrow \exists\ c\ (a,b) / f(c) = k$$

Teorema de Weierstrass

$$Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b]: f(x)\ alcanza\ el\ máximo\ y\ mínimo\ absoluto\ en\ (a,b)$$

7.- Derivadas y Aplicaciones

Tasa de Variación Media

$$T.V.M\,[a,b] = \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a}$$

$$\begin{cases} T.V.M > 0 \rightarrow f(x)\ es\ Creciente\ en\ [a,b] \\ T.V.M < 0 \rightarrow f(x)\ es\ Decreciente\ en\ [a,b] \end{cases}$$

Tasa de Variación Instantánea (Derivada en un Punto)

$$T.V.I\,(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\,(x) - f\,(a)}{x - a}$$

$$\begin{cases} T.V.I > 0 \rightarrow f(x)\ es\ Creciente\ en\ x = a \\ T.V.I < 0 \rightarrow f(x)\ es\ Decreciente\ en\ x = a \end{cases}$$

Derivadas Laterales

$$\exists\, f'(a) \leftrightarrow f'(a^-) = f'(a^+) \rightarrow \begin{cases} f'(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f\,(x) - f\,(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f\,(a + h) - f\,(a)}{h} \\ f'(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f\,(x) - f\,(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f\,(a + h) - f\,(a)}{h} \end{cases}$$

Reglas de Derivación

Multiplicación por k

$$[k \cdot f\,(x)]' = k \cdot f'(x)$$

Suma y resta

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Producto

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Cociente

$$\left[\frac{f\,(x)}{g\,(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'x)}{[g(x)]^2}$$

Composición (Regla de la Cadena)

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f(x) = sen\, x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -sen\, x$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = tg\, x$	$f'(x) = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = arc\, sen\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = arc\, \cos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x) = arc\, tg\, x$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

Derivada de la Función Inversa o Recíproca de Otra

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \rightarrow Derivando \rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x) = 1 \rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Derivada de una función Implícita

$$y^3 + 5y^2x + 1 = 0 \rightarrow 3y^2y' + 5(2yy'x + y^2) = 0 \rightarrow 3y^2y' + 10yy'x + 5y^2 = 0 \rightarrow y' = \frac{-5y^2}{3y^2 + 10yx}$$

Derivación Logarítmica

$$y = f(x)^{g(x)}$$

1) $Ln\, y = Ln\, f(x)^{g(x)} \rightarrow Ln\, y = g(x)\cdot Ln\, f(x)$
2) $\frac{y'}{y} = g'(x)\cdot Ln\, f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$
3) $y' = y\cdot\left[g'(x)\cdot Ln\, f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$
4) $y' = f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot Ln\, f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Aplicaciones de las Derivadas

Recta Tangente a una Función en un Punto

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Recta Normal a una Función en uno Punto

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$$

Información Extraída de la 1ª Derivada

Crecimiento

$f(x)$ *creciente en* x_0 *si* $f'(x_0) \geq 0$

$f(x)$ *decreciente en* x_0 *si* $f'(x_0) \leq 0$

Máximos

$$f'(x_0) = 0 \rightarrow f''(x_0) < 0$$

Mínimos

$$f'(x_0) = 0 \rightarrow f''(x_0) > 0$$

Información Extraída de la 2ª Derivada

Curvatura

$f(x)$ *convexa en* x_0 *si* $f''(x_0) > 0$

$f(x)$ *cóncava en* x_0 *si* $f''(x_0) < 0$

Puntos de Inflexión

$$f''(x_0) = 0 \rightarrow f'''(x_0) \neq 0$$

Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teoremas de Derivabilidad

Teorema de Rolle

$$Si\ f(x)\ cumple: \begin{cases} es\ continua\ en\ [a,b] \\ es\ derivable\ en\ (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{cases} \rightarrow \exists\, c \in (a,b)\ /\ f'(c) = 0$$

Teorema del Valor Medio o de Lagrange

$$Si\ f(x)\ cumple: \begin{cases} es\ continua\ en\ [a,b] \\ es\ derivable\ en\ (a,b) \end{cases} \rightarrow \exists\, c \in (a,b)\ /f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

8.- Integrales y Aplicaciones

Integral Indefinida

Operaciones

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \qquad \int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int (f \cdot g)(x)dx \neq \left[\int f(x)dx\right] \cdot \left[\int g(x)dx\right] \qquad \int \left(\frac{f}{g}\right)(x)dx \neq \frac{[\int f(x)dx]}{[\int g(x)dx]}$$

Función	Integral	Función	Integral
$\int k\,dx$	$k\,x + C$	$\int \frac{1}{x\,Ln\,a}\,dx$	$log_a\,x + C$
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int sen\,x\,dx$	$-\cos x + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$	$\sqrt{x} + C$	$\int \cos x\,dx$	$sen\,x + C$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,dx$	$\sqrt[n]{x} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int [1 + tg^2 x]dx$	$tg\,x + C$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{ln\,a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$arc\,sen\,x + C$
$\int e^x\,dx$	$e^x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$arc\,tg\,x + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$ln\lvert x\rvert + C$	$\int cosec^2\,x\,dx$	$-cotg\,x + C$

Por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

A: Arcos

L: Logaritmos

P: Polinomios

E: Exponenciales

S: Senos, cosenos, tangentes

Racionales

Grado de $P(x) \geq$ Grado $Q(x)$

$$\int C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Grado de $P(x) <$ Grado $Q(x)$

Raíces Reales Simples

$$\int \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-b}dx$$

Raíz Real Doble

$$\int \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2}dx$$

Raíz No Real

$$\int \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+1}dx$$

Integral Definida

Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Propiedades

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$Si\ f(x) > 0\ y\ continua\ en\ [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx > 0$	$Si\ a < b < c\ y\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$Si\ f(x) > 0\ y\ continua\ en\ [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx < 0$	$Si\ f(x) < g(x)\ en\ cada\ x \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Operaciones

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Teoremas de Integración

Teorema fundamental del cálculo

$$Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b]:\ \ F(x)\ es\ derivable\ y\ verifica\ que\ F'(x) = f(x)$$

$$siendo\ F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad x \in [a,b]$$

Teorema del valor medio del cálculo integral

$$Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b]:\ \ \exists\, c \in [a,b] / \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Aplicaciones

Área encerrada entre una curva y el eje OX, $x = a$ y $x = b$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Área encerrada entre varias curvas

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Volumen de un cuerpo de revolución

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$