OMA

ALGUNOS TÍPICOS DE ECUACIONES FUNCIONALES

Sesión preparatoria para las olimpiadas andaluzas

Francisco José Valladares Herrera
13/02/2023

RESUMEN TEÓRICO

Una ecuación es, por definición, una igualdad entre expresiones algebraicas donde aparecen una o más variables, llamadas incógnitas. Resolver la ecuación es encontrar todos los posibles valores de las incógnitas para los que la igualdad es cierta. Pero… ¿qué es una ecuación funcional entonces?

DEFINICIÓN (ECUACIÓN FUNCIONAL)

Una ecuación funcional es una ecuación en la que la incógnita no representa a un número sino a una función.

Por ejemplo, podemos preguntarnos qué funciones f cumplen la igualdad

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

para todo valor de x. La incógnita en esta ecuación funcional no es x sino f. Una solución es elegir $f(x) = x$ para todo número natural $x \in \mathbb{N}$. Esto nos dice que

$$f(x+1) = x+1, \qquad f(x)+1 = x+1,$$

luego esta elección de f cumple la igualdad propuesta. Si ahora pensamos que la variable x no es un número natural sino real, entonces otra solución es la función *parte entera* $f(x) = \lfloor x \rfloor$, ya que se cumple que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

¿Cuál es la clave para resolver ecuaciones funcionales?

Teniendo en cuenta el dominio de la función, muchas veces podemos entender una ecuación funcional como un sistema de ecuaciones, donde las pistas de cada ecuación te lo va a dar cada valor que imagines darle a "x". Es sumamente importante entender el "para todo" que a veces dan como información en la ecuación funcional.

La clave es entender tus posibilidades y hacer los cambios necesarios para hallar f(x).

A continuación vamos a ver unos cuantos trucos que pueden ser muy útiles de cara a las olimpiadas.

Algunos trucos:

TRUCO 1: *Cuando solo te aparece una variable "x" en la ecuación, tendrás que hacer al menos dos cambios x= u(t), y x=v(t), de tal forma que obtengamos un sistema de ecuaciones con f(t).*

TRUCO 2*: Si tienes dos variables "x" e "y" es común hacer el cambio x=0, o y=0, o x=1, o y=1, para obtener alguna pista de la función, pero lo que es seguro es que tendrás que hacer un cambio y=u(x), de forma que te quede una sola expresión que dependa de una variable.*

TRUCO 3*: Si tenemos la expresión f (u(x)) = f (v(x)), solo podemos afirmar que u(x) = v(x) si demostramos antes que f es inyectiva. Para demostrar que algo es inyectivo, has de demostrar que, si f(a)=f(b) entonces a=b.*

TRUCO 4*: Si ninguno de los trucos anteriores te sirvieron, prueba por tomar una función auxiliar g(x) en la que metemos f(x), a veces esto es necesario para simplificar expresiones.*

TRUCO 5*: A veces la paridad de una función te da la clave. Por ejemplo, si* $f(x)^2 = x\,f(x)$, *te tienes que fijar que la igualdad de la izquierda es par (todo está con exponentes pares), por tanto la igualdad de la derecha debería de ser par también, para ello necesariamente f(x) tiene que ser impar (y de aquí, podemos decir que al ser impar cumple f(-x)=- f(x), etc.)*

TRUCO 6: *Si una función* $f: A \to R$ *es sobreyectiva, entonces existirá siempre un valor "a", tal que f(a) =0. Este argumento es muy útil para utilizar "a" y "f(a)" en la propia ecuación.*

TRUCO 7*: Aplicar la ecuación funcional de Cauchy: Si f(x + y) = f(x) + f(y), entonces existe un "m" real tal que f(x)=mx, para todo "x" racional.*

TRUCO 8*: Si sabes intuitivamente que la única solución es "f(x) = pitopito", tienes que demostrar por Reducción al Absurdo que, efectivamente, no podría ser de otra forma.*

PROBLEMAS

Problema 1 (Nivel 1/5)
Halla todas las funciones reales que cumplan:

$$f(x) + 2f(-x) = (1+x)^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 (Nivel 1/5)

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

Problema 3 (Nivel 1/5)

Encontrar todas las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x+y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x, y reales.

Problema 4 (Nivel 2/5)
Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican que

$$f(x^2 - y^2) = (x-y)\,(f(x) + f(y))$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 5 (Nivel 2/5)

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican que

$$f((x-y)^2) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 7 (Nivel 2/5)

Hallar todas las funciones $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ que cumplen que existe $\lambda>0$ con $f(\lambda)=1$ tal que

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right)=2f(xy),$$

para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$.

OME 2006. Problema 4.

Problema 8 (Nivel 3/5)

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ que verifiquen

$$f(x+f(y))=f(x)-y$$

para cualesquiera números enteros $x,y\in\mathbb{Z}$.

OME 2004. Problema 3.

Problema 9 (Nivel 3/5)

Demostrar que si una función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cumple que

$$f(m^2+f(n))=f(m)^2+n$$

para cualesquiera $m,n\in\mathbb{Z}$, entonces $f(n)=n$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Problema 10 (Nivel 3/5)

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen que

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$$

para cualquier $x\in\mathbb{R}$ distinto de 0 y de 1.

Problema 11 (Nivel 3/5)

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 12 (Nivel 3/5)

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 13 (Nivel 3/5)

Hallar las funciones $f : \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para cualquier $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

Olimpiada Iberoamericana 1987. Problema 1.

Problema 14 (Nivel 4/5)

Demostrar que no existen funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(f(n)) = n + 1$$

para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$.

OME 2000. Problema 6.

Problema 15 (Nivel 5/5)

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen que

$$\big(f(x) + f(y)\big)\big(f(u) + f(v)\big) = f(xu - yv) + f(xv + yu),$$

para cualesquiera $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

Olimpiada Matemática Internacional, 2002. Problema 5.

SOLUCIONES

*(El paso final en la resolución es muy importante para resolver una ecuación funcional: cuando obtenemos las soluciones, **es necesario comprobar que se trata efectivamente de soluciones**. Esto es lo mismo que pasa en ecuaciones numéricas y, en caso de las olimpiadas, suelen perderse puntos por no comprobar).*

Problema 1 (Nivel 1/5)

Hagamos la sustitución $x \mapsto -x$. Esta nos dice que

$$f(-x) + 2f(x) = (1+x)^2, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Esta es una nueva ecuación funcional que podemos usar junto con la original. De hecho, en ambas f aparece sólo en los términos $f(x)$ y $f(-x)$. Podemos entonces resolver el sistema lineal que forman ambas ecuaciones como si $f(x)$ y $f(-x)$ fueran las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) + 2f(-x) = (1+x)^2 \\ 2f(x) + f(-x) = (1-x)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = \frac{2(1-x)^2-(1+x)^2}{3} = \frac{x^2-6x+1}{3} \\ f(-x) = \frac{2(1+x)^2-(1-x)^2}{3} = \frac{x^2+6x+1}{3} \end{array}\right.$$

El valor de $f(-x)$ no nos interesa en realidad, pues hemos demostrado que la única solución posible a la ecuación original es $f(x) = \frac{x^2-6x+1}{3}$. Es necesario comprobar que se trata de una solución, para lo que verificamos la ecuación funcional del enunciado para esta elección de f:

$$f(x) + 2f(-x) = \frac{x^2-6x+1}{3} + 2\frac{x^2+6x+1}{3} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Problema 2 (Nivel 1/5)

Fijémonos que la ecuación nos relaciona $f(x)$ y $f(1-x)$ de forma lineal. Dado que $1-(1-t)=t$, podemos sustituir $x=t$ y $x=1-t$ por separado y obtener:

$$t^2 f(t) + f(1-t) = 2t - t^4$$

$$(1-t)^2 f(1-t) + f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4$$

Ahora podemos ver esto como un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas $f(t)$ y $f(1-t)$, y los coeficientes son funciones de t. De la primera ecuación podemos despejar $f(1-t)$ y sustituirla en la segunda. Nos queda:

$$(1-t)^2\left[2t - t^4 - t^2 f(t)\right] + f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4$$

$$\left[-(1-t)^2 t^2 + 1\right] f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4 - (1-t)^2 \cdot (2t - t^4)$$

$$[-t^4 + 2t^3 - t^2 + 1] f(t) = t^6 - 2t^5 + 2t^3 - 2t^2 + 1$$

Haciendo la división, podemos ver que $t^6 - 2t^5 + 2t^3 - 2t^2 + 1 = (-t^2+1)(-t^4+2t^3-t^2+1)$, así que sacamos $f(t) = -t^2 + 1$.

Es necesario ver que esta función en efecto cumple la funcional:

$$x^2(1-x^2) + 1 - (1-x)^2 = x^2 - x^4 + 1 - 1 + 2x - x^2 = 2x - x^4$$

Problema 3 (Nivel 1/5)

Como la ecuación se debe cumplir para cualquier valor de x y de y, podemos poner $x=0$ y obtener que $f(f(y)) = f(0) + y$. Esto nos dice que es biyectiva, esto es, sobreyectiva e inyectiva:

En efecto, es sobreyectiva si para cada valor t real encontrar $algo$ con $f(algo) = t$. Poniendo $y = t - f(0)$ lo encontramos: $f\Big(f(t - f(0))\Big) = f(0) + (t - f(0)) = t$.

Para ver que es inyectiva, se tiene que ver que si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$. Dicho de otra manera, si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. En nuestro caso eso pasa, ya que si suponemos $f(a) = f(b)$, tenemos $f(0) + a = f(f(a)) = f(f(b)) = f(0) + b$, que nos implica $a = b$.

Ahora volvemos a la ecuación original y ponemos $y = 0$. De aquí sacamos $f(x + f(x)) = f(2x)$. Como la función es inyectiva, debe pasar que los argumentos coincidan: $x + f(x) = 2x$, de donde sacamos $f(x) = x$.

Así pues, la función solución, si existe, tiene que cumplir $f(x) = x$ para cada x, así que está determinada. Solo falta comprobar si nuestro único candidato a solución lo es o no, y en este caso lo es porque $x + (x+y) = 2x + y$.

Problema 4 (Nivel 2/5)

Haciendo $x = y$, se tiene que $f(0) = 0$ y, haciendo ahora $y = 0$, se tiene que $f(x^2) = xf(x)$, de donde deducimos que f es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, haciendo el cambio $y \mapsto -y$ en la ecuación original, se tiene que

$$(x-y)(f(x)+f(y)) = f(x^2-y^2) = f(x^2+(-y)^2) = (x+y)(f(x)-f(y))$$

Desarrollando el primer y el último término e igualándolos, se tiene que $xf(y) = yf(x)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, de donde tenemos que $f(x) = xf(1)$ y hemos probado que las soluciones de la ecuación del enunciado tienen que ser de la forma $f(x) = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Como estas funciones cumplen dicha ecuación, deducimos que son todas las soluciones.

Problema 5 (Nivel 2/5)

Haciendo $x = y$, tenemos que $2xf(x) = f(x^2) + x^2 - f(0)$ y, como el miembro de la derecha es par, el de la izquierda también debe serlo, de donde deducimos que f es impar. Si consideramos la función impar $g(x) = f(x) - x$ y sustituimos $f(x) = g(x) + x$ en la ecuación original, llegamos a que g cumple la ecuación funcional $g((x-y)^2) = g(x)^2 + 2xg(x) - 2xg(y)$. Haciendo $x = 0$ en esta última ecuación, tenemos que $g(y^2) = g(0)^2$ para todo $y \in \mathbb{R}$, es decir, g es constante en el intervalo $[0, \infty)$ y, como es impar, es constante en todo $\mathbb{R}$, pongamos $g(x) = a$ para cierto $a \in \mathbb{R}$ y, en sustituyendo en la ecuación funcional de g, se cumple que $a = a^2$ luego $a = 0$ ó $a = 1$. Deshaciendo ahora el cambio de función, las únicas posibles soluciones para f son $f(x) = x$ y $f(x) = x + 1$ y es fácil comprobar que ambas cumplen la ecuación del enunciado.

Problema 7 (Nivel 2/5)

En primer lugar, haciendo $y = \frac{\lambda}{x}$ en la ecuación funcional, llegamos a que

$$f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 1.$$

lo que nos dice que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. Haciendo ahora $y = x$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(x)^2 = f\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2,$$

luego, combinando estas dos igualdades,

$$f(x)^4 = f(x)^2 f\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 = 1$$

De aquí deducimos que, para cada $x \in (0, \infty)$, se tiene que $f(x) = 1$ ó $f(x) = -1$. Además, la igualdad $f(x)f(\frac{\lambda}{x}) = 1$ nos dice ahora que $f(x) = f(\frac{\lambda}{x})$ para todo $x \in (0, \infty)$. Usando esto en la ecuación original, no es difícil ver que

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

para cualesquiera $x, y \in (0, \infty)$, es decir, f es *multiplicativa*. Tomando $y = \frac{\lambda}{x^2}$ en esta última ecuación y usando que $f(x) = f(\frac{\lambda}{x})$, deducimos que $f(\frac{\lambda}{x^2}) = 1$ para todo $x \in (0, \infty)$, lo que nos dice que f es constante uno. Como cumple la ecuación original, deducimos que $f(x) = 1$ es la única solución al problema.

Problema 8 (Nivel 3/5)

La función f es sobreyectiva ya que en la ecuación funcional el miembro de la derecha toma todos los valores enteros al mover x e y. Por tanto, existe y_0 tal que $f(y_0) = 0$ y, sustituyendo $y = y_0$ en la ecuación, tenemos que $y_0 = 0$, de donde $f(0) = 0$. Haciendo ahora $x = 0$ en la ecuación, se tiene que $f(f(y)) = -y$, lo que prueba que f es inyectiva ya que si $f(a) = f(b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $-a = f(f(a)) = f(f(b)) = -b$ y $a = b$. Dado $a \in \mathbb{Z}$ tal que $f(a) = 1$ y sustituyendo $y = a$ en la ecuación original, tenemos que $f(x+1) = f(x) - a$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, de donde se deduce que $f(x) = f(0) - ax = -ax$ y, por tanto, $a = \pm 1$ ya que si $a \neq \pm 1$, entonces f no sería inyectiva. En consecuencia, las únicas posibilidades para f son $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Como ninguna de estas dos funciones cumple la ecuación del enunciado, deducimos que no existen tales funciones.

Problema 9 (Nivel 3/5)

La ecuación funcional nos dice que f tiene que ser sobreyectiva ya que el miembro de la derecha toma cualquier valor entero al variar $m, n \in \mathbb{Z}$. Tomando $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n_0) = 0$ y sustituyendo $n = n_0$, tenemos que $n_0 = 0$ y, por tanto, $f(0) = 0$. Así es claro que $f(m^2) = f(m)^2$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y, en particular (para $m = 1$) tenemos que $f(1) = f(1)^2$ luego $f(1) = 0$ ó $f(1) = 1$. La primera opción no es posible ya que hemos probado que el único entero que tiene imagen cero es el propio cero, luego $f(1) = 1$. Tomando en la ecuación original $m = 1$, se sigue que $f(f(n) + 1) = f(n) + 1$ luego $f(2) = f(f(1) + 1) = f(1) + 1 = 2$, $f(3) = f(f(2) + 1) = f(2) + 1 = 3$ y, reiterando el proceso, se prueba que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver que esto también es válido para los negativos, observemos que $f(m)^2 = f(m^2) = f(-m)^2$ luego $f(-m) = \pm f(m)$ y, si probamos que f es inyectiva, tendríamos que $f(-m) = -f(m)$ y habremos terminado. Para ver que es inyectiva, haciendo $m = 0$ en la ecuación original, $f(f(n)) = n$ luego si $f(a) = f(b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$, tendremos que $f(f(a)) = f(f(b))$ y $a = b$.

Problema 10 (Nivel 3/5)

Consideremos la función $g(x) = \frac{1}{1-x}$, que cumple que

$$g(g(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}} = \frac{x-1}{x},$$

$$g(g(g(x))) = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = x.$$

La ecuación inicial se escribe como $f(x) + f(g(x)) = x$. Sustituyendo x por $g(x)$, llegamos a que

$$f(g(x)) + f(g(g(x))) = g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Volviendo a sustituir en esta última ecuación x por $g(x)$, obtenemos

$$f(g(g(x))) + f(x) = g(g(x)) = \frac{x-1}{x}.$$

Así, estas dos últimas ecuaciones junto con la ecuación inicial nos permiten formar el sistema de tres ecuaciones lineales con incógnitas $f(x)$, $f(g(x))$ y $f(g(g(x)))$ siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) + f(g(x)) &= x \\ f(g(x)) + f(g(g(x))) &= \frac{1}{1-x} \\ f(g(g(x))) + f(x) &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

que puede resolverse (nos interesa sólo el valor de $f(x)$) dando lugar a

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2(x-1)x}.$$

Problema 11 (Nivel 3/5)

La primera ecuación es conocida como la ecuación de Cauchy y nos dice que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Ahora bien, sustituyendo $x = y = 1$ en la segunda ecuación, obtenemos que $f(1) = f(1)^2$, con lo que $f(1) = 0$ o bien $f(1) = 1$. Si $f(1) = 0$, entonces sustituyendo $y = 1$ en la segunda ecuación, obtenemos directamente que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos entonces que $f(1) = 1$, luego $m = 1$ y $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Si probamos que $f(x)$ es creciente (es decir, $f(a) \geq f(b)$ cuando $a > b$), tendremos que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (¿por qué?). Dado $t > 0$, expresemos $t = a^2$ y, haciendo $x = y = a$ en la segunda ecuación, tenemos que $f(t) = f(a^2) = f(xy) = f(x)f(y) = f(a)^2 > 0$, luego f aplica reales positivos en reales positivos. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > b$, podremos expresar $a = b + t$ para cierto $t > 0$, luego $f(a) = f(b+t) = f(b) + f(t) > f(b)$, lo que nos dice que f es (estrictamente) creciente y, por tanto, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esto prueba que las únicas soluciones son $f(x) = 0$ y $f(x) = x$, que trivialmente verifican las dos ecuaciones.

Problema 12 (Nivel 3/5)

Haciendo $x = 0$, tenemos que $f(f(y)) = f(0)^2 + y$. Por otro lado, f es sobreyectiva a la vista de la ecuación funcional ya que el miembro de la derecha toma cualquier valor real al variar x e y. Por tanto, existirá $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ y, sustituyendo $x = y = x_0$ en la ecuación, tenemos que $x_0 = f(f(x_0)) = f(0)^2 + x_0$, de donde $f(0) = 0$ y $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, sustituyendo $y = 0$ en la ecuación inicial, tenemos que $f(xf(x)) = f(x)^2$ y, haciendo el cambio $x \mapsto f(x)$ en esta última igualdad, se llega a que $f(xf(x)) = x^2$ luego $f(x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, probaremos que las únicas posibilidades son $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ó $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por reducción al absurdo, si así no ocurriera, existirían $x_0, y_0 \neq 0$ tales que $f(x_0) = x_0$ y $f(y_0) = -y_0$ y, sustituyendo estos valores en la ecuación inicial, tendríamos que $f(x_0^2 - y_0) = x_0^2 + y_0$ donde tenemos dos posibilidades $f(x_0^2 - y_0) = x_0^2 - y_0$ ó $f(x_0^2 - y_0) = -x_0^2 + y_0$ (por ser $f(x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$). En el primer caso, se llega a que $y_0 = 0$ y en el segundo a que $x_0 = 0$, pero habíamos supuesto que $x_0, y_0 \neq 0$.

Por tanto, las únicas soluciones de la ecuación del enunciado son $f(x) = x$ y $f(x) = -x$.

Problema 13 (Nivel 3/5)

Consideremos la función auxiliar

$$\varphi : \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}, \qquad \varphi(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

que cumple que $\varphi(\varphi(x)) = x$.

La ecuación inicial se puede escribir como $f(x)^2 f(\varphi(x)) = 64x$. Si sustituimos x por $\varphi(x)$, obtenemos que $f(\varphi(x))^2 \cdot f(x) = 64\varphi(x)$, con lo cual tenemos el sistema

$$\begin{cases} f(x)^2 f(\varphi(x)) = 64x, \\ f(\varphi(x))^2 f(x) = 64\varphi(x). \end{cases}$$

Elevando la primera igualdad al cuadrado y dividiéndola por la segunda (que no se anula ya que $x \neq \pm 1$, luego $\varphi(x) \neq 0$) llegamos a que $f(x)^3 = 64\frac{x^2}{\varphi(x)}$, de donde podemos despejar

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{64x^2}{\varphi(x)}} = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}.$$

Puede comprobarse que esta función está bien definida para $x \neq -1$ y satisface la igualdad del enunciado, luego es la única solución al problema.

Problema 14 (Nivel 4/5)

La igualdad $f(f(n)) = n + 1$ nos dice que cuando encontramos f aplicada dos veces al mismo número, el resultado es el número más 1. Vamos a tomar f aplicada tres veces al mismo número n y calcular esto de dos formas distintas:

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1$$
$$f(f(f(n))) = f(n + 1)$$

En la primera, hemos aplicado la ecuación funcional sustituyendo $n \mapsto f(n)$ y en la segunda hemos aplicado f a los dos miembros de la ecuación funcional. Por tanto, deducimos que $f(n+1) = f(n) + 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Esta es una nueva ecuación funcional que también debe cumplirse. Sustituyendo en esta última $n = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos que

$$f(2) = f(1) + 1, \quad f(3) = f(2) + 1, \quad f(4) = f(3) + 1, \ldots$$

Como cada imagen se obtiene de la anterior sumando una unidad, llegamos a que los valores de f forman una progresión aritmética y se cumple que $f(n) = f(1) + n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En resumen, hemos probado que si f es una solución de la ecuación original, entonces $f(n) = n + a - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $a = f(1)$.

Para responder al enunciado bastará ver que estas funciones no cumplen la ecuación original y para ello sustituimos el valor de la función en la ecuación:

$$f(f(n)) = f(n + a - 1) = (n + a - 1) + a - 1 = n + 2a - 2.$$

Si esta última expresión debe ser igual a $n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces necesariamente $2a - 2 = 1$, de donde despejamos $f(1) = a = \frac{3}{2}$. Esto contradice que la función debe tomar valores naturales.

Problema 15 (Nivel 5/5)

Haciendo $x = y = u = v = 0$, tenemos que $4f(0)^2 = 2f(0)$, de donde $f(0) = \frac{1}{2}$ o bien $f(0) = 0$. Si $f(0) = \frac{1}{2}$, entonces haciendo $x = y = u = 0$, llegamos a que $f(u) = \frac{1}{2}$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si $f(0) = 0$, haciendo $y = v = 0$, tenemos que $f(x)f(u) = f(xu)$ para cualesquiera $u, x \in \mathbb{R}$, es decir, f es *multiplicativa*. Por tanto, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$, de donde $f(1) = 0$ ó $f(1) = 1$. Si $f(1) = 0$, entonces $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, descartando las soluciones constantes $f(x) = 0$ y $f(x) = \frac{1}{2}$, podemos suponer que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Tomando $x = y = 1$ en la ecuación original, llegamos a que

$$2f(u) + 2f(v) = f(u + v) + f(u - v),$$

y, para $u = 0$, tenemos que $f(v) = f(-v)$, es decir, f es una función par. Usando esto y tomando $x = u$ e $y = -v$ en la ecuación original, obtenemos que

$$f(u^2 + v^2) = \big(f(u) + f(v)\big)^2.$$

En particular, tenemos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, luego podemos considerar la función auxiliar $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Tomando $a = u^2$ y $b = v^2$, la ecuación anterior se escribe como

$$g(a + b) = \sqrt{f(u^2 + v^2)} = f(\sqrt{a}) + f(\sqrt{b}) = \sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)} = g(a) + g(b),$$

donde hemos usado que $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x)^2$ y, por tanto, $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x})$ para todo $x \geq 0$. Ahora bien, esto nos dice que g es aditiva luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(x) = m \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ y, como $g(1) = \sqrt{f(1)} = 1$, tenemos que $m = 1$. Si demostramos que f es creciente en $[0, \infty)$, entonces también lo será g y, por tanto, $g(x) = x$ para todo $x \in [0, \infty)$, luego $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0, \infty)$ y, como f es par, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Veamos entonces que f es creciente y habremos terminado. Para ello, dados $a \geq b \geq 0$, expresando $a = u^2 + v^2$, $b = u^2$ para ciertos $u, v \in \mathbb{R}$, y usando lo que hemos probado anteriormente, tenemos que

$$f(a) = f(u^2 + v^2) = \big(f(u) + f(v)\big)^2 = f(u^2) + 2f(uv) + f(v^2) \geq f(u^2) = f(b),$$

donde hemos usado que f es multiplicativa.

Deducimos que las únicas soluciones son $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$ y $f(x) = x^2$, que puede comprobarse fácilmente que verifican la ecuación inicial.