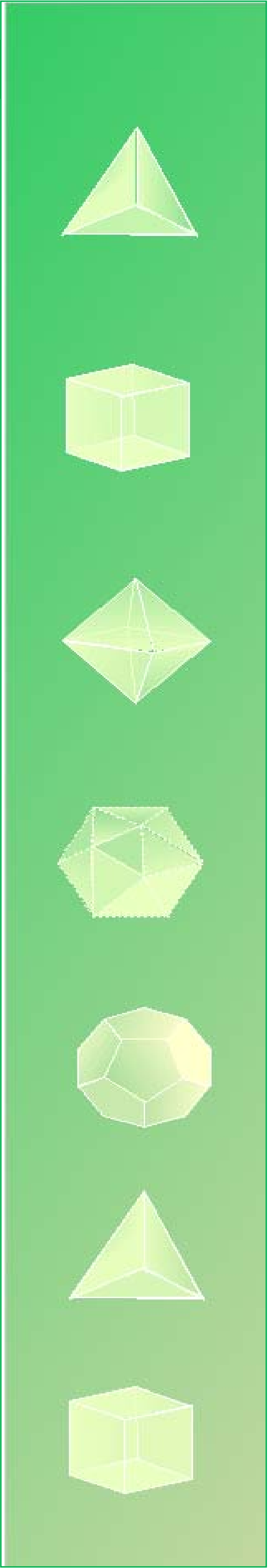


MATEMÁTICAS II
2º Bachillerato
Capítulo 10: Integrales

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *software* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

A estas alturas de tu vida estudiantil has aprendido muchos símbolos matemáticos. Posiblemente este sea el último que aprenderás en el instituto, el símbolo de integral:

$$\int$$

Fue introducido por el matemático alemán *Gottfried Leibniz* en 1675, basándose en la palabra latina *summa*, 'suma', escrito ſumma, tomando sólo la inicial. Por tanto, este símbolo es una S, y la integral no deja de representar una suma.

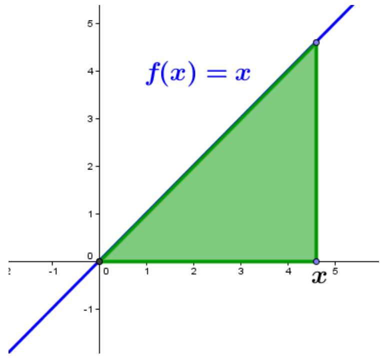
El término "Cálculo integral", por su parte, fue introducido por *Jakob Bernoulli* en 1690.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividades de introducción

- *Calcula el área de la región limitada por la función $f(x) = x$ entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x.*

Solución:



Si representamos la función $f(x) = x$ y dibujamos la superficie entre ella y el eje OX, obtenemos el triángulo rectángulo de la figura.

Sabemos que el área del triángulo es: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

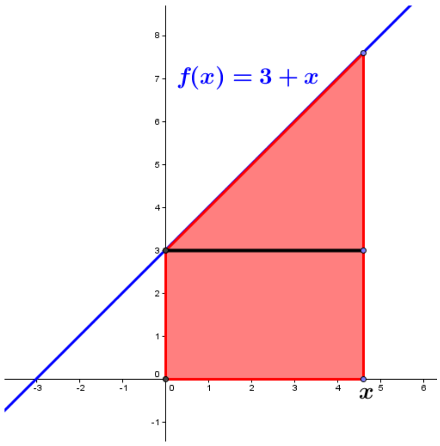
Tanto la base como la altura valen x unidades, por tanto:

$$\text{Área} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, el área bajo la curva $f(x) = x$ se calcula como $\text{A}(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

- *Calcula el área de la región limitada por la función $f(x) = 3 + x$ entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x.*

Solución:



Como antes, representamos la función $f(x) = 3 + x$ y dibujamos la superficie entre ella y el eje OX. Ahora obtenemos el trapecio rectángulo de la figura.

Si dividimos la figura en un rectángulo de altura 3 u y un triángulo, el área se calcula como:

$$\text{Área} = 3 \cdot x + \frac{x \cdot x}{2} = 3x + \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, el área bajo la curva $f(x) = 3 + x$ se calcula como:

$$\text{A}(x) = 3x + \frac{x^2}{2}.$$

- *Repite los procedimientos anteriores para calcular el área de la región limitada por las funciones* $f(x) = a$, $f(x) = a \cdot x$ y $f(x) = a \cdot x + b$ (con a y $b \in \mathbb{R}$) *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x.*

Analiza:

- Deriva las expresiones obtenidas en los ejercicios anteriores y razona qué relación hay entre las funciones $\text{A}(x)$ y $f(x)$.
- Recuerda la interpretación de área como "*suma de las unidades cuadradas encerradas por una figura*". Aplícala para determinar el área de la función $f(x) = 16 - x^2$, representándola en una cuadrícula y contando el número de cuadrados bajo ella para diferentes valores de x.
- Razona qué ocurre con el área cuando la función $f(x)$ es negativa en el intervalo analizado.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. LA INTEGRAL INDEFINIDA

1.1. Definición de primitiva

Se llama **función primitiva** de una función $f(x)$ a otra función $F(x)$ tal que la derivada de $F(x)$ es $f(x)$, es decir, $F'(x)=f(x)$

Ejemplo:

- *La función* $F(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+3x$ *es una primitiva de* $f(x)=3x^2-x+3$, *ya que* $F'(x)=f(x)$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la derivada, se verifica que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x)+C$, con $C\in\mathbb{R}$.

En efecto; consideramos la función $F(x)+C$, tal que $F'(x)=f(x)$ y $C\in\mathbb{R}$. Si derivamos:

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$$

Por tanto, $F(x)+C$ es primitiva de $f(x)$.

1.2. Definición de integral indefinida

La **integral indefinida** de una función $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas, y se representa como $\int f(x)dx$. Se lee "integral de $f(x)$ diferencial de *x*".

Por tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

A C se la denomina **constante de integración**, y el dx nos indica que estamos integrando respecto de x.

Esto que ahora no parece tener demasiada importancia, sí la tendrá más adelante, ya que está relacionado con la regla de la cadena que vimos en el capítulo anterior y, en el futuro, aprenderás a realizar integrales en varias variables.

Por otro lado, si recordamos lo visto en la actividad inicial y lo explicado en el "Resumen" acerca del origen del símbolo de integral, la expresión de la integral indefinida es la estilización de la expresión:

Suma de $f(x)$ por Δx cuando $\Delta x\to 0$,

es decir:

$\int f(x)dx=$ "la suma del área de todos los rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal (dx)"

Ejemplos:

- $\int 4x^3dx=x^4+C$ *porque* $(x^4+C)'=4x^3$.
- $\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$ *porque* $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1.3. Propiedades de la integral

Las propiedades de las derivadas justifican muchas de las propiedades de las integrales.

Suma (y resta) de integrales

Sabiendo que si $h(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)+g'(x)$:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Producto por un número real

Sabiendo que si $h(x)=k\cdot f(x)\Rightarrow h'(x)=k\cdot f'(x)$:

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$$

Ejemplos:

- $\int (5x^4+2x)dx = \int 5x^4dx + \int 2x\,dx = x^5+x^2+C$ *porque* $(x^5+x^2+C)' = 5x^4+2x$.
- $\int 7\cos x\,dx = 7\int \cos x\,dx = 7\,\mathrm{sen}\,x + C$ *porque* $(7\,\mathrm{sen}\,x + C)' = 7\cos x$

Actividades resueltas

- *Determina los valores de a, b y c para los que* $F(x)=ax^3+be^x+cx$ *es una primitiva de la función* $f(x)=7x^2-5e^x+3$.

  Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

  $$F'(x)=f(x)\Rightarrow 3ax^2+be^x+c=7x^2-5e^x+3\Rightarrow\{a=\tfrac{7}{3}, b=-5, c=3\}$$

- *Determina a y b para que* $F(x)=a\ln x^3+bx$ *sea una primitiva de* $f(x)=\ln x^2-5$.

  Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

  $$F'(x)=f(x)=a\frac{3x^2}{x^3}+b\neq \ln x^2-5\Rightarrow \text{Es imposible}$$

- *Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función* $f(x)=3+8x+15x^2$. *Encuentra la función del coste total,* $F(x)$, *si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que* $F(0)=100$.

  Como F es una primitiva de $f(x)=3+8x+15x^2$:

  $$F(x)=\int f(x)dx = \int (3+8x+15x^2)dx = 5x^3+4x^2+3x+C$$

  Nos dicen que $F(0)=100$:

  $$F(0)=100\Rightarrow 5\cdot 0^3+4\cdot 0^2+3\cdot 0+C=100\Rightarrow C=100$$

  Entonces:

  $$F(x)=5x^3+4x^2+3x+100$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividades propuestas

1. Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int 4x^3 dx$ b) $\int 3x^2 dx$ c) $\int 5x^4 dx$ d) $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2\right) dx$

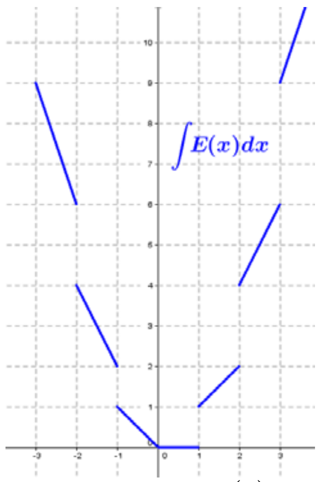
2. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifica $F(0) = 4$.

3. Comprueba si $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ es una primitiva de $f(x) = 12x^2 + 4x + 3$. En caso negativo, explica por qué.

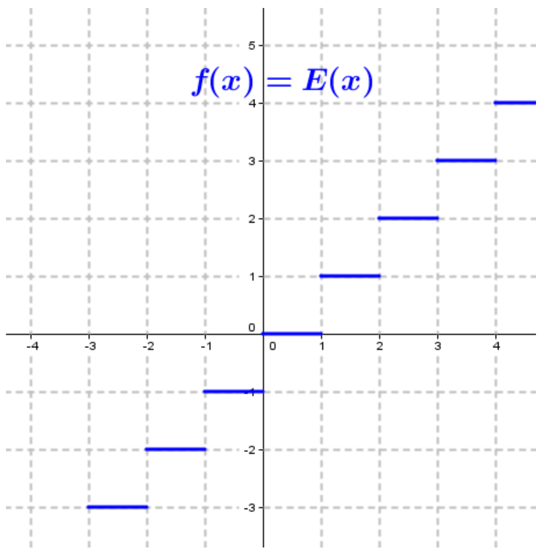
4. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

5. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio.
Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

6. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2. INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES

2.1. Integral del diferencial de x. Integrales inmediatas

El término dx está relacionado, como su propio nombre indica, con el concepto de diferencial visto en el capítulo anterior. Teniendo en cuenta que la derivada y la integral son operaciones inversas una de la otra, es inmediato deducir que:

$$\int dx = x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Esta idea nos permite definir las integrales inmediatas:

Integrales inmediatas son las que se obtienen directamente por la propia definición de integral.

Si recordamos la regla de la cadena para la derivación:

$$F(x) = f(u) \Rightarrow F'(x) = f'(u) \cdot u'$$

podemos reescribirla en forma diferencial como:

$$F(x) = f(u) \Rightarrow dF = f'(u) \cdot du$$

y, calculando su integral:

$$\int f'(u) \cdot du = \int dF = F(x) + C$$

Ejemplos:

- $\int (5x^4 + 6x) \cdot e^{x^5+3x^2}\, dx = \int e^{x^5+3x^2}\, d(x^5 + 3x^2) = \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^5+3x^2} + C$
- $\int \sqrt[3]{x+3}\, dx = \int (x+3)^{1/3}\, d(x+3) = \dfrac{(x+3)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x+3)^4} + C$
- $\int \dfrac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \dfrac{dx}{x} = \int \ln x\, d(\ln x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

2.2. Integral de la función constante

La integral de una constante es igual a esa constante multiplicada por x.

$$\int k\, dx = k \cdot x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

En efecto; consideramos la función $F(x) = k\,x + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Si derivamos:

$$F'(x) = (k\,x + C)' = k + 0 = k$$

También podríamos demostrarlo con lo visto en 1.3.2 y en 2.1:

$$\int k\, dx = k \cdot \int dx = k \cdot x + C$$

Ejemplos:

- $\int 3\, dx = 3x + C$
- $\int (-8)dx = -8x + C$
- $\int \frac{3}{5}\, dx = \frac{3}{5}x + C$
- $\int 2\sqrt{3}\, dx = 2\sqrt{3}\, x + C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.3. Integrales de funciones potenciales

Ya conocemos la derivada de la función potencial:

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1} \quad \text{con } n\in\mathbb{R}$$

También conocemos que:

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

Es fácil razonar el proceso inverso:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \text{ si } n\neq -1 \text{ y con } C\in\mathbb{R}.$$

Ejemplos:

- $\int x^5\, dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C$
- $\int \sqrt[3]{x}\, dx=\int x^{1/3}\, dx=\frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$
- $\int \frac{1}{x^3} dx=\int x^{-3}\, dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{2x^2}+C$

El caso $n=-1$ corresponde al logaritmo neperiano:

$$\int \frac{1}{x} dx=\int x^{-1}dx=\ln|x|+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}.$$

Donde el valor absoluto se debe a que tenemos que plantear todas las posibles funciones cuya derivada sea la función del integrando, y se cumple que:

$$f(x)=\ln|x|=\begin{cases}\ln(-x) & \text{si } x<0\\ \ln x & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{-x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \quad \forall x\neq 0$$

Estas dos fórmulas se pueden generalizar a partir de la regla de la cadena, como vimos antes:

$$\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C \text{ si } n\neq -1 \quad \text{y} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}.$$

Ejemplos:

- $\int \frac{-4}{9-4x}dx=\ln|9-4x|+C$
- $\int (x^2+2)^5\cdot x\, dx=\frac{1}{2}\int (x^2+2)^5\cdot 2x\, dx=\frac{1}{2}\int [f(x)]^5\cdot f'(x)dx=\frac{1}{2}\frac{[f(x)]^6}{6}+C=\frac{(x^2+2)^6}{12}+C$
- $\int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx=\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|+C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.4. Integrales de funciones exponenciales

Partiendo de la derivada de las funciones exponenciales:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \quad \text{y} \quad f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=\ln a\cdot a^x$$

deducimos:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{y} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 1.$$

Y su generalización con la regla de la cadena:

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)}+C \quad \text{y} \quad \int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 1.$$

Ejemplos:

- $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}+C$
- $\int 7^{2x^2}4x dx = \frac{7^{2x^2}}{\ln 7}+C$
- $\int 8e^{8x}dx = e^{8x}+C$
- $\int 9e^x dx = 9\int e^x dx = 9e^x + C$
- $\int e^{5x}dx = \int \frac{e^{5x}\cdot 5}{5}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5dx = \frac{1}{5}e^{5x}+C$

  Necesitamos la derivada del exponente. Lo solucionamos multiplicando y dividiendo por 5
- $\int x^2\cdot e^{x^3}dx = \int \frac{x^2\cdot e^{x^3}\cdot 3}{3}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

  Necesitamos la derivada del exponente, es decir, $3x^2$. Tenemos el x^2, pero nos falta el 3. Para solucionarlo, multiplicamos y dividimos por 3
- $\int 2^{-\frac{x}{3}}dx = \int \frac{2^{-\frac{x}{3}}\cdot(-3)}{-3}dx = -3\int -\frac{1}{3}\cdot 2^{-\frac{x}{3}}dx = -3\cdot\frac{2^{-\frac{x}{3}}}{\ln 2}+C$

  Necesitamos la derivada del exponente, es decir, $-\frac{1}{3}$. Para ello, dividimos y multiplicamos por -3.

2.5. Integrales de funciones trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{sen} f(x)\cdot f'(x)dx = -\cos f(x)+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R}.$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C \quad \text{y} \quad \int \cos f(x)\cdot f'(x)dx = \operatorname{sen} f(x)+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R}.$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C \quad \text{y} \quad \int \sec^2 f(x)\cdot f'(x)dx = \operatorname{tg} f(x)+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R}.$$

Ejemplos:

- $\int \operatorname{sen}(x-7)dx = -\cos(x-7)+C$
- $\int 4x\cdot\operatorname{sen}(2x^2)dx = -\cos(2x^2)+C$
- $\int \frac{\cos(\ln 2x)}{x}dx = \int \cos(\ln 2x)\cdot\frac{1}{x}dx = \operatorname{sen}(\ln 2x)+C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.6. Integrales cuyo resultado son funciones trigonométricas inversas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \text{arc sen } x + C \\ -\text{arc cos } x + C \end{cases} \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)dx = \text{arc sen } f(x) + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arc tg } x + C \\ -\text{arc cotg } x + C \end{cases} \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)dx = \text{arc tg } f(x) + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{arc sec } x + C \\ -\text{arc cosec } x + C \end{cases} \quad \text{y} \quad \int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} = \text{arc sec}\left[f(x)\right] + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos:

- $\int \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4dx = \text{arc sen}(4x) + C$
- $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = 3\int \frac{2}{2\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2dx = \frac{3}{2}\text{arc sen}(2x) + C$
- $\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{6x}{x^2+1} dx = 3\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx = 3 \cdot \text{arc tg}\left[\ln(x^2+1)\right] + C$

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes primitivas:*

  o $\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx$. Observamos que la derivada del radicando es 4*x*, así que multiplicamos y dividimos entre 4:

  $$\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{4}\int 4x \cdot \sqrt{2x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+5} \cdot 4x\,dx$$

  Entonces, esta primitiva es equivalente a $\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + C$:

  $$\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{(2x^2+5)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6} + C$$

  o $\int \frac{1}{(1+e^{-2x}) \cdot e^x} dx$. La función *más importante* es la exponencial, y vemos que la expresión más compleja se encuentra en un denominador en una forma similar al arco tangente.

  La reescribimos como:

  $$\int \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot \frac{1}{e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} dx = \int \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot e^{-x} dx$$

  Y se confirma la hipótesis. Multiplicando y dividiendo entre (-1), para completar la derivada de e^{-x}:

  $$\int \frac{1}{(1+e^{-2x})e^x} dx = -\int \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot (-e^{-x})dx = -\int \frac{1}{1+u^2} \cdot du = -\text{arc tg}(e^{-x}) + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

3.1. Integración por cambio de variable

La integración por cambio de variable busca transformar la primitiva dada en una más sencilla, y puede hacerse de dos formas diferentes:

Caso 1. Identificar una parte del integrando con una nueva variable *t*.

Ejemplo:

- $\int (3x+2)^4\,dx$. No es necesario un cambio de variable, pero vamos a mostrar el mecanismo:

Hacemos el binomio igual a *t* y diferenciamos ambos términos:

$$\left| \begin{array}{l} 3x+2=t \\ 3dx=dt \rightarrow dx=\dfrac{dt}{3} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int (3x+2)^4\,dx=\int t^4\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^4 dt$$

Resolvemos la primitiva en la forma habitual:

$$\frac{1}{3}\int t^4 dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{15}+C$$

Finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int (3x+2)^4\,dx=\frac{(3x+2)^5}{15}+C$$

El caso más frecuente es aquél en el que observamos una función *complicada* y su derivada:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$$

Una vez identificada, el cambio de variable consiste en llamar a dicha función *t* y diferenciar:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx \rightarrow \left| \begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)dx=dt \end{array} \right\rangle$$

La integral se transforma en otra que integraremos:

$$\int f(t)\,dt = F(t)+C$$

Para, finalmente, deshacer el cambio:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dt = F[g(x)]+C$$

Ejemplo:

- $\int \left(3\,\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{tg}\,x+1\right)\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. La derivada de la tangente es $(\mathrm{tg}\,x)' = \sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, y así:

Hacemos la tangente igual a *t*, diferenciamos ambos términos e integramos:

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x=t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \left(3\,\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{tg}\,x+1\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(3t^2+2t+1\right)dt = t^3+t^2+t+C$$

Deshacemos el cambio y obtenemos:

$$\int \left(3\,\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{tg}\,x+1\right)\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\,x+C$$

Muchas veces se convertirá en una integral inmediata y, como en los ejemplos, no habría sido necesario dicho cambio.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Caso 2. El cambio será de la forma $x = g(t)$, donde $g(t)$ se elegirá de forma adecuada para simplificar el integrando. Se diferencia la igualdad:

$$\int f(x)\,dx \to \left| \begin{array}{c} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{array} \right\rangle$$

Sustituimos en la integral, integramos y deshacemos el cambio hallando la función inversa de g:

$$\int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = F(t) + C \to \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ \quad \Rightarrow t = g^{-1}(x) \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int f(x)\,dx = F\left[g^{-1}(x)\right] + C$$

Ejemplo:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. La expresión del radical es similar a la relación que existe entre las funciones trigonométricas, así que *intentamos* el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left[1-(\operatorname{sen} t)^2\right]^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left(\cos^2 t\right)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

Esta primitiva es inmediata:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C$$

Finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arc\,sen} x \end{array} \right\rangle = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) + C$$

En este caso, la expresión final es bastante *fea*, pero podemos mejorarla. Si en lugar de deshacer el cambio directamente buscamos la relación entre el seno y la tangente:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}$$

Obtenemos:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Hay muchos cambios ya estudiados, de uso frecuente para casos concretos. Será el método que explicaremos en los apartados 3.3 y siguientes.

Actividades resueltas

- $\int \sqrt{5x+3}\,dx$. Como antes, es una integral inmediata, pero vamos a repetir el procedimiento:

Hacemos el binomio igual a t y diferenciamos:

$$\left| \begin{array}{l} 5x+3 = t \\ 5dx = dt \to dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \sqrt{5x+3}dx = \int \sqrt{t} \cdot \tfrac{1}{5}dt = \tfrac{1}{5}\int \sqrt{t} \cdot dt$$

Resolvemos la primitiva: $\frac{1}{5}\int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{5}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{t^3} + C$

Y deshacemos el cambio: $\int \sqrt{5x+3}\,dx = \frac{2}{15}\sqrt{(5x+3)^3} + C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- $\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{6x}{x^2+1} dx$. La derivada del logaritmo es:

$$\left[\ln(x^2+1)\right]' = \frac{2x}{x^2+1}$$

que se encuentra en la fracción que precede al diferencial de x. Hacemos el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} \ln(x^2+1) = t \\ \frac{2x\,dx}{x^2+1} = dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot 3dt = 3 \cdot \text{arc tg } t + C = 3 \cdot \text{arc tg}\left[\ln(x^2+1)\right] + C$$

- Resuelve $\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx$ haciendo el cambio de variable $x+1=t^2$

Hacemos el cambio que nos indican:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx = \left| \begin{array}{c} x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\rangle = \int (t^2-1)^2 \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt$$

Desarrollamos el cuadrado, simplificamos e integramos:

$$\int (t^2-1)^2 \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt = \int (t^4-2t^2+1) \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^6-2t^4+t^2)dt = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{1}{3}t^3\right) + C$$

Y, finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t^2 \\ t=\sqrt{x+1} \end{array} \right\rangle = \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$$

Actividades propuestas

7. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ haciendo $x=t^{12}$.

b) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ haciendo $e^x=t$.

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$ haciendo $1+2x=t^2$

d) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1}=t$

e) $\int (2\,\text{sen}^3 x + 3\,\text{sen}^2 x - \text{sen } x + 3)\cos x\,dx$ haciendo $\text{sen } x = t$

f) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ haciendo $x = \text{sen } t$

8. Elige el cambio de variable que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3+1}{(x^4+2x)^3} dx$ b) $\int \frac{e^{\text{arctg}x}}{1+x^2} dx$ c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$

d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49} \cdot dx$ e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.2. Integración por partes

La **integración por partes** es un método que nos permite calcular la integral del producto de dos funciones de naturaleza diferente, una **fácilmente derivable** y otra **fácilmente integrable**. Los casos más frecuentes son arcos, logaritmos, polinomios, exponenciales y trigonométricas (senos y cosenos), que nos permiten crear la regla mnemotécnica A–L–P–E–S.

Con el método de integración por partes transformaremos integrales de la forma

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

donde $v'(x)$ es la función fácil de integrar, en otra expresión más sencilla en la que aparece una nueva integral más fácil de calcular que la de partida.

Se utiliza la siguiente fórmula:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$$

que se suele escribir de forma abreviada como:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Existen muchas reglas mnemotécnicas para recordar esta fórmula, recogemos tres de ellas:

- **S**alieron **U**nidos **D**e **V**iaje **Y** **U**n **V**iajero **M**enos **S**e **V**ino **D**e **U**jo. Ujo es un hermoso pueblo asturiano
- **S**usanita **U**n **D**ía **V**io **U**n **V**aliente **S**oldado **V**estido **D**e **U**niforme.
- **S**ergio **U**n **D**ía **V**io **U**na **V**aca **S**orda **V**estida **D**e **U**niforme.

Demostración:

Consideramos el producto de funciones $u(x)\cdot v(x)$ y calculamos su derivada:

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int [u(x)\cdot v(x)]' dx = \int [u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)]dx \Rightarrow \int [u(x)\cdot v(x)]' dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

De donde:

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Despejando, resulta:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$$

También puede obtenerse a partir de la diferencial del producto:

$$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv \Rightarrow u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int d(u\cdot v) = \int (du\cdot v + u\cdot dv) = \int v\cdot du + \int u\cdot dv$$

Y obtenemos: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Observaciones:

1. Como norma general, se elige como "u" a la primera función de la palabra ALPES y como dv al resto del integrando, pudiendo darse el caso de tener que plantear $dv = dx$.

   Ejemplo:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \to du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \to v = \int dx = x \end{array} \right\rangle = \operatorname{arc\,tg} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1+x^2\right| + C$$

2. Sabremos que estamos aplicando correctamente el método si obtenemos una integral más simple que la inicial.

   Ejemplo:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \to v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \end{array} \right\rangle = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

3. El proceso de integración por partes puede aplicarse varias veces. En ese caso se debe mantener la elección inicial de u y v. Si se invierte, volveremos a la integral de partida.

   Ejemplo:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\rangle = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\rangle = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left[x \cdot e^x - \int e^x dx\right] = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x + C$$

4. Si la integral inicial es el producto de una exponencial por una trigonométrica, se obtiene lo que se denominan *integrales cíclicas*. Al aplicar por segunda vez el método de integración por partes, se obtiene la integral de partida, y se debe resolver como una ecuación:

   Ejemplo:

$$\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \to du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x\,dx \to v = \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen} 3x \end{array} \right\rangle =$$

$$= e^{2x} \cdot \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \cdot 2e^{2x} dx = \tfrac{1}{3} \cdot e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \tfrac{2}{3} \cdot \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \cdot dx =$$

Repetimos: $\left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \to du = 2e^{2x} dx \\ dv = \operatorname{sen} 3x\,dx \to v = \int \operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{1}{3} \cdot \cos 3x \end{array} \right\rangle =$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx = \tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\text{sen } 3x - \tfrac{2}{3}\cdot\left[e^{2x}\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\cos 3x\right) - \int\left(-\tfrac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2e^{2x}\cdot dx\right] \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx = \tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\text{sen } 3x + \tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x - \tfrac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\cdot dx$$

Observamos que obtenemos la integral de partida. Si denotamos $I = \int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx$:

$$I = \tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\text{sen}\,3x + \tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x - \tfrac{4}{9}I \Rightarrow I + \tfrac{4}{9}I = \tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\text{sen}\,3x + \tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x$$

$$\tfrac{13}{9}I = \tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\text{sen}\,3x + \tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x \Rightarrow I = \tfrac{9}{13}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\text{sen}\,3x + \tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x\right)$$

Entonces, sustituyendo I por su expresión y desarrollando las fracciones:

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx = \frac{e^{2x}}{13}\cdot(3\cdot\text{sen}\,3x + 2\cdot\cos 3x) + C$$

5. El método de integración por partes no es excluyente. Podemos utilizarlo después de vernos *obligados* a realizar un cambio de variable, o tener que realizar un cambio de variable después de haber aplicado la integración por partes.

Ejemplo:

- $$\int\frac{x\cdot e^{\text{arcsen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \left|\begin{matrix}\text{arcsen}\,x = t \to x = \text{sen}t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \int x\cdot e^{\text{arcsen}\,x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \text{sen}t\cdot e^t dt$$

Que se resuelve como en el ejemplo anterior, y proporciona:

$$\int \text{sen } t\cdot e^t dt = \tfrac{1}{2}e^t\cdot(\text{sen } t - \cos t) + C$$

Antes de deshacer el cambio, expresamos el coseno como:

$$\int \text{sen}t\cdot e^t dt = \tfrac{1}{2}e^t\cdot\left(\text{sen}t - \sqrt{1-\text{sen}^2 t}\right) + C$$

Entonces:

$$\int\frac{x\cdot e^{\text{arc sen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \tfrac{1}{2}e^{\text{arc sen}\,x}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + C$$

6. Existen otras integrales que se resuelven por partes y que no están recogidas en “la regla de los ALPES”. La estrategia general es buscar una función “fácilmente integrable” y otra “fácilmente derivable” para simplificar la primitiva inicial.

Ejemplo:

- $$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \left|\begin{matrix}u = x \to du = dx \\ \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = dv \to v = \dfrac{-1}{2\cdot(1+x^2)}\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2\cdot(1+x^2)} - \int\frac{-dx}{2\cdot(1+x^2)}$$

Y la segunda integral es inmediata:

$$\int\frac{dx}{2\cdot(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,x + C$$

Por tanto:

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2\cdot(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\,x + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividad resuelta

- $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Esta primitiva puede resolverse de varias formas diferentes:

1. Por partes:

La dificultad es encontrar la función *fácilmente integrable*. En este caso, la elección es:

$$\left| \begin{array}{l} dv = x\sqrt{x^2-1}\,dx \to v = \frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2} \\ u = x^2 \to du = 2x\,dx \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\int x\left(x^2-1\right)^{3/2}dx$$

La segunda primitiva es más simple que la primera, así que estamos en el buen camino:

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\int x\left(x^2-1\right)^{3/2}dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{5}\left(x^2-1\right)^{5/2} + C$$

Es decir: $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}x^2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 - \frac{2}{15}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5 + C$

2. Por cambio de variable:

El cambio de variable que buscamos es el que permite eliminar la raíz del integrando:

$$\left| \begin{array}{l} x^2-1 = t^2 \to x^2 = t^2+1 \\ 2x\,dx = 2t\,dt \to x\,dx = t\,dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-1}\,xdx = \int\left(t^2+1\right)\cdot t\cdot tdt = \int\left(t^4+t^2\right)dt$$

Resolvemos la primitiva: $\int\left(t^4+t^2\right)dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 + C$

Las dos expresiones son diferentes, pero es sencillo manipularlas para hacerlas iguales.

Actividades propuestas

9. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$ c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

d) $\int\dfrac{e^{\operatorname{arc sen} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ f) $\int\dfrac{\ln(x+1)}{x}dx$ g) $\int \operatorname{tg} x\cos x\,dx$

h) $\int\dfrac{\left(x^2-1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\int e^{x^2}dx$ j) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ k) $\int\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$

10. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x dx$ b) $\int(\ln x+2)\dfrac{dx}{x}$ c) $\int\ln(\cos x)\operatorname{tg} x\,dx$

d) $\int\dfrac{x\,dx}{1+x^4}$ i) $\int\dfrac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ j) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx$ b) $\int\ln x\,dx$ c) $\int x\cos x dx$

d) $\int \operatorname{arc sen} x\,dx$ e) $\int \operatorname{sen} ax\cdot e^{bx}dx$ con $a, b\in\mathbb{R}$.

f) Curiosidad – idea feliz: Resuelve la primitiva $\int\cos(\ln x)\,dx$.

Para ello, multiplica y divide el integrando por x: $\int\dfrac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \to du = \ldots \\ dv = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx \to v = \ldots \end{array} \right\rangle$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3. Integración de funciones racionales

Abordamos ahora las integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, con $Q(x)$ un polinomio mónico o normalizado (el coeficiente principal vale uno: $Q(x) = x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + \ldots$).

El primer paso es descartar que sea inmediata. Una vez descartado que es inmediata, el procedimiento para integrarlas se basa en determinar las raíces del denominador y descomponerla como suma de fracciones algebraicas cuyas integrales resulten más sencillas de calcular.

Se nos pueden plantear las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} \text{Grado } P(x) < \text{Grado } Q(x) \begin{cases} Q(x) \text{ sólo tiene raíces reales simples} \\ Q(x) \text{ tiene una raíz real múltiple} \\ Q(x) \text{ tiene raíces reales simples y múltiples} \\ Q(x) \text{ tiene raíces complejas} \end{cases} \\ \text{Grado } P(x) \geq \text{Grado } Q(x) \end{cases}$$

Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con $\text{grado}\, P(x) < \text{grado}\, Q(x)$.

3.3.1. El denominador solo tiene raíces reales simples

Sean *a*, *b*,… *n* las raíces de $Q(x)$, polinomio mónico como ya se dijo. Entonces, podemos factorizarlo en la forma $Q(x) = (x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-n)$. El procedimiento consiste en descomponer el cociente como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{N}{x-n}$$

con $A, B, \ldots, N \in \mathbb{R}$. Así, expresamos la integral de partida como suma de integrales inmediatas:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{N}{x-n}dx = A\cdot\ln|x-a| + B\cdot\ln|x-b| + \ldots + N\cdot\ln|x-n| + C$$

Ejemplo:

- $\int \frac{5}{x^2+3x-4}dx =$

  Calculamos las raíces del denominador y factorizamos el denominador:

  $$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x = \cdots = \begin{cases} +1 \\ -4 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4 = (x+4)\cdot(x-1)$$

  Por tanto, expresamos la fracción como suma de fracciones simples:

  $$\frac{5}{x^2+3x-4} = \frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

  Calculamos los coeficientes:

  $$\frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} \Rightarrow 5 = A\cdot(x+4) + B\cdot(x-1)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Y calculamos A y B dando a x los valores de las raíces encontradas:

- Si $x=-4 \Rightarrow 5=0\cdot A-5\cdot B \Rightarrow B=-1$
- Si $x=1 \Rightarrow 5=5\cdot A+0\cdot B \Rightarrow A=1$

De aquí ya obtenemos las dos integrales logarítmicas:

$$\int \frac{5}{x^2+3x-4}dx=\int \frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)}dx=\int \frac{A}{x-1}dx+\int \frac{B}{x+4}dx=\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{-1}{x+4}dx=$$

$$=\int \frac{1}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+4}dx=\ln|x-1|-\ln|x+4|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+C$$

3.3.2. El denominador tiene una única raíz real múltiple

Si a es la raíz múltiple de $Q(x)$, se puede escribir $Q(x)=(x-a)^n$. En este caso, la descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{N}{(x-a)^n} \text{ con } A,B,\ldots,N\in\mathbb{R}.$$

Así, expresamos la integral de partida como suma de integrales inmediatas de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{(x-a)^2}dx+\ldots+\int \frac{N}{(x-a)^n}dx$$

Que son potencias de exponente negativo, es decir:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{(x-a)^2}dx+\ldots+\int \frac{N}{(x-a)^n}dx=A\cdot\ln|x-a|-\frac{B}{x-a}+\ldots-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{N}{(x-a)^{n-1}}+C$$

Ejemplo:

- $$\int \frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8}dx=$$

Factorizamos el denominador usando el método de *Ruffini* o el teorema del resto:

$$x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8}=\frac{x+2}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}\Rightarrow x+2=A\cdot(x-2)^2+B\cdot(x-2)+C$$

Ahora calculamos A, B y C dando valores a x:

- Si $x=2 \Rightarrow 4=0\cdot A+0\cdot B+C \Rightarrow C=4$

Para hallar A y B podemos dar cualesquiera otros dos valores:

- Si $x=3 \Rightarrow 5=A+B+C \Rightarrow 5=A+B+4 \Rightarrow A+B=+1$
- Si $x=1 \Rightarrow 3=A-B+C \Rightarrow 3=A-B+4 \Rightarrow A-B=-1$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l}A+B=+1\\A-B=-1\end{array}\right\}\underset{Sumando}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}A+B=+1\\2A=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A=0\\B=1\end{array}\right\}$

Entonces, tenemos:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^3}dx=\int \frac{1}{(x-2)^2}dx+\int \frac{4}{(x-2)^3}dx=\int (x-2)^{-2}dx+4\int (x-2)^{-3}dx=$$

$$=\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+4\cdot\frac{(x-2)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}+C$$

¡Ojo! No confundir la C del sistema con la constante de integración.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3.3. El denominador tiene raíces reales simples y múltiples

Este caso es una combinación de los dos anteriores. La fracción se descompone en sumandos cuyo numerador es una constante, y los denominadores son los factores de $Q(x)$ en el caso de las raíces simples y las potencias sucesivas de la factorización en el caso de las raíces múltiples. Es decir, si

$$Q(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)^n\cdot(x-d)^m$$

La descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{(x-c)^n}+\frac{D}{(x-c)^{n-1}}+\ldots+\frac{E}{x-c}+\frac{F}{(x-d)^m}+\frac{G}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{H}{x-d}$$

con $A,B,\ldots,H\in\mathbb{R}$ los parámetros a obtener. La integral quedará descompuesta en una suma de logaritmos y fracciones algebraicas simples:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{(x-c)^n}+\frac{D}{(x-c)^{n-1}}+\ldots+\frac{E}{x-c}+\frac{F}{(x-d)^m}+\frac{G}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{H}{x-d}\right)dx$$

$$=A\cdot\ln|x-a|+B\cdot\ln|x-b|+\ldots-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{C}{(x-c)^{n-1}}-\ldots+E\cdot\ln|x-c|-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{F}{(x-d)^{m-1}}-\ldots+H\cdot\ln|x-d|+K$$

Donde K representa la constante de integración, para no confundirla con la C de la factorización.

Ejemplo:

$$\int\frac{x^2+3}{x^3-3x+2}dx=$$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Calculamos las raíces del denominador usando el método de *Ruffini* o el teorema del resto y factorizamos el denominador:

$$x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x^2+3}{x^3-3x+2}=\frac{x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow x^2+3=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

Ahora calculamos A, B y C dando valores a x:

- Si $x=1\Rightarrow 4=0\cdot A+3\cdot B+0\cdot C\Rightarrow B=\frac{4}{3}$
- Si $x=-2\Rightarrow 7=0\cdot A+0\cdot B+9\cdot C\Rightarrow C=\frac{7}{9}$

Para hallar A damos un valor cualquiera:

- Si $x=0\Rightarrow 3=(-2)\cdot A+2\cdot B+C\Rightarrow 3=-2\cdot A+2\cdot\frac{4}{3}+\frac{7}{9}\Rightarrow A=\frac{2}{9}$

Por tanto, tenemos:

$$\int\frac{x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}dx=\int\frac{A}{x-1}dx+\int\frac{B}{(x-1)^2}dx+\int\frac{C}{x+2}dx=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int(x-1)^{-2}dx+\frac{7}{9}\int\frac{1}{x+2}dx==\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3.4. El denominador tiene alguna raíz compleja simple

Si el denominador $Q(x)$ contiene algún factor irreducible de la forma ax^2+bx+c, al descomponer la fracción en suma de fracciones algebraicas, a dichos factores les corresponderán sumandos de la forma:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Antes de analizar la descomposición completa, vamos a resolver este tipo de primitivas:

Las integrales de la forma $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, cuando el denominador no tiene raíces reales, se transformarán en una integral **logarítmica** y otra de **arco tangente**.

Para ello, se puede proceder de dos formas distintas:

Forma 1. Manipulación algebraica de la fracción.

El mecanismo consta de dos pasos: primero se transforma el numerador en la derivada del denominador y, a continuación, se convierte la expresión de segundo grado para llegar al arco tangente.

Ejemplo:

- $\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$. Es automático comprobar que el denominador no tiene raíces reales.

  En primer lugar, intentamos que el numerador sea la derivada del denominador.

$$\left(x^2+4x+13\right)' = 2x+4$$

  Multiplicamos la x del numerador por el factor necesario, en este caso por 2:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx =$$

  A continuación, sumamos y restamos para obtener el 4:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+2-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+13}dx =$$

  Y separamos la integral como suma de dos, una con el término buscado y “el resto”:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{2}{x^2+4x+13}dx\right] = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

  En segundo lugar, trabajamos con la segunda integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

  Se trata de identificar un cuadrado perfecto en el denominador. Vemos los términos x^2+4x, que nos recuerda al cuadrado perfecto: $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

  Ya que buscamos una integral de la forma $\int \frac{u'}{u^2+1}du$, extraemos factor común al 9:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{9\left[\frac{(x+2)^2}{9}+1\right]} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Ya casi hemos terminado, hemos conseguido la forma de la derivada del arco tangente. Solo nos queda conseguir la derivada de la fracción obtenida:

$$\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Que son dos integrales inmediatas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\cdot \ln\left(x^2+4x+13\right) - \frac{1}{3}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$$

Forma 2. Cambio de variable.

Ahora nos basta con hacer un cambio de variable basado en la solución compleja que se obtiene al intentar resolver la ecuación de segundo grado del denominador.

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\alpha\pm\beta i \longrightarrow x=\alpha+\beta\cdot t \Rightarrow dx=\beta\cdot dt$$

Ejemplo:

- $\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$.

Anulamos el denominador:

$$x^2+4x+13=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2} \Rightarrow x=-2\pm 3i$$

El cambio de variable es, por tanto:

$$x=-2+3t \Rightarrow dx=3\,dt$$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{(-2+3t)+1}{(-2+3t)^2+4\cdot(-2+3t)+13}\cdot 3dt$$

Desarrollamos las expresiones y obtenemos:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = 3\cdot\int \frac{3t-1}{9t^2+9}dt = \frac{3}{9}\int \frac{3t-1}{t^2+1}dt = \frac{1}{3}\cdot\left[\int \frac{3t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right] =$$

Que son, directamente, las integrales de un logaritmo y un arco tangente:

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\int \frac{3t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right] = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \mathrm{arctg}\,t\right] + C = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,t + C$$

Deshacemos el cambio:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right] - \frac{1}{3}arctg\,\frac{x+2}{3} + C$$

Desarrollando el argumento del logaritmo obtenemos la integral del mecanismo anterior:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\cdot \ln\left(x^2+4x+13\right) - \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$$

Una vez que sabemos cómo resolver esta primitiva, abordamos el caso general. Si el denominador $Q(x)$ contiene algún factor irreducible de la forma ax^2+bx+c, al descomponer la fracción en suma de fracciones algebraicas, a dichos factores les corresponderán sumandos de la forma:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

y los factores correspondientes a las raíces reales se descompondrán como en los apartados anteriores:

Si $Q(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\cdot(x-d)\cdot\ldots\cdot(x-e)^n\cdot\ldots$

La descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} + \frac{A}{x-d} + \ldots + \frac{B}{(x-e)^n} + \frac{C}{(x-e)^{n-1}} + \ldots + \frac{D}{x-e}$$ con $A, B, \ldots, M, N \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

- $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+x-3}dx =$

  Calculamos las raíces del denominador usando el método de Ruffini o el teorema del resto y factorizamos el denominador:

	1	-3	1	-3
3		3	0	3
	1	0	1	0

$$x^3-3x^2+x-3=0 \Rightarrow \text{Tenemos: } x^3-3x^2+x-3 = (x-3)\cdot\left(x^2+1\right)$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+x-3} = \frac{x-5}{(x-3)\cdot\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \Rightarrow x-5 = A\left(x^2+1\right) + (Mx+N)\cdot(x-3)$$

Ahora calculamos A, M y N dando valores a x; tenemos:

- Si $x=3 \Rightarrow 3-5 = 10\cdot A + 0\cdot(B) + C \Rightarrow A = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$
- Si $x=0 \Rightarrow 0-5 = 1\cdot A + (0\cdot M + N)\cdot(-3) \Rightarrow -5 = A-3N \Rightarrow N = \frac{8}{5}$
- Si $x=2 \Rightarrow 2-5 = 5\cdot A + (2\cdot M + N)\cdot(-1) \Rightarrow -3 = 5A-2M-N \Rightarrow M = \frac{1}{5}$

Tenemos, por tanto:

$$\int \frac{x-5}{(x-3)\cdot\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{Mx+N}{x^2+1}dx = \int \frac{-\frac{1}{5}dx}{x-3} + \int \frac{\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3}dx + \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3}dx + \frac{1}{10}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|x-3| + \frac{1}{10}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

Si hubiera más de un polinomio de grado dos con raíces complejas, la descomposición implica una fracción para cada término:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Hx+K}{ax^2+bx+c} + \frac{Mx+N}{a'x^2+b'x+c'} + \dots \text{ con } H, K, M, N, \dots \in \mathbb{R}.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3.5. El grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con $\text{grado}\, P(x) \geq \text{grado}\, Q(x)$.

En este caso, en primer lugar dividiremos el numerador entre el denominador. De esta forma, la fracción se descompone en la suma de un polinomio y una fracción algebraica con el grado del numerador menor que el grado del denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Ejemplo:

- $\int \frac{x^2 - x + 5}{x+3}dx =$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -x+5 & x+3 \\ \cline{3-3} -x^2 & -3x & x-4 \\ \hline & -4x+5 & \\ & 4x+12 & \\ \hline & 17 & \end{array}$$

Dividiendo el numerador entre el denominador, tenemos:

$$\frac{x^2 - x + 5}{x+3} = x - 4 + \frac{17}{x+3}$$

Así:

$$\int \frac{x^2 - x + 5}{x+3}dx = \int (x-4)dx + \int \frac{17}{x+3}dx = \int (x-4)dx + 17\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 17\ln|x+3| + C$$

El denominador $Q(x)$ no es un polinomio mónico

Si en la integral racional $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ el polinomio del denominador no es mónico (su coeficiente principal no es 1), la factorización se realiza del modo habitual en el que se factorizan los polinomios.

Ejemplo:

$$Q(x) = 2x^2 + x - 3 \mapsto Q(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 2 = (x-1)\cdot(2x+3)$$

Para el cálculo de integrales se utiliza la factorización obtenida y se procede de la forma ya explicada:

Ejemplo:

- $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 3}$.

La descomposición resulta ser:

$$\frac{1}{2x^2 + x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+3} \Rightarrow 1 = A\cdot(x-1) + B\cdot(2x+3)$$

Resolvemos la ecuación como hicimos varias veces antes, y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{-2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{dx}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|2x+3| + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividades propuestas

12. Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ c) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$ d) $\int \frac{x^3dx}{(x+1)^2}$

e) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$ f) $\int \frac{3x^2+1}{(2x-1)\cdot(3x^2+2)}dx$ g) $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx$

h) $\int \frac{x^3+2x^2+5x+3}{x^2+1}dx$ i) $\int \frac{(x+1)\cdot dx}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$ j) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

3.4. Integración de funciones trigonométricas.

Para integrar una función trigonométrica no inmediata, tenemos que clasificarla en una de las categorías que veremos a continuación. Es importante seguir el orden planteado; si no lo hacemos, obtendremos integrales mucho más complicadas de lo necesario.

Cuadrados de funciones trigonométricas

Si la función es el cuadrado de una función trigonométrica, podemos ahorrar mucho trabajo si las estudiamos antes que las demás:

1. **Cuadrados de seno y coseno**: Para resolver estas primitivas nos basamos en las expresiones:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \quad \text{y} \quad \cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

Sumando y restando miembro a miembro:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \quad \text{y} \quad 1-\cos 2x=2\operatorname{sen}^2 x$$

Obtenemos las siguientes simplificaciones:

$$\int \cos^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\tfrac{1}{2}\left(x+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+C \quad \text{y}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+C$$

2. **Cuadrados de secante y cosecante**: Ya sabemos que son integrales inmediatas:

$$\int \sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\operatorname{cotg} x+C$$

3. **Cuadrados de tangente y cotangente**: Se convierten en integrales inmediatas fácilmente:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\operatorname{tg} x-x+C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx=\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)dx=-\operatorname{cotg} x-x+C$$

Actividad resuelta

- $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$

Esta primitiva puede resolverse de varias formas diferentes. En este apartado usaremos las transformaciones *recién aprendidas*:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{4\,dx}{4\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{4\,dx}{(2\operatorname{sen} x\cdot\cos x)^2}=\int \frac{4\,dx}{\operatorname{sen}^2 2x}=-2\operatorname{cotg} 2x+C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.1. Funciones impares en seno de x

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, (es decir, una función racional en *senx* y *cosx*) y verifica que $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\cos x = t$.

Tras transformar las funciones trigonométricas con el cambio, obtendremos una función racional que resolveremos con los métodos anteriores.

Ejemplo:

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx =$

  El exponente del seno es impar, por tanto es impar en seno:

  $$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}$$

  Por tanto:

  $$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)^3}{1+\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado, manipulando ligeramente la integral:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} \operatorname{sen} x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x} \operatorname{sen} x\,dx$$

  Entonces:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt$$

  Que podemos resolver como integral de una función racional:

  $$\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = t - 2\operatorname{arctg} t + C$$

  Y deshacemos el cambio:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C$$

Cuando no es tan simple manipular el integrando, podemos utilizar las siguientes igualdades:

$\cos x = t$	$x = \arccos t \Rightarrow dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

Ejemplo:

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx =$ Ahora vamos a utilizar las expresiones tabuladas para obtener la primitiva:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{1+t^2} \cdot \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{1+t^2} \cdot dt = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot dt = \int \frac{t^2-1}{1+t^2} \cdot dt$$

  Que es la misma integral que resolvimos antes (como no podía ser de otro modo)

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.2. Funciones impares en coseno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\text{sen } x, \cos x)$, y verifica que $R(\text{sen } x, -\cos x) = -R(\text{sen } x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\text{sen } x = t$. Como antes, tenemos las siguientes igualdades:

$\text{sen } x = t$	$x = \text{arcsen} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\cos x = \sqrt{1-\text{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

Ejemplos:

- $\int \cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x \, dx =$

  Comprobamos que el radicando es impar en coseno:

  $$R(\text{sen } x, \cos x) = \cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x \Rightarrow R(\text{sen } x, -\cos x) = (-\cos x)^3 \cdot \text{sen}^2 x = -R(\text{sen } x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado:

  $$I = \int \cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{sen } x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right\rangle = \int \cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x \, dx = \int t^2 \cdot \left(1-t^2\right)(dt)$$

  Desarrollado el producto,

  $$I = \int \left(-t^4 + t^2\right) dt = -\tfrac{1}{5} t^5 + \tfrac{1}{3} t^3 + C$$

  Y deshacemos el cambio:

  $$I = \int \cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x \, dx = -\tfrac{1}{5} \text{sen}^5 x + \tfrac{1}{3} \text{sen}^3 x + C$$

- $\int \sec x \, dx = \int \dfrac{dx}{\cos x} =$

  Es evidente que el radicando es impar en coseno, aplicamos el cambio:

  $$\int \frac{dx}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{sen } x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\rangle = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

  La resolvemos como integral de una función racional:

  $$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow \ldots \frac{1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}$$

  Entonces:

  $$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

  Y deshacemos el cambio:

  $$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right| + C$$

Curiosidad – idea feliz:

A veces, existen estrategias específicas para resolver primitivas más rápidamente.

Para esta primitiva, $\int \sec x \, dx$, si multiplico y divido entre $(\sec x + \text{tg } x)$:

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \text{tg } x}{\sec x + \text{tg } x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \, \text{tg } x}{\sec x + \text{tg } x} dx = \ln|\sec x + \text{tg } x| + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.3. Funciones pares en seno de *x* y coseno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, y verifica que $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\operatorname{tg} x = t$. En este caso, podemos hallar la expresión para el seno y el coseno como:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

y

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

Que resumimos en la tabla siguiente:

$\operatorname{tg} x = t$	$x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$	$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$	$\cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

Ejemplo:

- $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$$

  Es evidente que el radicando es par en seno y coseno:

  $$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} \Rightarrow R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado:

  $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \to dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \to \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\rangle = \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt$$

  Que es inmediata si la separamos en sumandos:

  $$\int \frac{t^2+1}{t^2} dt = t - \frac{1}{t} + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$$

Curiosidad – idea feliz:

Como antes, podemos seguir buscando *felices ideas* que simplifiquen integrales. Usando la relación fundamental de la trigonometría, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$$

O bien, como vimos anteriormente, acudir a las expresiones del ángulo doble como hicimos antes:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \ldots = \int \frac{4\,dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \operatorname{cosec}^2 2x \cdot 2\,dx = -\operatorname{cotg} 2x + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.4. Cambio general

Si no pudimos resolver la integral con los cambios anteriores, deberemos aplicar el cambio universal:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

De aquí tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg} t \Rightarrow x=2\cdot\operatorname{arc\,tg} t \Rightarrow dx=2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Aplicando ahora las propiedades de las razones trigonométricas del ángulo doble, tenemos:

$$\operatorname{sen} x = 2\cdot\operatorname{sen}\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{x}{2} = 2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2} = 2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2} = 2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\tfrac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\tfrac{x}{2} = 2\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}-1 = 2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{1+t^2}-1 = \frac{2-\left(1+t^2\right)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Tenemos, por tanto:

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$	$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$	$\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ejemplo:

- $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}=$ Es fácil ver que no cumple ninguna de las tres condiciones anteriores, por tanto:

$$\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\rangle = \int\frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{2}{\frac{\left(1+t^2\right)-\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\cdot\left(1+t^2\right)}dt =$$

$$=\int\frac{2}{1+t^2-1+t^2}dt=\int\frac{2}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C=-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$$

Curiosidad – idea feliz:

Para esta primitiva, si multiplico y divido por el conjugado del denominador, $(1+\cos x)$:

$$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

Ahora separamos en dos sumandos, obtenemos sendas integrales inmediatas:

$$\int\frac{(1+\cos x)dx}{\operatorname{sen}^2 x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}+\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cotg}x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}+C=-\operatorname{cotg}x-\operatorname{cosec}x+C$$

En general, en las integrales de la forma:

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen}x+b\cos x}$$

Haciendo $a=k\cdot\cos\alpha$ y $b=k\cdot\operatorname{sen}\alpha$, con k y α valores a obtener, la primitiva se transforma en:

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen}x+b\cos x}=\int\frac{dx}{k\operatorname{sen}x\cos\alpha+k\cos x\operatorname{sen}\alpha}=\int\frac{dx}{k\operatorname{sen}(x+\alpha)}=\frac{1}{k}\int\operatorname{cosec}(x+\alpha)dx$$

que ya vimos cómo resolver en apartados anteriores.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividades propuestas

13. Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \text{sen}\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx$

b) $\int \frac{\text{sen}3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$

c) $\int \frac{\text{cotg}\,x\,dx}{\text{sen}^2 x}$

d) $\int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{(\cos 2x+1)^2}$

e) $\int \text{tg}^2 x\,dx$

f) $\int \left(\text{tg}^2 x + x + 1\right)dx$

g) $\int \frac{tg(x)}{cos^2(x)}dx$

h) $\int \frac{dx}{1-\text{sen}\,x}$

i) $\int \frac{dx}{\text{sen}\,x}$

j) $\int \text{sen}^2 x \cos x\,dx$

k) $\int \text{sen}^2 x\,dx$

l) $\int \text{sen}^4 x\,dx$

m) $\int \cos^4 x\,dx$

n) $\int \cos(\ln x)dx$ *truco:* multiplica y divide por *x*: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}x\,dx$

ñ) $\int \frac{(1+\text{sen}^2 x)dx}{\text{sen}\,x\cos x}$

o) $\int \frac{dx}{1+\text{sen}^2 x}$

p) $\int \text{sen}\,5x\cos 4x\,dx$

q) $\int \frac{dx}{13+12\cos x}$

Actividad resuelta – *Idea feliz*

- $\int \frac{\text{sen}2x\,dx}{\text{sen}^4 x+\cos^4 x}$

En este ejemplo podríamos acudir a que el integrando es par en seno y coseno y aplicar el cambio $\text{tg}\,x = t$. Entonces:

$$\int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{\text{sen}^4 x+\cos^4 x} = \int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x\,dx}{\text{sen}^4 x+\cos^4 x} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t(t^2+1)}{t^4+1}dt = \ldots$$

Pero también podemos jugar un poco con el denominador, completando un cuadrado perfecto:

$$\int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{\text{sen}^4 x+\cos^4 x+2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x-2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{(\text{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{1-2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{1-\frac{1}{2}4\,\text{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{1-\frac{1}{2}\text{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{2-\text{sen}^2 2x}$$

La última idea feliz consiste en obtener el cos 2*x* en el denominador:

$$2\int \frac{sen2xdx}{2-sen^2 2x} = 2\int \frac{sen2xdx}{1+1-sen^2 2x} = 2\int \frac{sen2xdx}{1+cos^2 2x}$$

Y hemos obtenido una integral inmediata:

$$\int \frac{\text{sen}2x\,dx}{\text{sen}^4 x+\cos^4 x} = 2\int \frac{sen2xdx}{1+cos^2 2x} = -arctg(cos2x)+C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.5. Otras integrales

Los apartados anteriores dejan claro que el proceso de resolución de integrales no es tan fácil como el de derivación. Todas las simplificaciones que se pueden realizar después de derivar una función es lo que complica el cálculo de primitivas. Por tanto, en muchas ocasiones nos tendremos que limitar a *obedecer* los cambios aconsejados.

Además, existen funciones que no tienen primitiva o no puede expresarse en términos de funciones elementales. Incluso algunas de ellas sirven para definir otro tipo de funciones. Algunos ejemplos son:

$$\int e^{x^2}dx \quad , \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \quad , \quad \int \cos e^x dx \quad , \quad \int \cos x^2 dx \quad \ldots$$

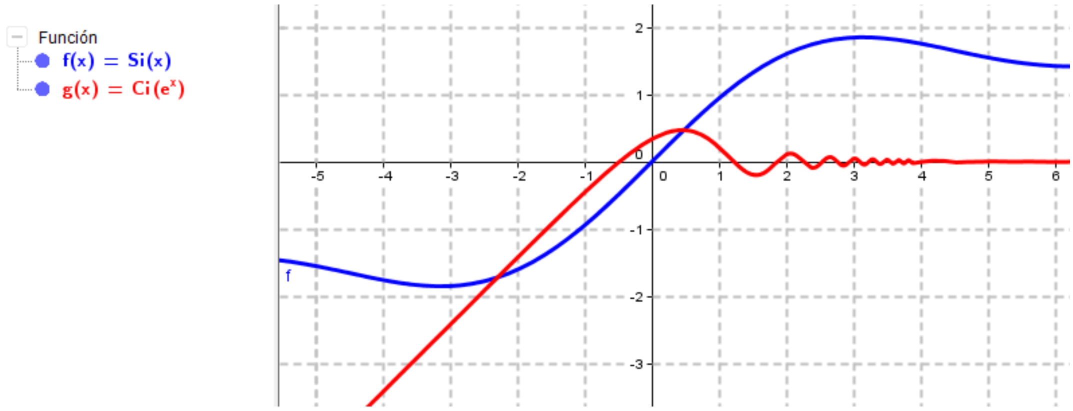
Podemos intentar *calcularlas* con GeoGebra, por ejemplo. Tecleamos en la barra de entrada:

1. `Integral[sen(x)/x]`
2. `Integral[cos(e^x)]`

Y observamos que aparecen expresiones como:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \operatorname{Si}(x) \quad , \quad \int \cos e^x dx = \operatorname{Ci}(e^x)$$

Donde Ci y Si son las siglas de *Cosine Integral* y *Sine Integral*, cuyas gráficas son:



Listamos a continuación los cambios de variable y mecanismos aconsejados para otras primitivas.

Integrales de funciones exponenciales

$$\int \mathrm{R}(a^x)dx \Rightarrow a^x = g(t) = t;\; dx = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{dt}{t}, \text{ con } a \neq 1.$$

Integrales de funciones irracionales

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt[n]{x^m}, \sqrt[p]{x^q}, \sqrt[r]{x^s}, \ldots\right)dx \Rightarrow x = g(t) = t^{\text{m.c.m.}(n,p,r,\ldots)}$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \operatorname{sen} t$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \operatorname{tg} t$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \sec t$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividad resuelta

- $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

El cambio aconsejado es $x=2\operatorname{sen} t$, entonces:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\operatorname{sen} t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{matrix} \right\rangle = \int \sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}\cdot 2\cos t\,dt = \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

Utilizando la relación fundamental de la trigonometría:

$$\int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt$$

Que ya resolvimos antes:

$$4\int \cos^2 t\,dt = 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)+C$$

Para deshacer el cambio, jugamos de nuevo con las expresiones trigonométricas,

$$\left| \begin{matrix} x = 2\operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t = t+\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos t\cdot\operatorname{sen} t = t+\operatorname{sen} t\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$$

y obtenemos:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\cdot\left(arcsen\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\cdot\sqrt{4-x^2}\right)+C$$

Otras integrales trigonométricas

- $\int \mathrm{R}(\operatorname{sen} mx, \cos nx)\,dx$: Se utilizan las expresiones:

$$\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b = \tfrac{1}{2}\cdot[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\cos a\cdot\cos b = \tfrac{1}{2}\cdot[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\operatorname{sen} a\cdot\cos b = \tfrac{1}{2}\cdot[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)]$$

- $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{matrix} \right\} = \ldots = -\dfrac{\operatorname{sen}^{n-1} x\cdot\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$
- $\int \cos^n x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x\,dx \end{matrix} \right\} = \ldots = \dfrac{\cos^{n-1} x\cdot\operatorname{sen} x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$
- $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\cdot(\sec^2 x - 1)\,dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$ (análogamente con la cotangente)
- $\int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,dx$ (análogamente con la cosecante)

Si n par: $\int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)^{(n-2)/2}\cdot\sec^2 x\,dx$

Cambio de variable: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \int \sec^n x\,dx = \int (1+t^2)^{(n-2)/2}\,dt$

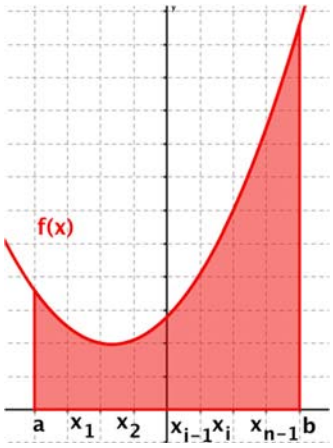
Si n impar: Por partes, elegimos: $u=\sec^{n-2} x$ y $dv=\sec^2 x\,dx$

$$\Rightarrow \int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\left[\sec^{n-2} x\cdot\operatorname{tg} x+(n-2)\cdot\int \sec^{n-2} x\,dx\right]$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

4. EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA

4.1. Área bajo una curva



Dada una función $f(x)$ continua y no negativa en un intervalo $[a,b]$, su gráfica determina una región del plano que vendrá limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

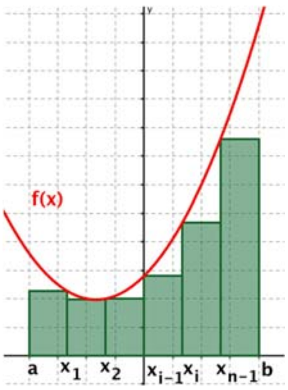
Veamos cómo podemos calcular de forma aproximada el **área** de dicha región:

Tomamos una partición del intervalo $[a,b]$. Consiste en dividir el intervalo en n partes, tomando para ello los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ verificando $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

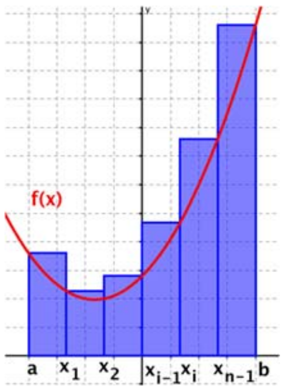
Así, tenemos los intervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$.

A continuación, denotamos por m_i al mínimo valor que toma la función en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por M_i al máximo valor que toma la función en el mismo intervalo.

Así, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ consideraremos dos posibles figuras, la creada con rectángulos de base $x_i - x_{i-1}$ y altura m_i y la creada con rectángulos de base $x_i - x_{i-1}$ y altura M_i. Sumando las áreas de los n rectángulos, obtenemos:



Suma inferior



Suma superior

En el primer caso obtenemos una **aproximación por defecto** del área encerrada bajo la curva:

$$s = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Esta suma se denomina **suma inferior** de la partición en el intervalo $[a,b]$.

En el segundo caso obtenemos una **aproximación por exceso** del área encerrada bajo la curva.

$$S = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Esta suma se denomina **suma superior** de la partición en el intervalo $[a,b]$.

Hemos obtenido dos aproximaciones del área A, una por defecto s y otra por exceso S. Se tiene que

$$s \le A \le S$$

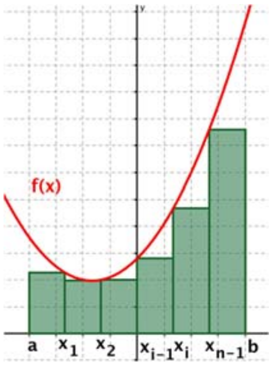
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Si tenemos una partición P_1 del intervalo $[a,b]$, con suma inferior s_1 y suma superior S_1, diremos que otra partición P_2 del intervalo $[a,b]$ es más fina que P_1 si contiene todos los puntos de la partición P_1 y además otros puntos nuevos.

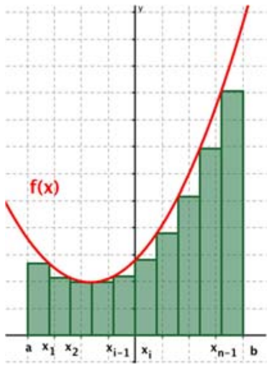
Para dicha partición P_2, tenemos una suma inferior s_2 y una suma superior S_2. Se verifica que:

$$s_1 \le s_2 \le A \le S_2 \le S_1$$

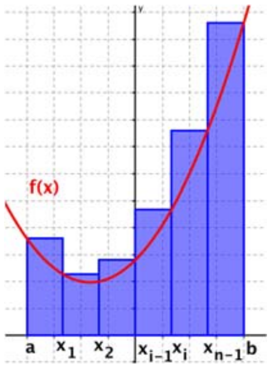
Es decir, al tomar una partición más fina, la suma inferior aumenta (siendo todavía menor o igual que el valor del área) y la suma superior disminuye (siendo mayor o igual que el valor del área).



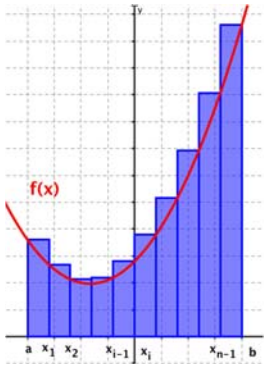
Partición P_1



Partición P_2



Partición P_1



Partición P_2

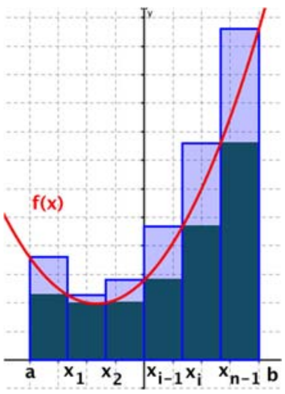
Esto significa que cuanto más fina sea la partición, más nos acercamos al verdadero valor del área.

Considerando una sucesión de particiones cada una más fina que la anterior, $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$, obtendremos $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$ la sucesión de áreas por defecto y $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$ la sucesión de áreas por exceso.

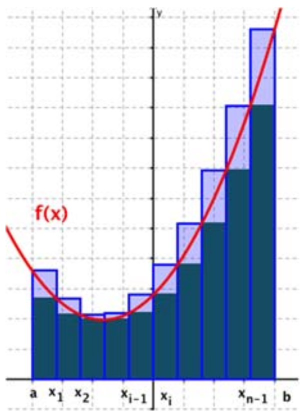
Cuando $n \to \infty$, la longitud de los intervalos de la partición se hace cada vez más pequeña, luego $x_i - x_{i-1} \to 0$. Así, cuando la función sea integrable, las sumas inferiores y superiores tenderán al área:

$$S_n - s_n \to 0$$

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, y de aquí: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$

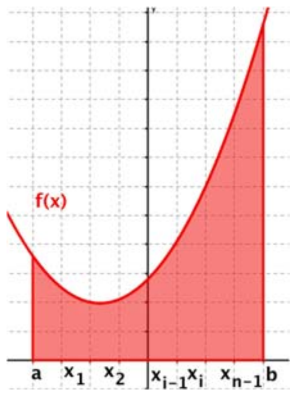


Suma inferior y superior con la partición P_1



Suma inferior y superior con la partición P_2

…



Área

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

4.2. Integral definida

Sea una función $f(x)$ continua y no negativa en un intervalo $[a,b]$.

Definimos la **integral definida** entre *a* y *b* de $f(x)$ como la expresión

$$\int_a^b f(x)dx$$

Su valor es **el área comprendida entre la gráfica** de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Los valores *a* y *b* se llaman **límites de integración**.

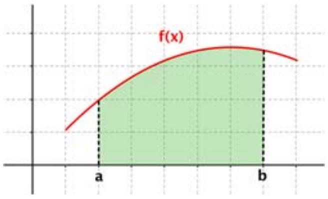
Hemos visto que dada una sucesión de particiones $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$ del intervalo $[a,b]$, cada una más fina de la anterior, con sumas inferiores $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$ y sumas superiores $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$, se verifica que dichas sumas tenderán al verdadero valor del área.

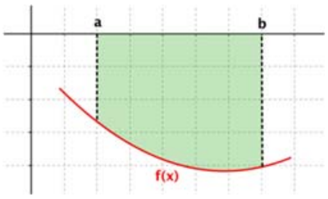
Se tiene que: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, es decir, que la integral se puede interpretar como: "la suma del área de todos los rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal (dx) comprendidos entre *a* y *b*"

Propiedades:

1. – Si los límites de integración son iguales, la integral definida vale cero. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. – Si la curva está por encima del eje X $(f(x)>0)$, la integral es positiva, $\int_a^b f(x)dx>0$, mientras que si la curva está por debajo del eje X $(f(x)<0)$, se puede definir también la integral definida, que será negativa: $\int_a^b f(x)dx<0$.





3. – Sea $c \in (a,b)$, entonces podemos descomponer la integral de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. – Si intercambiamos los límites de integración, la integral cambia de signo.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

5. – Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$, se tiene que:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

6. – Dada una función $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$ y una constante $k \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

7. - Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$, verificando $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

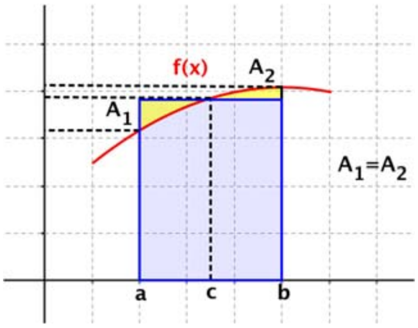
4.3. Teorema del valor medio del cálculo integral

Dada una función *f* continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Interpretación geométrica:

Siendo la integral un área, la interpretación geométrica es simple: Existe un punto $c\in(a,b)$ tal que el área encerrada entre la curva, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual al área de un rectángulo de base la amplitud del intervalo, $b-a$, y altura el valor que toma la función en el punto intermedio, $f(c)$.

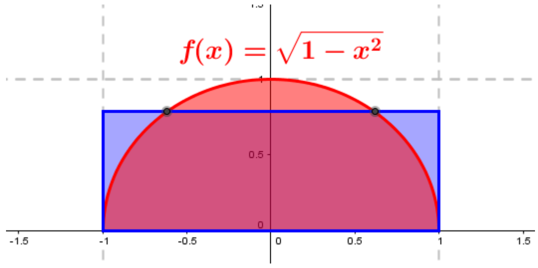


Ejemplo:

- *Encuentra los valores de c que verifican* $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$ *siendo* $f(x)$ *la semicircunferencia de centro el origen y radio* 1*, y a y b los puntos de corte de la misma con el eje* OX.

Sabemos que la ecuación de la circunferencia en el plano es $x^2+y^2=r^2$, así que para el problema que se nos plantea tenemos que $f(x)=+\sqrt{1-x^2}$ y los puntos de corte con el eje son $(-1,0)$ y $(+1,0)$.

Se trata de encontrar el rectángulo (azul) cuya área coincide con la de la semicircunferencia (roja), sabiendo que la base para ambas figuras está comprendida entre los puntos $(-1,0)$ y $(+1,0)$.



Entonces, siendo:

$$\mathrm{A}_{\text{rect}} = b\cdot h \quad \text{y} \quad \mathrm{A}_{\text{circ}} = \pi\cdot r^2$$

Debe verificarse:

$$\tfrac{1}{2}\pi\cdot r^2 = b\cdot h \Rightarrow \tfrac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = 2\cdot h \Rightarrow h=\frac{\pi}{4}$$

El valor de h corresponde a la variable y, pero nos piden un valor de x. Por tanto:

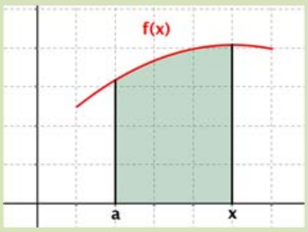
$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow x^2+h^2=1^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2}=\pm 0.61899$$

Que son los valores de c que nos piden.

4.4. Función integral o función área

Dada una función f continua en el intervalo $[a,b]$, para cualquier punto $x\in[a,b]$ se define la **función integral** o **función área** como:

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$x\to F(x)=\int_a^x f(t)dt$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

4.5. Teorema fundamental del cálculo integral

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Entonces F es derivable en (a,b) y

$$F'(x)=f(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Demostración:

Aplicando la definición de derivada tenemos:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=$$

Separando la primera integral en dos sumandos (propiedad 3):

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral, $\exists c\in(x,x+h)$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)\cdot(x+h-x)=f(c)\cdot h$$

Así:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)$$

Como $c\in(x,x+h)$ y f es continua entonces $\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$ y, por tanto: $F'(x)=f(x)$.

Actividad resuelta

- *Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula* $f'(x)$ *si* $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^3}$

  Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)^3}$$

***Generalización* (1):**

Si en lugar de valores reales, los límites de integración son funciones reales de variable real, se aplica la regla de la cadena para obtener:

Sea f una función **continua** en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y sea

$$F(x)=\int_a^{h(x)} f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Si $h(x)$ es **derivable**, entonces F es **derivable** en (a,b) y

$$F'(x)=f[h(x)]\cdot h'(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

***Generalización* (2):**

Sea f una función **continua** en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y sea

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Si $h(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces F es **derivable** en (a,b) y

$$F'(x)=f[h(x)]\cdot h'(x)-f[g(x)]\cdot g'(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Actividad resuelta

- *Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula* $f'(x)$ *si* $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{(1+t^2)^3}$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{(1+t^2)^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\left(1+(x^3)^2\right)^3}\cdot 3x^2-\frac{1}{\left(1+(x^2)^2\right)^3}\cdot 2x=\frac{3x^2}{(1+x^6)^3}-\frac{2x}{(1+x^4)^3}$$

4.6. Regla de Barrow

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

y suele representarse como:

$$\int_a^b f(x)dx=\left(F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Demostración:

Se tiene que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Por otro lado, aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ también es una primitiva de $f(x)$. Al ser dos primitivas de la misma función, sólo se diferencian en una constante:

$$G(x)-F(x)=C\Rightarrow G(x)=F(x)+C$$

Evaluando las dos expresiones anteriores en el punto $x=a$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} G(x)=F(x)+C\Rightarrow G(a)=F(a)+C \\ G(x)=\int_a^x f(t)dt\Rightarrow G(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \end{array}\right\}\Rightarrow F(a)+C=0\Rightarrow C=-F(a)$$

Evaluando ahora dichas expresiones anteriores en el punto $x=b$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} G(x)=F(x)+C\Rightarrow G(b)=F(b)+C\Rightarrow G(b)=F(b)-F(a) \\ G(x)=\int_a^x f(t)dt\Rightarrow G(b)=\int_a^b f(t)dt \end{array}\right\}\Rightarrow\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Entonces, para aplicar la Regla de Barrow se siguen los siguientes pasos:

1. Calculamos una primitiva $F(x)$ de $f(x)$
2. Hallamos los valores de esa función entre *a* y *b*: $F(a)$ y $F(b)$
3. Calculamos la integral $\int_a^b f(x)dx = (F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Ejemplos:

- $\int_1^5 (-x^2+6x-5)dx$.

  La función $f(x) = -x^2+6x-5$ es una función polinómica, luego es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto es continua en el intervalo [1, 5].

  1. - Calculamos **una** primitiva de $f(x)$:
  $$\int (-x^2+6x-5)dx = -\tfrac{1}{3}x^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - 5x$$
  2. - Hallamos el valor de esa primitiva para los extremos del intervalo: $F(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$
  $$F(1) = -\frac{1^3}{3} + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 = -\frac{7}{3} \quad \text{y} \quad F(5) = -\frac{5^3}{3} + 3\cdot 5^2 - 5\cdot 5 = \frac{25}{3}$$
  3. – Aplicamos la regla de Barrow:
  $$\int_1^5 (-x^2+6x-5)dx = F(5) - F(1) = \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{3} + \frac{7}{3} = \frac{32}{3}$$

- $\int_{-2}^{2} (x^2-4)dx$.

  La función $f(x) = x^2-4$ es una función polinómica, luego es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto es continua en el intervalo [–2, +2].

  1. - Calculamos **una** primitiva de $f(x)$:
  $$\int_{-2}^{2} (x^2-4)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 4x$$
  2. - Hallamos el valor de esa primitiva para los extremos del intervalo y restamos:
  $$\int_{-2}^{2} (x^2-4)dx = \left(\tfrac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{+2} = \left(\tfrac{1}{3}(+2)^3 - 4\cdot(+2)\right) - \left(\tfrac{1}{3}(-2)^3 - 4\cdot(-2)\right) = \frac{-16}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-32}{3}$$

Actividades propuestas

14. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 (x^2+x+1)dx$

b) $\int_{-1}^{1} (x^2+x+1)dx$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$

d) $\int_{-1}^{1} \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}dx$

e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

f) $\int_1^e \ln x\,dx$

15. Halla el valor de *c* que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c)\cdot(5-0)$, donde $f(x) = 2x+1$, y razona su interpretación geométrica.

16. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula $f'(x)$ si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{\ln x}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

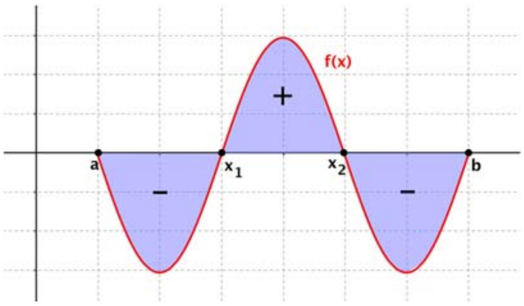
4.7. Aplicaciones de la integral definida

Área encerrada bajo una curva

Para calcular el área comprendida entre la gráfica de una función $f(x)$ y el eje de abscisas en un intervalo en el que la gráfica aparece por encima y por debajo del eje X, es necesario hallar cada una de las áreas por separado.

En los subintervalos en los que la gráfica está por debajo del eje X, la integral será negativa, y tomaremos el valor absoluto en toda la integral.

$$\text{Área}=\left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|+\left|\int_{x_2}^{b} f(x)dx\right|=\left|F(x_1)-F(a)\right|+\left|F(x_2)-F(x_1)\right|+\left|F(b)-F(x_2)\right|$$



Desde el punto de vista práctico, si tenemos la representación gráfica de la función se puede plantear el área como suma o resta de las regiones donde la función es positiva o negativa, respectivamente.

Ejemplo:

- *Halla el área encerrada entre la gráfica de la función* $f(x)=x^2-2x-3$*, el eje* X *y las rectas* $x=-3$ *y* $x=4$.

La función $f(x)=x^2-2x-3$ es una función polinómica, luego es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto es continua en el intervalo [–3, 4].

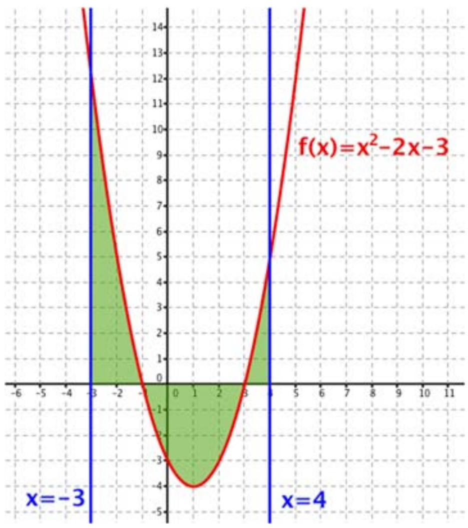
La gráfica de $f(x)$ es una parábola cóncava ($\cup$). Calculamos el vértice:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \quad \text{Si } x=1\Rightarrow f(1)=1^2-2\cdot 1-3=-4$$

Tenemos: $V\,(1,-4)$

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X. Para ello, resolvemos la ecuación $f(x)=0$:

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\rightarrow(3,0)\\-1\rightarrow(-1,0)\end{cases}$$



Representando la función $f(x)=x^2-2x-3$ y las rectas $x=-3$ y $x=4$ observamos que el área que queremos calcular se divide en tres regiones.

Hallamos una primitiva de $f(x)$:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

$$\int \left(x^2-2x-3\right)dx=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$$

Hemos obtenido tres regiones. El área total será la suma del área de cada región:

$$\text{Área}=\left|\int_{-3}^{-1}\left(x^2-2x-3\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx\right|+\left|\int_{3}^{4}\left(x^2-2x-3\right)dx\right|=$$

$$=\left|F(-1)-F(-3)\right|+\left|F(3)-F(-1)\right|+\left|F(4)-F(3)\right|=\left|\frac{5}{3}-(-9)\right|+\left|-9-\frac{5}{3}\right|+\left|-\frac{20}{3}-(-9)\right|=$$

$$=\frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{71}{3}\ \text{u}^2$$

Por tanto, el área de la región es igual a $\frac{71}{3}$ u^2

También podríamos plantear, ya que tenemos la representación gráfica de la función:

$$\text{Área}=\text{Área}_1-\text{Área}_2+\text{Área}_3=\int_{-3}^{-1}\left(x^2-2x-3\right)dx-\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx+\int_{3}^{4}\left(x^2-2x-3\right)dx$$

Es decir:

$$\text{Área}=\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-3}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{+3}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{+3}^{+4}=\ldots$$

$$=\left(\frac{5}{3}-(-9)\right)-\left(-9-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{20}{3}-(-9)\right)=\frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{71}{3}\ \text{u}^2$$

Propiedades:

1. – Si la función es impar, la integral definida en un intervalo simétrico respecto al origen es nula:

$$\text{Si } f(x) \text{ es impar, } \int_{-a}^{+a} f(x)dx=0$$

2. – Si la función es par, la integral definida en un intervalo simétrico respecto al origen es:

$$\text{Si } f(x) \text{ es par, } \int_{-a}^{+a} f(x)dx=2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Para entender estas dos propiedades nos basta con ver las gráficas de cada tipo de función.

- Si la función es impar, es simétrica respecto al origen de coordenadas y define dos recintos de signo opuesto e igual área a ambos lados del origen. Al sumarla, el resultado es nulo.
- Si la función es par, es simétrica respecto al eje OY y define dos recintos de igual signo e igual área.


Función impar


Función par

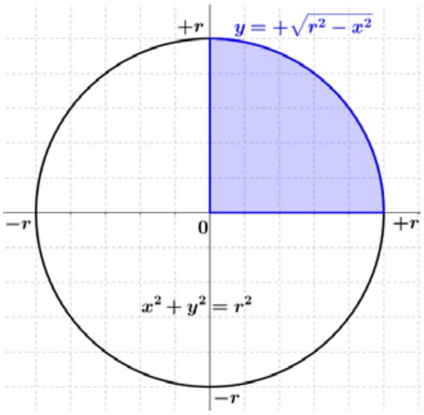
Actividad resuelta

- *Calcula el área de un círculo de radio r.*

Podemos elegir la ubicación de la circunferencia, así que la centramos en el origen. Para este caso, la ecuación de una circunferencia de radio *r* es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Podemos aprovechar la simetría del problema y calcular el área a partir del recinto del primer cuadrante:



$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

La primitiva se resuelve con el cambio:

$$x = r \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = r \cdot \cos t \cdot dt$$

y proporciona:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(r^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right) + C$$

Aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2 \cdot \left(r^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r =$$

$$A = 2 \cdot \left(r^2 \operatorname{arcsen} \frac{r}{r} + r \cdot \sqrt{r^2 - r^2} - r^2 \operatorname{arcsen} \frac{0}{r} + 0 \cdot \sqrt{r^2 - 0} \right) = 2 \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

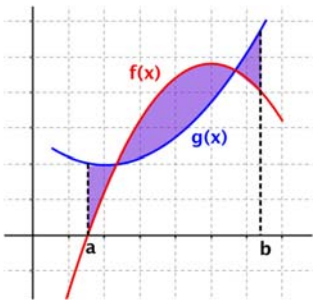
Es decir, llegamos a la conocida fórmula:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Área comprendida entre dos curvas

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual que al área que se encierra entre la función diferencia $(f - g)(x)$ y el eje X en ese intervalo.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Siendo $f(x) > g(x)$. Si no se determina qué función está *por encima* de la otra, podemos escribir la expresión general:

$$A = \int_a^b |\, f(x) - g(x) \,|\, dx$$

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, en el caso en el que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan varios puntos de corte, será conveniente hallar las diferentes regiones y determinar las áreas por separado.

Ejemplo:

- *Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones* $f(x)=-x^2+4x$ *y* $g(x)=x$ *entre las rectas* $x=-1$ *y* $x=3$.

Las representaciones gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son una parábola y una recta, respectivamente, así que es de esperar que haya dos cortes entre ellas y, por tanto, es posible que haya varias regiones diferenciadas a tener en cuenta.

La gráfica de $f(x)=-x^2+4x$ es una parábola convexa. Hallamos su vértice:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot(-1)}=\frac{-4}{-2}=2 \quad \text{Si } x=2 \Rightarrow f(2)=-2^2+4\cdot 2=-4+8=4 \Rightarrow V\,(2,\,4)$$

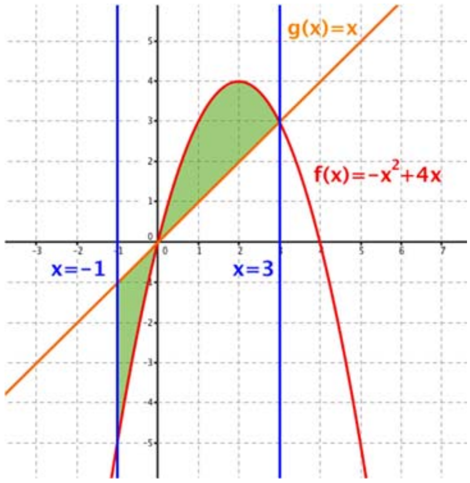
Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X, resolviendo la ecuación $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Rightarrow -x^2+4x=0 \Leftrightarrow x\cdot(-x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

La gráfica de $g(x)=x$ es una recta. Para dibujarla, basta con obtener dos puntos:

x	0	3
y	0	3

Para determinar la región de la que queremos calcular el área, la representamos, junto con los límites de integración:



Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, resolviendo la ecuación $f(x)=g(x)$:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2+4x=x \Leftrightarrow -x^2+4x-x=0 \Leftrightarrow -x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(-x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto, el área que queremos calcular será:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3} \left| (f-g)(x) \right| dx$$

Hallamos una primitiva de $(f-g)(x)$:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=-x^2+4x-x=-x^2+3x \Rightarrow$$

$$\int (f-g)(x)\,dx=\int(-x^2+3x)\,dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$$

Hemos obtenido dos regiones. El área total será la suma del área de cada región:

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}(-x^2+3x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|=$$

$$=\left|F(0)-F(-1)\right|+\left|F(3)-F(0)\right|=\left|0-\frac{11}{6}\right|+\left|\frac{9}{2}-0\right|=\frac{11}{6}+\frac{9}{2}=\frac{19}{3}\ \text{u}^2$$

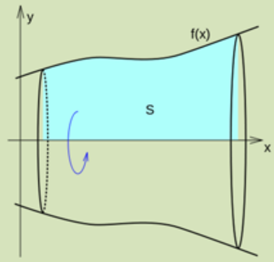
Por tanto, el área de la región es igual a $\frac{19}{3}$ u^2

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Volumen de un sólido de revolución

Una curiosidad relacionada con este apartado hace referencia a *Johannes Kepler*. Su segunda esposa, *Susana*, narraba en una carta que en la celebración de la boda, *Kepler* observó que el volumen de los barriles de vino se estimaba con una varilla introducida diagonalmente en el tonel por el agujero de la tapa. *Kepler* empezó a pensar en el razonamiento matemático que justifica ese proceso, y de ese modo comenzó el estudio de los volúmenes de los sólidos de revolución.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar la función en torno al eje OX:



se calcula mediante la función:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

Ejemplo:

- *Halla el volumen del cono de altura 3 unidades definido al girar en torno al eje de abscisas la recta $y = 3x$.*

  Los datos del ejemplo nos hacen calcular la integral:

$$V = \pi \int_0^3 (3x)^2\, dx = 9\pi \int_0^3 x^2\, dx = 9\pi \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9\pi \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 81\pi \text{ u}^3$$

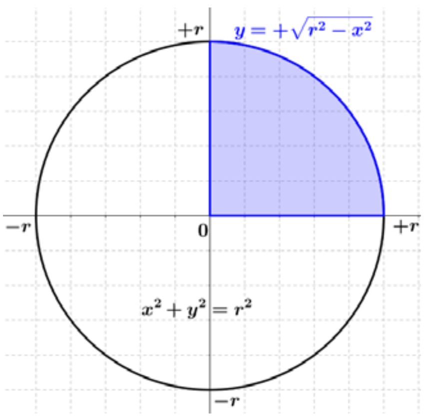
Actividad resuelta

- *Calcula el volumen de una esfera de radio R.*

  Como antes con el círculo, elegimos una circunferencia centrada en el origen, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

  Como antes, la simetría permite calcular el volumen a partir del recinto del primer cuadrante:



$$V = 2 \cdot \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = 2 \cdot \int_0^R \left(R^2 - x^2 \right) dx$$

Que es una primitiva inmediata y, aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$V = 2 \cdot \left(R^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2 \cdot \left[\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right]$$

Con la que obtenemos la conocida fórmula:

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

CURIOSIDADES. REVISTA

Eudoxo de Cnido (390 aC – 337 aC)

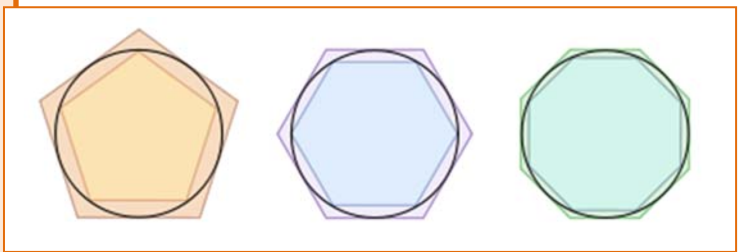
Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura.

Para demostrarlo elaboró el llamado método de *exhausción*.

Método de exhaución

El **método de exhaución** es un procedimiento geométrico de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida en que avanza el cálculo. El nombre proviene del latín exhaustiö (agotamiento, exhausto)

Se utiliza para aproximar el área de un círculo, o la longitud de una circunferencia, inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares con cada vez mayor número de lados.



Arquímedes

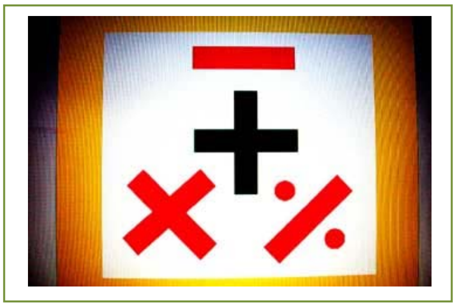
Arquímedes, escribió su tratado sobre "*El método de teoremas mecánicos*", que se consideraba perdido hasta 1906. En esta obra, *Arquímedes* emplea el cálculo infinitesimal, y muestra cómo el método de fraccionar una figura en un número infinito de partes infinitamente pequeñas puede ser usado para calcular su área o volumen. Fue escrito en forma de una carta dirigida a *Eratóstenes de Alejandría*.

Observa cómo es la base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a *Isaac Newton* y a *Leibniz* unificar el cálculo diferencial con el cálculo integral, y cómo es el precursor del concepto de integral definida como las sumas inferiores y las sumas superiores de *Riemann*.

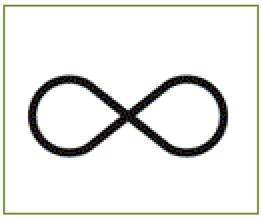
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

¿Has pensado alguna vez en la historia de los símbolos matemáticos?

Al principio las matemáticas eran *retóricas*, es decir, todos los cálculos se explicaban con palabras. Poco a poco empezaron a usarse *abreviaturas*, símbolos para representar las operaciones. Hoy las matemáticas están llenas de *símbolos*.

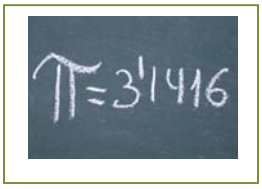


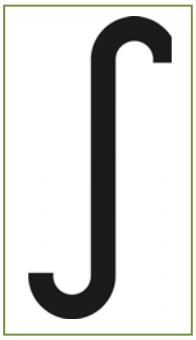
Por ejemplo, para indicar sumas y restas, primero se usaron letras como **p** y **m**, pero en el siglo XV comenzó a usarse los símbolos **+** y **–**. Para el producto se usó el aspa, **x**, de la cruz de San Andrés, pero ***Leibniz*** escribió a *Bernoulli* que ese símbolo no le gustaba pues se confundía con la x, y comenzó a usar el punto, **·**. Para el cociente, la barra horizontal de las fracciones es de origen árabe, y los dos puntos, de nuevo se los debemos a *Leibniz*, que los aconseja cuando se quiere escribir en una sola línea.



El símbolo de infinito, ∞, se debe a *John Wallis* y, a pesar de su parecido, no está relacionado con la cinta de Möebius, sino con la Lemniscata.

En 1706 se empezó a usar **π**, como inicial de la palabra griega "perímetro" y se popularizó con *Euler* en 1737.





El símbolo de la integral se lo debemos, de nuevo, a *Leibniz*, y es una estilización de la letra S, inicial de suma. También le debemos la notación dx, dy para el cálculo diferencial.

A ***Euler*** le debemos la invención de muchos símbolos y la popularización de otros: No sabemos por qué uso la letra *e* para representar al número **e**, base de los logaritmos neperianos, la letra **i**, para la unidad imaginaria compleja, Σ para el sumatorio, y la notación $f(x)$ para las funciones.

$$e \quad i \quad \Sigma \quad f(x)$$

En lógica y teoría de conjuntos se usan muchos y nuevos símbolos, como ∩, ∪, ⊃, ⊄, ⊂, ∈, ∉, {, }, ∧, ∨, ⇒, … que podemos deber a **George Boole.**

$$\cap, \cup, \supset, \not\subset, \subset, \in, \notin, \{, \}, \wedge, \vee, \Rightarrow$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

RESUMEN

CUADRO DE PRIMITIVAS	
$\int dx = x + C$	$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
$\int (f(x) \pm g(x) \pm \ldots)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \ldots$	$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$
$\int f^{\mathrm{n}}(x) f'(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{n}+1}[f(x)]^{\mathrm{n}+1} + C,\ \mathrm{n} \neq -1$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln \lvert f(x) \rvert + C$
$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$	$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C,\ a \neq 1,\ a>0$
$\int \cos[f(x)] f'(x)\,dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C$	$\int \operatorname{sen}[f(x)] f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + C$
$\int \sec[f(x)] \cdot \operatorname{tg}[f(x)] f'(x)\,dx = \sec[f(x)] + C$	$\int \sec^2[f(x)] f'(x)\,dx = \operatorname{tg}[f(x)] + C$
$\int \operatorname{cosec}^2[f(x)] f'(x)\,dx = -\operatorname{cotg}[f(x)] + C$	$\int \frac{f'(x)\,dx}{1+f(x)^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}[f(x)] + C \\ -\operatorname{arc\,cotg}[f(x)] + C \end{cases}$
$\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{1-f(x)^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen}[f(x)] + C \\ -\operatorname{arc\,cos}[f(x)] + C \end{cases}$	$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcsec}[f(x)] + C \\ -\operatorname{arc\,cosec}[f(x)] + C \end{cases}$

Método de integración por cambio de variable	**1.** $\int g[f(x)] \cdot f'(x)\,dx \to t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$ $\int g(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[f(x)] + C$ **2.** $\int f(x)\,dx \to x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,dt$ $\int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[g^{-1}(x)] + C$
Método de integración por partes	$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
Área entre una curva y el eje OX	$A = \int_a^b \lvert f(x) \rvert\,dx$
Área entre dos curvas	$A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert\,dx$
Volumen de revolución en torno al eje OX	$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Sabiendo que $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ y $\int f^{\,n}(x)\, f'(x) dx = \dfrac{f^{\,n+1}(x)}{n+1} + C$, calcula:

1) $\int x^5 dx$ 2) $\int \dfrac{4}{x^5} dx$ 3) $\int \dfrac{dx}{x^2}$ 4) $\int 37\, dx$ 5) $\int 6x^7 dx$

6) $\int 5x^{1/4} dx$ 7) $\int 5\sqrt{x^3}\, dx$ 8) $\int \left(3 - 2x - x^4\right) dx$ 9) $\int \left(2x^5 - 5x + 3\right) dx$

10) $\int \left(2 + 3x^3\right)^2 dx$ 11) $\int 2\left(x^2 + 2\right)^3 dx$ 12) $\int \left(1 - x^3\right)^2 dx$ 13) $\int \dfrac{x^3 - x + 2}{x^3} dx$

14) $\int \left(-4x^{\frac{2}{3}} + 2x\right) dx$ 15) $\int \left(3a - \dfrac{1}{3e^2} + 2x^a\right) dx$ 16) $\int \left(-\dfrac{3}{x^3} + 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

17) $\int \left(3x^5 - \dfrac{4}{3x^2} + 2\sqrt[5]{x^2}\right) dx$ 18) $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$ 19) $\int \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$

20) $\int \left(5e^x + \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 5}{4x^2}\right) dx$ 21) $\int \dfrac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$ 22) $\int \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

23) $\int \sqrt{x}\left(x^3 + 1\right) dx$ 24) $\int \left(\sqrt{x^5} - \dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right) dx$ 25) $\int \sqrt{x}(3 - 5x) dx$

26) $\int \dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx$ 27) $\int (3x+4)^2 dx$ 28) $\int (3x - 7)^4 dx$

29) $\int x\left(x^2 - 4\right)^3 dx$ 30) $\int 3x\left(x^2 + 2\right)^3 dx$ 31) $\int \left(x^3 + 2\right)^2 x^2 dx$ 32) $\int \left(x^3 + 3\right) x^2 dx$

33) $\int (x-2)^{3/2} dx$ 34) $\int (a + x)^3 dx$ 35) $\int \left[(x+2)^3 - (x+2)^2\right] dx$

36) $\int \sqrt{3x + 12}\, dx$ 37) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+3}}$ 38) $\int \dfrac{dx}{(x-1)^3}$ 39) $\int (x^2 - x)^4 (2x - 1) dx$

40) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 dx$ 41) $\int \dfrac{x^3}{\left(x^4 - 1\right)^2} dx$ 42) $\int \dfrac{x\, dx}{\left(x^2 + 4\right)^3}$ 43) $\int x\sqrt{x^2 - 7}\, dx$

44) $\int (x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)^4 dx$ 45) $\int \dfrac{3x}{\sqrt{1 + 7x^2}} dx$ 46) $\int \dfrac{8x^2}{\left(x^3 + 2\right)^2} dx$

47) $\int \dfrac{3x dx}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}$ 48) $\int x \cdot \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$ 49) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 5}} dx$ 50) $\int x^2\left(x^3 - 1\right)^{3/5} dx$

51) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$ 52) $\int \left(e^x + 1\right)^3 e^x dx$ 53) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

54) $\int x \cos^4 x^2 \operatorname{sen} x^2 dx$ 55) $\int \dfrac{x \ln\left(x^2 + 3\right)}{x^2 + 3} dx$ 56) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$

57) $\int \dfrac{e^x}{2e^x - 3} dx$ 58) $\int \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x\, dx$ 59) $\int \dfrac{\sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x} dx$ 60) $\int \dfrac{\ln x}{3x} dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2. - Sabiendo que $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ y $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$, calcula:

1) $\int \frac{dx}{x+2}$ 2) $\int \frac{dx}{2x-3}$ 3) $\int \frac{dx}{x-1}$ 4) $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$ 5) $\int \frac{x^2}{1-2x^3}dx$ 6) $\int \frac{x^2}{1-x^3}dx$

7) $\int \frac{3x\,dx}{x^2+2}$ 8) $\int \frac{4}{3x+5}dx$ 9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ 10) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$

11) $\int \left(\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx$ 12) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

14) $\int \left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$ 15) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ 16) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$ 17) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

18) $\int \operatorname{cotg} x\,dx$ 19) $\int \frac{5}{x\ln x}dx$ 20) $\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x}$

21) $\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$ 22) $\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$ 23) $\int x\operatorname{cotg} x^2 dx$

3. - Si $\int e^x dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)} f''(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

1) $\int 3^x dx$ 2) $\int a^{4x} dx$ 3) $\int e^{-x} dx$ 4) $\int 4e^{3x} dx$

5) $\int 3x^2 e^{x^3+2} dx$ 6) $\int 4e^{4-x} dx$ 7) $\int x^2 e^{x^3} dx$ 8) $\int \left(e^x+1\right)^2 dx$

9) $\int \left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2 dx$ 10) $\int \left(e^x+x^6\right)^2 dx$ 11) $\int e^{-x^2+2} x\,dx$ 12) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$

13) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$ 14) $\int x\,e^{\operatorname{sen} x^2}\cos x^2 dx$ 15) $\int e^{3\cos 2x}\cdot\operatorname{sen} 2x\,dx$

16) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx$ 17) $\int e^{\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\,dx$ 18) $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e}-e^{x+3}\right)dx$

19) $\int e^{\operatorname{tg} 2x}\sec^2 2x\,dx$ 20) $\int \frac{2x}{3}\cdot 3^{3+5x^2}dx$ 21) $\int \frac{x}{2}\cdot 2^{3-5x^2}dx$

4. - Sabiendo que $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$, $\int f'(x)\cdot\operatorname{sen} f(x)dx = -\cos f(x) + C$, $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ y $\int \cos f(x) f'(x)dx = \operatorname{sen} f(x) + C$ calcula:

1) $\int \operatorname{sen}(2x+8)dx$ 2) $\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}dx$ 3) $\int \cos 3x\,dx$

4) $\int x\operatorname{sen} x^2 dx$ 5) $\int \left(\frac{3\operatorname{sen} x-2\cos x}{4}\right)dx$ 6) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$

7) $\int e^x\cos e^x dx$ 8) $\int x\cos\left(2x^2\right)\cdot\operatorname{sen}\left(2x^2\right)dx$ 9) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

5. – Si $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\text{tg}^2 x)dx = \text{tg}\,x + C$ y $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \int [1+\text{tg}^2 f(x)]\cdot f'(x)dx = \text{tg}\ f(x) + C$, calcula:

1) $\int x(1+\text{tg}\ x^2)dx$ 2) $\int (1+\text{tg}\,x)^2 dx$ 3) $\int \text{tg}^2 3x\,dx$

6. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

1) $\int (2+5x)^4 dx$ 2) $\int (3+4x)^6 dx$ 3) $\int 6x(3+x^2)^5 dx$

4) $\int \left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3}\right]dx$ 5) $\int \left(\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}\right)dx$ 6) $\int \left(\frac{e^x - 4}{e^{2x}}\right)dx$

7) $\int \text{sen}^3 x \cdot \cos\ x \cdot dx$ 8) $\int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}dx$ 9) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^4 x}dx$

10) $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$ 11) $\int \left(\frac{e^x+3}{e^{2x}}\right)dx$ 12) $\int \left(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}}\right)dx$

13) $\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{3x^2}dx$ 14) $\int \frac{(2+3\sqrt{x})^2}{4x}dx$ 15) $\int \text{sen}\sqrt{x}\,dx$

7. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando el método de integración por partes:

1) $\int 3x\cos\ x\,dx$ 2) $\int x^2 \cdot \text{sen}\ x\,dx$ 3) $\int x^2 \ln x\,dx$

4) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ 5) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ 6) $\int 2e^x \cdot \cos\ x \cdot dx$

7) $\int 2e^x \cdot \text{sen}\ x\,dx$ 8) $\int e^x \cdot \cos\ 3x dx$ 9) $\int \frac{4-2x^2}{x}\cdot \ln x dx$

8. – Halla el valor de las siguientes integrales racionales:

1) $\int \frac{2}{x^2+1}dx$ 2) $\int \frac{3}{2x^2+2}dx$ 3) $\int \frac{3}{x-3}dx$ 4) $\int \frac{2}{3x^2+3}dx$

5) $\int \frac{5x}{x^2+3}dx$ 6) $\int \frac{3x-2}{x^2+1}dx$ 7) $\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2}dx$ 8) $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

9) $\int \frac{x-1}{x+1}dx$ 10) $\int \frac{3x-1}{x+3}dx$ 11) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx$ 12) $\int \frac{3x^3}{x^2-1}dx$

13) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx$ 14) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx$ 15) $\int \frac{2}{x^2-4}dx$

16) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x}dx$ 17) $\int \frac{4x+3}{x^2-1}dx$ 18) $\int \frac{3x^2}{x^2+6x+9}dx$

19) $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx$ 20) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}dx$ 21) $\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}dx$

22) $\int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2}dx$ 23) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4}dx$ 24) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

9. – Halla el valor de las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x}$ 2) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \text{sen}\, x\, dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\, 3x\, dx$ 5) $\int_{-4}^{4} |x|\, dx$

6) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx$ 7) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-3}\right)dx$ 8) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3a}{5}-\frac{x}{2}\right)dx$

9) $\int_2^3 \frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}dx$ 10) $\int_{-2}^{0}\left(e^{2x}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx$ 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}(\text{sen}\, x-\cos x)^2 dx$

10. – Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b}\left(2bx-3x^2\right)dx=-12$.

11. – Halla el área comprendida entre la función $f(x)=x^2-4x$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=6$.

12. – Halla el área limitada por la función $f(x)=0.5+\cos x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

13. – Halla el área de la región limitada por la función $f(x)=x^3-x^2-6x$ y el eje de abscisas.

14. – Calcula el área de la porción de plano que limitan las curvas $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ e $y-x-1=0$.

15. – Halla el área delimitada por las gráficas:

a) $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$

b) $f(x)=x^2+x+4$ y $g(x)=-x^2+2x+5$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores de a, b y c para los que $F(x) = a\,x^3 + b\,e^x + c\,\text{sen}\,x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7\,e^x + 5\cos x$ son:

a) 1, –7, 5; b) 3, 7, –5; c) 1, –7, –5; d) –1, –7, 5

2. La integral inmediata $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:

a) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6}+C$; b) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6}+C$ c) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{4}+C$; d) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+5)^2}}{6}+C$

3. La integral $\int \dfrac{sen2x\,dx}{sen^4 x + cos^4 x}$ vale:

a) tg(arccosx) + C ; b) – 2 arc sen(arctgx) + C ; c) arctg(arcsenx) + C; d) $-2arctg(cos2x)+C$.

4. Al integrar por partes $\int \dfrac{x \cdot e^{\text{arc sen } x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ se obtiene:

a) $e^{\text{arc sen } x}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; b) $\frac{1}{2}e^{\text{arc sen } x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C$ c) $e^{\text{sen } x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$; d) $\frac{1}{2}e^{\text{arc sen } x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$

5. La integral $\int \dfrac{2x+2}{x^2+4x+13}dx$ vale:

a) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \text{arc tg}\dfrac{x+2}{3}+C$; b) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \text{arc tg}\dfrac{2x+2}{3}+C$

c) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \text{arc tg}\dfrac{x+2}{5}+C$;

d) Ninguna es correcta

6. La integral $\int \dfrac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$ vale:

a) $\text{tg}\,x - \text{sen}\,x + C$; b) $-\text{tg}\,x - \text{cotg}\,x + C$ c) $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x + C$; d) $\text{tg}\,x - \text{cotg}\,x + C$

7. La integral definida $\int_0^{\pi} \cos\,x\,dx$ vale:

a) 1; b) π c) 0; d) –1

8. El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 4 vale:

a) 128/3; b) 32/3 c) 64/2; d) 64/3

9. El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$ vale:

a) 9/2; b) 19/3 c) 27/2; d) 3

10. El volumen del sólido de revolución generado por $y = x^2$, entre 0 y 2, al girar en torno al eje de abscisas es:

a) 32π; b) $16\pi/5$ c) 16π; d) $32\pi/5$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Apéndice: Problemas de integrales propuestos en Selectividad

(1) Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x^3-3x+5}{\sqrt[3]{x}}$

(2) Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2-2x-1}{x^2-x-2}dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x}$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(2x)+x\cdot\operatorname{sen}x)\,dx$ e) $\displaystyle\int e^x \cos 3x\,dx$ f) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tan}(3x)\,dx$

(3) Calcula haciendo el cambio de variable $e^x=t$:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x-4e^{2x}}{1+e^x}dx$

(4) Calcula $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2x}+x\cos x\right)dx$

(5) a) Encuentra todas las funciones $f(x)$ cuya segunda derivada es $f''(x)=xe^x$.

b) De todas ellas, determina aquella cuya gráfica pasa por los puntos $A(0,2)$ y $B(2,0)$.

(6) Considera la función $y=x^3-3x^2+1$

a) Determina la recta tangente en el punto en que la función alcanza su máximo relativo.

b) Dibuja el recinto limitado por la curva y la recta tangente anterior.

c) Halla el área del recinto del apartado (b).

(7) Obtén el área del recinto cerrado por las curvas $y=1+\cos x$ e $y=0$ en el intervalo $[-\pi,+\pi]$.

(8) Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{2}-\operatorname{sen}x$

a) Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

b) Calcula el área del recinto anterior.

(9) a) Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisas.

b) Halla el área del recinto dibujado en (a).

(10) Halla el área de la zona del plano limitada por las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=e$, y la gráfica de la curva $y=\ln^2(x)$.

(11) Las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x)=x^2$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(12) Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ \ln x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x.

a) Dibuja el recinto acotado comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y=1$.

b) Calcula el área del recinto anterior.

(13) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}4x+12 & \text{si} \quad x\le -1\\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$

a) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función *f*.

b) Calcula el área del recinto limitado por la función *f*, el eje de abscisas y la recta $x=2$.

(14) Sea la parábola $y=x^2-3x+6$

a) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de esa curva en el punto de abscisa $x=3$.

b) Haz un dibujo aproximado del recinto limitado por la gráfica de la parábola, el eje *OY* y la recta tangente hallada anteriormente.

c) Calcula el área del recinto anterior.

(15) Dada la función $f(x)=(x-a)\cos x$, busca el valor del número real *a* sabiendo que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-2$$

(16) Las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta $x=1$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(17) Se considera la curva de ecuación $y=x^3-2x^2+x$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.

c) Calcula el área de ese recinto.

(18) La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x)=(x+2)\cdot(x^2-9)$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.

b) Determina la función f sabiendo que $f(0)=\frac{1}{5}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(19) La gráfica de la parábola $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,2)$ en dos recintos planos.

a) Dibuja la gráfica de la función y los recintos.

b) Calcula el área de cada uno de ellos.

(20) a) Calcula la función $f(x)$ sabiendo que su derivada es $f'(x) = (x-1)e^x$ y que $f(2) = e$.

b) Demuestra que $f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas y razona si es máximo o mínimo.

(21) Las gráficas de la curva $y = x^3$ y de la parábola $y = x^2 + 2x$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja ese recinto.

b) Calcula su área.

(22) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ mx + n & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

a) Calcula m y n para que f sea continua en todo su dominio.

b) Para esos valores hallados, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

(23) Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Dibuja la gráfica de la función.

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

(24) La curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(25) La parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(26) La curva $y = x^2 + 3$ y la recta $y = 2x + 3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(27) Se considera la parábola $y = 6x - x^2$

a) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la parábola en los puntos de corte con el eje *OX*.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la parábola y las rectas halladas anteriormente.

c) Calcula el área de ese recinto.

(28) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ e^{x-2} + k^2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de $k > 0$ para que la función sea continua en el intervalo $[0,4]$.

b) Suponiendo que $k = 1$, halla la recta tangente en $x = 3$.

c) Suponiendo que $k = 1$, halla el área que la función determina con el eje *OX*, para $x \in [0,4]$.

(29) a) Resuelve por partes la siguiente integral: $\int x(1 - \ln x)dx$

b) De todas las primitivas de $f(x) = x(1 - \ln x)$ calcula la que pasa por el punto $(1,3)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(30) La gráfica de la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja aproximadamente dicho recinto.

b) Calcula el área de ese recinto.

(31) La gráfica de la curva $f(x) = \dfrac{4}{2-x}$ y las rectas $y = 4$ y $x = 0$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja aproximadamente dicho recinto.

b) Calcula el área de ese recinto.

(32) Esboza la gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + \frac{7}{4}$ y halla el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$.

(33) Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$.

a) Representa gráficamente la chapa y calcula su área.

b) Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$.

(34) Representa gráficamente las parábolas $y^2 - 4x = 0$ y $x^2 - 4y = 0$ y calcula el área que encierran.

(35) Se considera la función $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Para $x \in [0, 5]$, esboza la gráfica de la función y calcula el área comprendida entre ella y el eje X.

(36) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halla sus asíntotas, máximos y mínimos.

b) Representa gráficamente la función.

c) Halla el área delimitada por la función y el eje OX, para $-1 \le x \le 1$.

(37) a) Calcula: $\int x^3 \ln(x)dx$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) Utiliza el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular $\int \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$.

Indicación: Para deshacer el cambio de variable, utiliza: $t = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$.

(38) a) Si *f* es una función continua, obtén $F'(x)$ siendo:

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)dt$$

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt$ = 1, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

(39) a) Sea la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$. Calcula $\int f(t)dt$. b) Se define $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$

(40) a) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -sen\ x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$. b) Halla el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -sen\ x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ampliación

A lo largo del tema hemos desarrollado varios métodos, estrategias y aplicaciones de las integrales, pero hay mucho más. Dejamos este apartado para mostrar otras que superan los contenidos del temario.

Integral de una función racional cuando el denominador tiene raíces complejas múltiples

Si al resolver la primitiva de una función racional:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad \text{con } Grado\ de\ Q(x) > Grado\ de\ P(x)$$

$Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples, es decir, en su factorización aparecen términos de la forma:

$$Q(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)^k \cdot (x-d) \cdot \ldots \cdot (x-e)^n \cdot \ldots$$

Descomponemos la fracción algebraica como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{A(x)}{B(x)}\right]' + \frac{C(x)}{D(x)} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A(x)}{B(x)} + \int \frac{C(x)}{D(x)}dx$$

con:

- $B(x)$ el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$;
- $A(x)$ un polinomio, de grado uno menor que $B(x)$, a determinar;
- $D(x)$ el polinomio que resulta del cociente $\frac{Q(x)}{B(x)}$;
- $C(x)$ un polinomio, de grado uno menor que $D(x)$, a determinar.

El desarrollo requiere bastante habilidad con las expresiones algebraicas, y acaba proporcionando una integral racional cuyo denominador tiene raíces complejas simples.

Volumen de un sólido de revolución generado al girar en torno al eje OY

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar la función en torno al eje OY se calcula con la integral:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Longitud de un arco de curva

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos de abscisa a y b se calcula como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Superficie de un sólido de revolución generado al girar en torno al eje OX

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la superficie del sólido generado al girar la función en torno al eje OX se calcula mediante la integral:

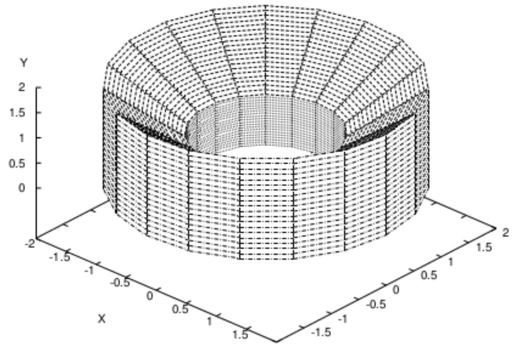
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Ejemplos:

- *Halla el volumen de la "plaza de toros" generada al girar la recta $y = x$ alrededor del eje OY en el intervalo $[1, 2]$.*

  La figura cuyo volumen queremos hallar es:



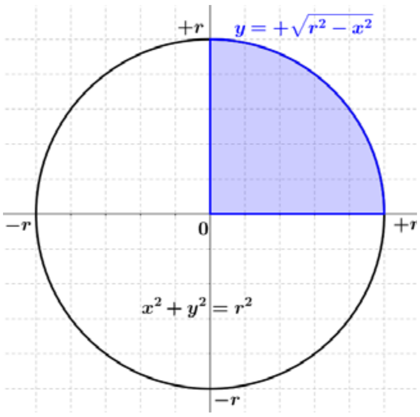
  Y se trata de calcular la integral:

$$V = 2\pi \int_1^2 x \cdot x \cdot dx = 2\pi \int_1^2 x^2 dx = 2\pi \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 2\pi \cdot \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{14\pi}{3} \text{ u}^3$$

- *Halla la longitud de una circunferencia de radio r.*

  Debemos utilizar la expresión: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$, así que derivamos la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$



Entonces, utilizando la simetría de la circunferencia otra vez:

$$L = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right]^2} \, dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \, dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

La primitiva se resuelve con el cambio:

$$x = r \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = r \cdot \cos t \cdot dt$$

como vimos en el apartado 3.5, y proporciona:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \int \frac{r \cdot \cos t \cdot dt}{\sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \int dt = \operatorname{arcsen} t + C = \operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + C$$

Aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$L = 4 \cdot \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{r} \right]_0^r = 4 \cdot \left(\operatorname{arcsen} \frac{r}{r} - \operatorname{arcsen} \frac{0}{r} \right) = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

Es decir:

$$L = 2\pi r \text{ u}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Luis Carlos Vidal, María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP