Matemáticas II. 2º Bachillerato. Capítulo 5: Rectas y planos en el espacio

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *software* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

En este capítulo se inicia el estudio de la Geometría Analítica en el espacio de dimensión tres, con las ecuaciones de las rectas y de los planos que nos permiten conocer si una recta está contenida en un plano, lo corta o es paralela a él, cuáles son las posiciones relativas de dos rectas en el espacio, y lo mismo, de dos planos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

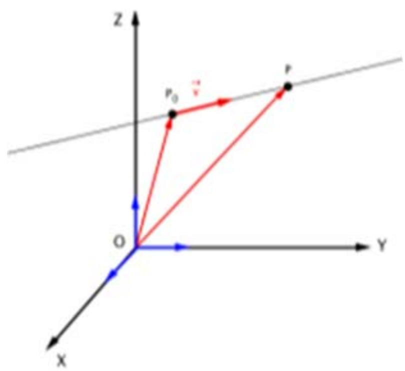
1. LA RECTA EN EL ESPACIO

1.1. Ecuación vectorial de la recta

Una recta r en el espacio viene determinada por un punto $P_0 \in r$ y un vector $\vec{v}$.

- El vector $\overrightarrow{OP_0}$ se denomina **vector de posición** del punto P_0.
- El vector $\vec{v}$ se denomina **vector director**, y su dirección es paralela a la de la recta.

El vector $\overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$ es un vector que tiene su origen en O y cuyo extremo es un punto de la recta r. Es decir, para cada valor del parámetro t es el vector de posición de un punto P de la recta.



Se llama ecuación vectorial de la recta r a la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto genérico de la recta, $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es el vector de posición de un punto dado de la recta $P_0 \in r$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector director de la recta y t es cualquier número real.

A partir de la ecuación anterior, para cada valor de t obtendremos un punto de la recta r.

1.2. Ecuaciones paramétricas de la recta

Si expresamos la ecuación anterior en coordenadas, tenemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

igualando coordenada a coordenada, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{array}\right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

1.3. Ecuación continua de la recta

A partir de las ecuaciones paramétricas, despejando t e igualando, obtenemos la ecuación continua:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + t\cdot v_1 \\ y = y_0 + t\cdot v_2 \\ z = z_0 + t\cdot v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - x_0 = t\cdot v_1 \\ y - y_0 = t\cdot v_2 \\ z - z_0 = t\cdot v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-x_0}{v_1} \\ t = \dfrac{y-y_0}{v_2} \\ t = \dfrac{z-z_0}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Igualando:}$$

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

1.4. Ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta

A partir de la ecuación continua, separando las igualdades y agrupando todos los términos en un miembro, obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} \\ \dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{z-z_0}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_2(x-x_0) = v_1(y-y_0) \\ v_3(x-x_0) = v_1(z-z_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_2x - v_2x_0 = v_1y - v_1y_0 \\ v_3x - v_3x_0 = v_1z - v_1z_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} v_2x - v_1y + (v_1y_0 - v_2x_0) = 0 \\ v_3x - v_1z + (v_1z_0 - v_3x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'z + C' = 0 \end{array}\right\}$$

con:

$$A = v_2,\ B = -v_1,\ C = v_1y_0 - v_2x_0$$

$$A' = v_3,\ B' = -v_1,\ C' = v_1z_0 - v_3x_0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Calcula, en todas las formas estudiadas, las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $A\ (1,\ 2,\ -3)$ *y tiene por vector director* $\vec{v} = (-5,4,\ 2)$.

En coordenadas, la ecuación **vectorial** es:

$$(x, y, z) = (1,\ 2,\ -3) + t \cdot (-5,\ 4,\ 2)$$

Para obtener las ecuaciones **paramétricas** igualamos coordenada a coordenada:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 + 2t \end{array}\right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Despejando t, hallamos la ecuación **continua**:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 + 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 = -5t \\ y - 2 = 4t \\ z + 3 = 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-1}{-5} \\ t = \dfrac{y-2}{4} \\ t = \dfrac{z+3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2}$$

Operamos para eliminar las fracciones y hallamos las ecuaciones **implícitas**:

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-2}{4} \\ \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot (x-1) = (-5) \cdot (y-2) \\ 2 \cdot (y-2) = 4 \cdot (z+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = -5y + 10 \\ 2y - 4 = 4z + 12 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 14 = 0 \\ 2y - 4z - 16 = 0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones son realmente un sistema, y podemos sustituirlo por cualquier otro sistema equivalente a él, obtenido combinando linealmente las ecuaciones.

Actividades propuestas

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\ (-1, -4, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-3, -1, 5)$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\ (4, -3, -2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-1, 0, 6)$

3. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\ (0, 1, 0)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-2, 0, 0)$

1.5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos A y B basta con hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ y utilizarlo como vector director. Siendo $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$, fácilmente podemos hallar:

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\, b_2-a_2,\, b_3-a_3)$$

y utilizar A o B como punto para sustituir en cualquiera de las ecuaciones vistas antes, siendo la más frecuente la ecuación continua:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}\Rightarrow\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}=\frac{z-a_3}{b_3-a_3}$$

O bien:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}\Rightarrow\frac{x-b_1}{b_1-a_1}=\frac{y-b_2}{b_2-a_2}=\frac{z-b_3}{b_3-a_3}$$

Actividad resuelta

- *Determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos* $A(2,-3,1)$ *y* $B(4,5,-1)$.

Considerando el punto A y tomando como vector director $\overrightarrow{AB}=(2,\ 8,\ -2)$, la ecuación es:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-1}{-2}$$

A partir de la ecuación continua se obtienen las ecuaciones implícitas como vimos antes:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{8}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}8x-16=2y+6\\ -2x+4=2z-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}8x-2y-22=0\\ -2x-2z+6=0\end{array}\right\}$$

Ya dijimos que las ecuaciones implícitas no son únicas, podemos combinarlas linealmente y seguirán siendo la ecuación de la misma recta. En primer lugar, podemos simplificarlas:

$$r:\begin{cases}4x-y-11=0\\ \quad x+z-3=0\end{cases}\qquad (1)$$

y ahora podemos sustituir cualquiera de las dos por una combinación lineal de ellas. Si, por ejemplo, operamos para eliminar la x en la segunda ecuación:

$$r:\begin{cases}4x-y-11=0\\ \quad x+z-3=0\xrightarrow[4\times 2^{\circ}\text{ec}-1^{\circ}\text{ec}]{}\end{cases}\begin{cases}4x-y-11=0\\ \quad y+4z-1=0\end{cases}\qquad (2)$$

llegamos a las ecuaciones implícitas que obtendríamos si en la ecuación continua hubiéramos utilizado las fracciones segunda y tercera.

Si en la ecuación (1) operamos cualquier otra combinación lineal:

$$r:\begin{cases}4x-y-11=0\xrightarrow[1^{\circ}\text{ec}-2\times 2^{\circ}\text{ec}]{}\\ \quad x+z-3=0\xrightarrow[3\times 2^{\circ}\text{ec}-1^{\circ}\text{ec}]{}\end{cases}\begin{cases}2x-y-2z-5=0\\ -x+y+3z+2=0\end{cases}$$

las coordenadas de A y B siguen verificando ambas ecuaciones.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Actividad resuelta

- *Halla el vector director de la recta dada por las siguientes ecuaciones implícitas:*

$$r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases}$$

Para hallar el vector director de la recta, debemos llegar a las ecuaciones paramétricas. Basta resolver el sistema dejando a dos de las variables en función de la tercera que, en este caso, resulta más fácil si despejamos x e y en función de z: $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases}$

Sumando y restando las ecuaciones, miembro a miembro, obtenemos:

$$\begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases}$$

$$\text{Suma : } \quad 2y=-4z \qquad\qquad \text{Resta : } \quad 2x=4+2z$$

$$y=-2z \qquad\qquad x=2+z$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son de la forma: $\left.\begin{array}{l} x=2+z \\ y=-2z \\ z=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=-2t \\ z=t \end{array}\right\}$ con $t \in \mathbb{R}$

Y el vector director es: $\vec{v}=(1,\ -2,\ 1)$

Actividad resuelta

- *Determina las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos* $A\ (1,1,1)$ *y* $B\ (2,1,2)$.

Considerando el punto A y el vector director $\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$, las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+1\cdot t \\ y=1+0\cdot t \\ z=1+1\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+t \end{array}\right\} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Observa que **NO** podemos despejar t en la segunda ecuación, por lo que no podemos llegar a la ecuación continua. Esto se debe a que una de las componentes del vector director es 0, y no podemos dividir por 0.

Sí podemos obtener las ecuaciones implícitas, eliminando t combinando la segunda y tercera ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+1\cdot t \\ y=1+0\cdot t \\ z=1+1\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ z=1+t \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$$

Actividades propuestas

4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\ (0,0,0)$ y $B\ (3,-4,1)$.

5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\ (3,-2,6)$ y $B\ (1,-5,7)$.

6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\ (2,-1,6)$ y $B\ (7,-2,-1)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

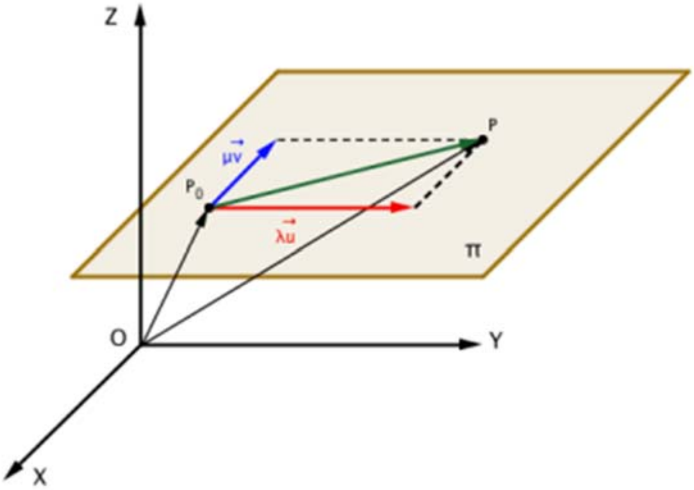
2. ECUACIONES DEL PLANO EN EL ESPACIO

2.1. Ecuación vectorial del plano

Un plano π en el espacio viene determinado por un punto $P_0 \in \pi$ y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de componentes no proporcionales paralelos al plano.

- El vector $\overrightarrow{OP_0}$ se denomina **vector de posición**.
- Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denominan **vectores directores** del plano.

El vector $\overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ es un vector que tiene su origen en O y cuyo extremo es un punto del plano π dado.



Se llama ecuación vectorial del plano π a la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto genérico del plano, $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es el vector de posición de P_0, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son los vectores directores del plano y λ y μ son dos números reales cualesquiera.

A partir de la ecuación anterior para cada par de valores de λ y μ obtenemos un punto del plano π.

2.2. Ecuaciones paramétricas del plano

Si expresamos esta ecuación en coordenadas, tenemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Operando:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \lambda \cdot u_3) + (\mu \cdot v_1, \mu \cdot v_2, \mu \cdot v_3)$$
$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1, y_0 + \lambda \cdot u_2 +, \mu \cdot v_2, z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3)$$

igualando coordenada a coordenada, obtenemos las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y &= y_0 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z &= z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{aligned}\right\}, \text{ con } \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

2.3. Ecuación general o implícita del plano

A partir de la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

Como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP} - \left(-\overrightarrow{P_0O}\right) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P_0O} = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0P}$ tenemos: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

Lo que significa que, aunque tenemos tres vectores $\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, sólo dos son linealmente independientes. Si expresamos esta ecuación en coordenadas:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

y, por tanto:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

Si el rango de esta matriz es 2, no será posible encontrar un menor de orden 3 no nulo y el determinante de la matriz ha de ser 0.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante obtendremos la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando los determinantes obtenemos cuatro valores reales, de modo que la ecuación final es de la forma:

$Ax + By + Cz + D = 0$ con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Calcula, en todas las formas estudiadas, las ecuaciones del plano que pasa por el punto* $A\,(1,-2,3)$ *y tiene por vectores directores* $\vec{u}=(1,\ 2,\ 4)$ *y* $\vec{v}=(-5,\ 4,\ 2)$.

En primer lugar, comprobamos que los vectores que definen el plano no son paralelos, algo evidente al no ser proporcionales. Empezamos escribiendo la ecuación **vectorial**:

$$(x,y,z)=(1,-2,3)+\lambda\cdot(1,2,4)+\mu\cdot(-5,4,2)$$

Igualamos coordenada a coordenada y obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda-5\mu \\ y=-2+2\lambda+4\mu \\ z=3+4\lambda+2\mu \end{array}\right\},\ \text{con } \lambda \text{ y } \mu\in\mathbb{R}$$

Reescribimos el sistema en λ y μ para llegar a la ecuación general:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda-5\mu=x-1 \\ 2\lambda+4\mu=y+2 \\ 4\lambda+2\mu=z-3 \end{array}\right\}$$

El sistema sólo tendrá solución cuando la matriz ampliada del sistema tenga rango dos, es decir, cuando el determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & x-1 \\ 2 & 4 & y+2 \\ 4 & 2 & z-3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$4\cdot(z-3)+4\cdot(x-1)-20\cdot(y+2)-16\cdot(x-1)+10\cdot(z-3)-2\cdot(y+2)=0$$

$$4z-12+4x-4-20y-40-16x+16+10z-30-2y-4=0$$

$$\Rightarrow -12x-22y+14z-74=0$$

Podemos simplificar la ecuación obtenida como:

$$6x+11y-7z+37=0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por el punto* $A\,(1,0,0)$ *y es paralelo a las rectas:*

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}\quad \text{y}\quad s:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

Si el plano es paralelo a las rectas, los vectores directores de las mismas $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son paralelos al plano y pueden usarse como vectores directores del plano. Junto con el punto dado operamos:

$$\pi:\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix}=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow \pi:-5x+7y-3z+5=0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por el punto* $A\,(1,\,0,\,0)$ *y contiene a la recta*

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}$$

Con esta recta conocemos un punto $B\,(1,\,0,\,-2)$ y su vector director $\vec{v}=(1,\,2,\,3)$. Si r está contenida en el plano, lo están todos sus puntos y su vector director. Así, tenemos dos puntos del plano (A y B) y un vector. Hallamos la ecuación del plano definido por el punto A y los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\left.\begin{array}{r}\vec{v}=(1,\ 2,\ 3)\\ \overrightarrow{AB}=(0,\ 0,\ -2)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \pi:\begin{vmatrix}1 & 0 & x-1\\ 2 & 0 & y\\ 3 & -2 & z\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \pi: 2x-y-2=0$$

2.3.1. Vector normal del plano

Si en la ecuación general del plano:

$$A\,x+B\,y+C\,z+D=0 \quad \text{con } A,B,C,D\in\mathbb{R}$$

recordamos los determinantes de los que proceden los valores de A, B y C:

$$x\cdot\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-y\cdot\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0$$

observamos la forma característica del producto vectorial:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

Es decir, el vector de componentes (A,B,C) es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y, por ende, al propio plano.

Se llama **vector normal del plano** $\pi: A\,x+B\,y+C\,z+D=0$ al vector:

$$\vec{n}=(A,B,C)$$

que es perpendicular al plano.

Actividad resuelta

- *Determina el vector normal al plano* $\pi: 2x+y-z-2=0$.

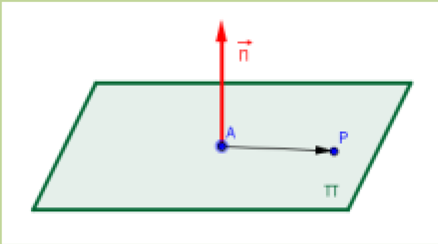
Según lo explicado antes, basta con identificar las componentes del vector con los coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r}A\,x+B\,y+C\,z+D=0\\ 2\,x+y-z-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}A=2\\ B=1\\ C=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{n}=2\vec{i}+1\vec{j}-1\vec{k}\Rightarrow\vec{n}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

2.3.2. Ecuación del plano dado su vector normal y un punto

Dado un punto $A\left(a_1, a_2, a_3\right)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (A, B, C)$, podemos hallar la ecuación general del plano aprovechando la condición de perpendicularidad vista en el capítulo anterior:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Si llamamos $P\,(x, y, z)$ a un punto genérico del plano, en la figura vemos que los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares. Por tanto:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \;\Rightarrow\; (A, B, C) \cdot (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$$

Operando:

$$A \cdot \left(x - a_1\right) + B \cdot \left(y - a_2\right) + C \cdot \left(z - a_3\right) = 0$$

Que es la ecuación del plano dado un punto y su vector normal.

Actividades resueltas

- *Determina la ecuación del plano π cuyo vector normal es: $\vec{n} = (-1, 2, 0)$ y pasa por el origen*

El origen es el punto de coordenadas $(0, 0, 0)$, por tanto:

$$\pi : A \cdot \left(x - a_1\right) + B \cdot \left(y - a_2\right) + C \cdot \left(z - a_3\right) = 0 \Rightarrow \pi : (-1) \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0$$

Es decir:

$$\pi : -x + 2y = 0$$

- *Determina la ecuación del plano π que pasa por el origen y es perpendicular a la recta:*

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$$

Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de ésta puede utilizarse como vector normal al plano, es decir:

$$\vec{v} = (1, 2, 3) = \vec{n} \Rightarrow \pi : 1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow \pi : x + 2y + 3z = 0$$

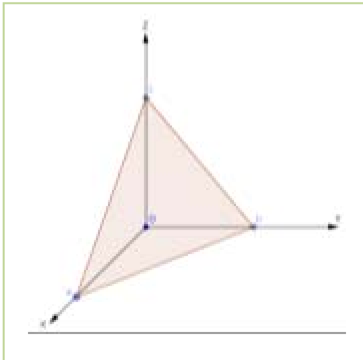
2.4. Ecuación segmentaria del plano

Si en la ecuación general del plano $D \neq 0$, podemos dividir ambos términos entre D y obtenemos:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + \frac{D}{D} = 0 \Rightarrow A'x + B'y + C'z + 1 = 0$$

Representando un plano genérico, que $D \neq 0$ nos garantiza que cortará a los tres ejes cartesianos:

Si denominamos los puntos de corte como $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$, como todos pertenecen al plano deben verificar la ecuación del mismo, es decir:



$$\pi : A'x + B'y + C'z + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto } A : A'\cdot a + B'\cdot 0 + C'\cdot 0 + 1 = 0 \\ \text{Punto } B : A'\cdot 0 + B'\cdot b + C'\cdot 0 + 1 = 0 \\ \text{Punto } C : A'\cdot 0 + B'\cdot 0 + C'\cdot c + 1 = 0 \end{cases}$$

despejando:

$$\begin{cases} A'\cdot a + 1 = 0 \Rightarrow A' = \frac{-1}{a} \\ B'\cdot b + 1 = 0 \Rightarrow B' = \frac{-1}{b} \\ C'\cdot c + 1 = 0 \Rightarrow C' = \frac{-1}{c} \end{cases} \Rightarrow \pi : \frac{-1}{a}x + \frac{-1}{b}y + \frac{-1}{c}z + 1 = 0$$

o, multiplicando por -1:

$$\pi: \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

que es la ecuación **segmentaria** del plano.

Actividad resuelta

- *Determina la ecuación segmentaria del plano* $\pi : x + 2y - z + 2 = 0$

El término independiente de la ecuación segmentaria es (-2), así que dividiremos ambos términos de la ecuación del plano dado entre (-2):

$$\pi : x + 2y - z + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x + 2y - z + 2}{-2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} - 1 = 0$$

Podemos deducir fácilmente que el plano pasa por los puntos:

$$A(-2,0,0), \quad B(0,-1,0), \quad C(0,0,2)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

2.5. Ecuación del plano que pasa por tres puntos

El apartado anterior nos muestra la forma en la que podemos hallar la ecuación del plano que pasa por tres puntos.

Si $A\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $B\left(b_1,b_2,b_3\right)$ y $C\left(c_1,c_2,c_3\right)$, pertenecen al plano de ecuación

$$A\,x+B\,y+C\,z+D=0$$

Sus coordenadas deben verificar la ecuación simultáneamente, es decir, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} A\,x+B\,y+C\,z+D=0 \\ A\cdot a_1+B\cdot a_2+C\cdot a_3+D=0 \\ A\cdot b_1+B\cdot b_2+C\cdot b_3+D=0 \\ A\cdot c_1+B\cdot c_2+C\cdot c_3+D=0 \end{cases}$$

Por extraño que parezca, en este sistema las incógnitas son los coeficientes A, B, C y D. Sin embargo, con la ecuación segmentaria vemos que realmente sólo necesitaríamos **tres** incógnitas. Para resolver un sistema en la que una incógnita *no es del todo necesaria*, podemos añadir una cuarta ecuación que *tampoco sea necesaria*, la propia ecuación del plano. Así, expresando el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que la solución sea única, el determinante de la matriz debe ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Que es la ecuación del plano que contiene a **tres puntos**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Actividades resueltas

- *Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ y $C(1,1,0)$.

Podríamos resolver el problema hallando la ecuación del plano que pasa por el punto A y tiene como vectores directores a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, siguiendo los pasos dados en el apartado 2.3:

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda\cdot(-1,1,0)+\mu\cdot(0,1,-1)$$

Operando llegamos a: $$\left.\begin{aligned}-\lambda \quad &= x-1\\ \lambda+\mu &= y\\ -\mu &= z-1\end{aligned}\right\}$$

Que se resuelve rápidamente sustituyendo λ y μ en la ecuación:

$$\left.\begin{aligned}-\lambda \quad &= x-1\\ \lambda+\mu &= y\\ -\mu &= z-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ -(x-1)-(z-1)=y\ \Rightarrow\ x+y+z-2=0$$

En este ejemplo no fue muy difícil desarrollar la ecuación a partir de las ecuaciones paramétricas, sin embargo, en general es más rápido calcular un único determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot x-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot y+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\cdot z-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

Es decir: $$(-1)\cdot x-1\cdot y+(-1)\cdot z-(-2)=0\Rightarrow -x-y-z+2=0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(2,0,0)$, $B(0,-2,0)$ y $C(0,0,5)$.

Observando que los puntos A, B y C pertenecen cada uno a un eje coordenado podemos plantear directamente la ecuación segmentaria del plano:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{5}-1=0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,0)$.

Si el punto C no fuera el origen, podríamos plantear la ecuación segmentaria del plano. Debemos, sin embargo, plantear el determinante: $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

Desarrollando por los elementos de la tercera columna obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow +z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+0\cdot\ldots=0\Rightarrow z=0$$

2.6. Condición para que cuatro puntos sean coplanarios

Los puntos $A\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $B\left(b_1,b_2,b_3\right)$, $C\left(c_1,c_2,c_3\right)$ y $D\left(d_1,d_2,d_3\right)$ son coplanarios cuando pertenecen a un mismo plano. Si la ecuación de dicho plano es:

$$A\,x+B\,y+C\,z+D=0 \quad \text{con } A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

ya vimos que podemos dividir ambos términos entre D y dejar la ecuación con sólo tres coeficientes:

$$A'\,x+B'\,y+C'\,z+1=0$$

Si redefinimos A', B' y C' como $-A$, $-B$ y $-C$ obtenemos la ecuación reescrita como: $A\,x+B\,y+C\,z=1$

Si los cuatro puntos pertenecen al plano, sus coordenadas respectivas deben verificar la ecuación simultáneamente, es decir, tenemos el sistema: $\begin{cases} A\cdot a_1+B\cdot a_2+C\cdot a_3=1 \\ A\cdot b_1+B\cdot b_2+C\cdot b_3=1 \\ A\cdot c_1+B\cdot c_2+C\cdot c_3=1 \\ A\cdot d_1+B\cdot d_2+C\cdot d_3=1 \end{cases}$

Expresando el sistema en forma matricial, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para que la solución sea única, el determinante de la **matriz ampliada** debe ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Esta condición es válida incluso cuando los puntos están alineados u otras condiciones que impliquen un rango más pequeño de la matriz.

Otra forma de resolverlo es comprobar que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, es decir, comprobando si el determinante formado por sus componentes es nulo:

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

Esta estrategia es el segundo concepto básico para resolver casi cualquier problema de geometría en el espacio:
"Si un punto pertenece a una recta o a un plano, debe verificar sus ecuaciones"

Actividades resueltas

- *Comprueba que los puntos* $A\left(1,1,1\right)$, $B\left(3,0,0\right)$, $C\left(0,2,0\right)$ *y* $D\left(0,0,6\right)$ *son coplanarios.*

Planteamos el determinante de orden 4, hacemos ceros y resolvemos por el adjunto del elemento a_{12}:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-2\cdot f_1]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\left(-6-12+18\right)=0$$

Por tanto, los puntos están alineados.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

3. POSICIONES RELATIVAS

Hablamos de posiciones relativas para indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Las situaciones básicas a reconocer son:

1. **Secantes**: Las figuras tienen uno o más puntos en común.
2. **No secantes**: Las figuras no tienen puntos en común.
3. **Coincidentes**: Todos los puntos son comunes, por tanto son la misma figura.
4. **Contenidas**: Todos los puntos de una figura pertenecen a la segunda, pero no a la inversa.

Además, podemos clasificarlas en función de su dirección como:

1. **Paralelas**: Todos los puntos de una figura están a la misma distancia de la otra.
2. **Perpendiculares**: Las figuras forman un ángulo de 90°.

La estrategia fundamental para abordar este apartado es:

El tercer concepto básico para resolver problemas de geometría en el espacio:

"Para determinar los puntos en común de dos figuras (si existen) se resolverá el sistema formado por sus ecuaciones"

3.1. Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Sean los planos π y π', dados por su ecuación general:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \qquad\qquad \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Consideramos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Sea M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad\qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

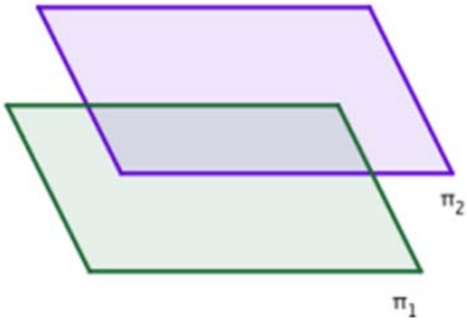
Estudiamos el rango de M y M^*. Se pueden dar los siguientes casos:

1. Si $rg(M) = rg(M^*) = 1 <$ nº incógnitas $\Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. Todos los puntos comunes (la intersección) es todo el plano, por tanto los planos son **coincidentes**.

   El rango es 1 sólo si las dos filas de M y M^* son proporcionales, lo que algebraicamente puede interpretarse como que simplificando una de las ecuaciones, puede obtenerse la otra.

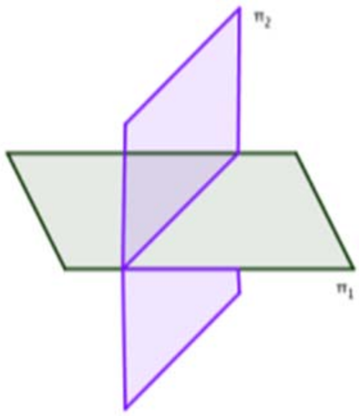
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

2. Si $\text{rg}(M) = 1 \neq \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución. Los dos planos no tienen puntos en común, luego son **paralelos**.



El rango de M es 1 sólo si las filas son proporcionales, lo que geométricamente se interpreta como que los vectores normales son paralelos. Que D y D' no mantengan esa relación de proporcionalidad quiere decir que contienen distintos puntos.

3. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 < \text{n}^{\text{o}}\ \text{incógnitas} \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso los planos son **secantes** y su intersección es una recta.



Esta situación es equivalente a lo visto en el apartado 1.4. Dicho de otro modo, las ecuaciones implícitas de la recta representan geométricamente la intersección de dos planos.

Esta interpretación geométrica nos permite simplificar la obtención del vector director de la recta definida por sus ecuaciones implícitas: es trivial observar que $\vec{v}$ está contenido en ambos planos, π_1 y π_2. Por ese motivo, $\vec{v}$ es perpendicular a los dos vectores normales de dichos planos, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, lo que nos permite identificarlo con el producto vectorial:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Actividades resueltas

- *Halla el vector director de la recta dada por las siguientes ecuaciones implícitas:*

$$r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases}$$

Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1=(1,\ 1,\ 1))$ y $\vec{n}_2=(-1,\ 1,3))$. Por tanto:

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$$

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1: x-y+2z-1=0 \\ \pi_2: x+y+3z+1=0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices del mismo:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: x-y+2z=1 \\ \pi_2: x+y+3z=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Es trivial observar que el rango de M es dos, ya que sus filas no son proporcionales. Por tanto, los planos no son paralelos sino secantes: **π_1 y π_2 se cortan definiendo una recta**.

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1: 6x+3y-3z-1=0 \\ \pi_2: 10x+5y-5z+1=0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices del mismo:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: 6x+3y-3z=1 \\ \pi_2: 10x+5y-5z=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}\Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & 1 \\ 10 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora el rango de M es 1, ya que sus filas son proporcionales, y todos los determinantes que podemos construir a partir de ella son nulos:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \operatorname{rg}(M)=1$$

Sin embargo, el rango de M^* es dos, ya que D y D' no mantienen la relación de proporcionalidad de los demás coeficientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=3-(-5)=8\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(M^*)=2$$

Por tanto, **los planos π_1 y π_2 son paralelos**.

- *Halla el valor de A, B y C para que los siguientes planos sean coincidentes:*

$$\begin{cases} \pi_1 : 2x + B\,y - 3z + 2 = 0 \\ \pi_2 : A\,x + 5y + C\,z + 3 = 0 \end{cases}$$

Para que sean coincidentes, los coeficientes A, B, C y D deben ser proporcionales, por tanto:

$$\frac{2}{A} = \frac{B}{5} = \frac{-3}{C} = \frac{2}{3}$$

Resolviendo las ecuaciones dos a dos:

$$A = 3 \quad , \quad B = \frac{10}{3} \quad , \quad C = \frac{-9}{2}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \pi_1 : 2x + \frac{10}{3}y - 3z + 2 = 0 \\ \pi_2 : 3x + 5y - \frac{9}{2}z + 3 = 0 \end{cases}$$

3.2. Posiciones relativas de tres planos en el espacio

Sean los planos π, π' y π'' dados por sus respectivas ecuaciones generales:

$$\pi : A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \qquad \pi' : A'\,x + B'\,y + C'\,z + D' = 0 \qquad \pi'' : A''\,x + B''\,y + C''\,z + D'' = 0$$

Consideramos el sistema formado por dichas ecuaciones:

$$\begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M y M^*.

Se pueden dar los siguientes casos:

1. Si $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(M^*) = 1 < \text{nº incógnitas} \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ Las ecuaciones son proporcionales. El sistema tiene infinitas soluciones. Los tres planos son **coincidentes**.

$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

Como en el caso de dos planos, el rango es igual a 1 sólo si las tres filas de M y M^* son proporcionales, y algebraicamente podemos simplificar las ecuaciones a una común.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Ejemplo

- *Los planos:*

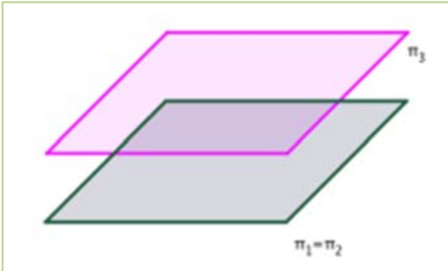
$$\begin{cases} \pi_1: 5x+5y+5z-10=0 \\ \pi_2: 2x+2y+2z-4=0 \\ \pi_3: 6x+6y+6z-12=0 \end{cases}$$

son coincidentes. Es trivial ver que podemos simplificarlas a una ecuación común:

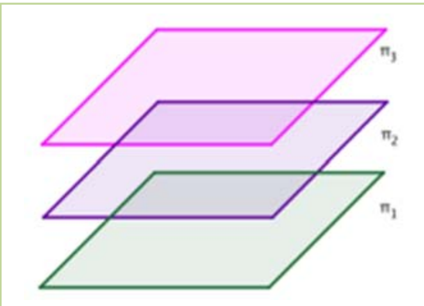
$$\begin{cases} \pi_1: 5x+5y+5z-10=0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 5}]{} \\ \pi_2: 2x+2y+2z-4=0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 2}]{} \\ \pi_3: 6x+6y+6z-12=0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 6}]{} \end{cases} \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y+z-2=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$$

2. Si $\text{rg}(M)=1 \neq \text{rg}(M^*)=2 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ Pueden darse dos casos:

- Si dos ecuaciones son proporcionales y la otra no, tendremos **dos planos coincidentes** y **paralelos al tercero**.



Que el rango de M sea uno indica que los planos tienen sus vectores ortogonales proporcionales y, por tanto, son planos paralelos. El plano no coincidente será aquél cuyo término D no sea proporcional a los otros dos, y su ecuación no sea simplificable a una equivalente.



- Si ninguna de las ecuaciones es proporcional, tendremos **tres planos paralelos**.

Ejemplos

- *En la familia de planos:*

$$\begin{cases} \pi_1: 5x+5y+5z-10=0 \\ \pi_2: 2x+2y+2z-8=0 \\ \pi_3: 6x+6y+6z-12=0 \end{cases}$$

π_1 y π_3 son coincidentes, podemos simplificar sus ecuaciones a ecuación común, pero no así π_2. Sin embargo, los coeficientes A, B y C sí son proporcionales en los tres planos. El plano π_2 es paralelo a los otros dos.

$$\begin{cases} \pi_1: 5x+5y+5z-10=0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 5}]{} \\ \pi_2: 2x+2y+2z-8=0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 2}]{} \\ \pi_3: 6x+6y+6z-12=0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 6}]{} \end{cases} \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y+z-4=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

- *En la familia de planos:*

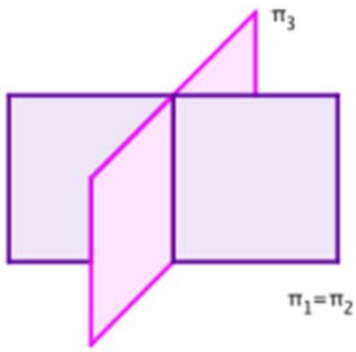
$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 8 = 0 \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$$

Los coeficientes A, B y C sí son proporcionales en los tres planos, pero no así el término independiente, D. Son, entonces, tres planos paralelos.

$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 3 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 5}]{} \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 8 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 2}]{} \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 6}]{} \end{cases} \begin{cases} x + y + z - \frac{3}{5} = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

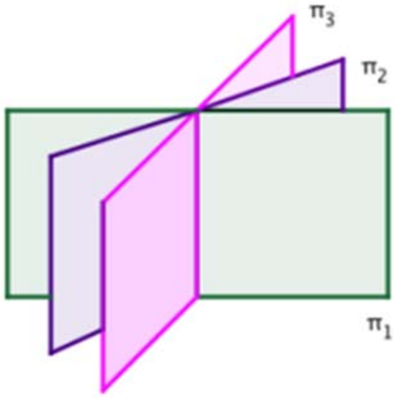
3. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 < \text{n}^{\text{o}} \text{ incógnitas } \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ Pueden darse dos casos:

- Si dos de las ecuaciones son proporcionales, tenemos **dos planos coincidentes** que **cortan al tercero**.



Los dos planos coincidentes son el caso conocido de ecuaciones proporcionales.

- Si no hay ecuaciones proporcionales, no hay planos coincidentes. Los tres planos se cortarán en una **recta**.



Geométricamente, esta situación se traduce en que los tres vectores normales a los planos son linealmente dependientes, pero los infinitos puntos comunes a los tres planos están alineados.

Actividades resueltas

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^*:

$$\left.\begin{matrix} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y + z - 3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos mediante determinantes que el rango de M es dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) \geq 2$$

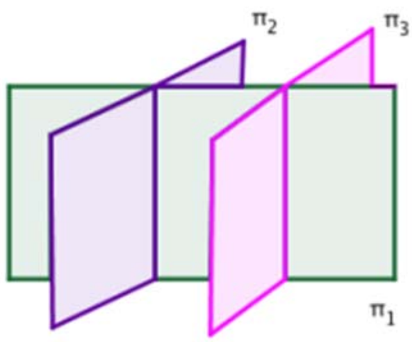
$$\text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 2 + 1 + 9 = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$$

Si hallamos los otros tres menores que es posible construir a partir de M^*:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = \text{rg}(M) = 2$$

vemos que son todos nulos. Por tanto, **los planos son secantes y se cortan definiendo una recta**.

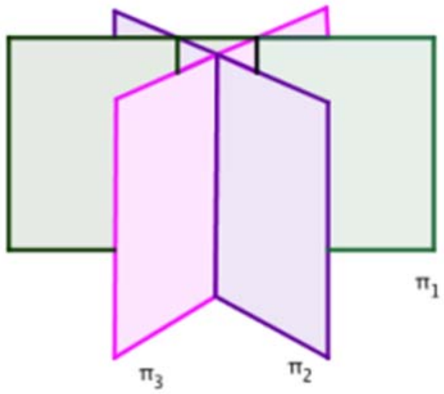
4. Si $rg(M) = 2 \neq rg(M^*) = 3 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ En este caso puede ocurrir:
   - Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.



Determinamos qué planos son paralelos analizando qué pareja de vectores normales son proporcionales, pero no hay puntos comunes a los tres planos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

- Ninguno de los planos es paralelo al otro. Se cortan dos a dos y definen un prisma sin bases.



Esta situación se traduce en que los tres vectores normales son linealmente dependientes, pero no puede haber puntos comunes a los tres planos ya que el sistema es incompatible.

Actividades resueltas

- *Comprueba que los tres planos siguientes forman un prisma infinito sin bases:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Excepto el término independiente de la tercera ecuación, son los tres planos del ejemplo anterior.

Ya vimos que el rango de M es dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 2 + 1 + 9 = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$$

El primer menor que es posible construir a partir de M^* es diferente de cero:

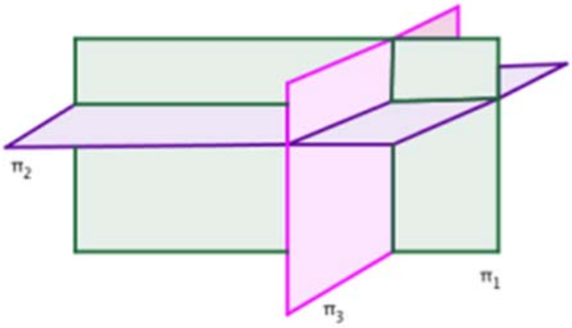
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 1 - 6 - 9 + 1 - 2 = -26 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3 \neq \text{rg}(M) = 2$$

y analizando los vectores normales, vemos que ninguno es proporcional a otro:

$$\vec{v}_1 \text{ y } \vec{v}_2 : \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{3} \quad , \quad \vec{v}_1 \text{ y } \vec{v}_3 : \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{1} \quad , \quad \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 : \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{3}{1}$$

Por tanto, los tres planos definen un prisma infinito sin bases.

5. Si $rg(M) = rg(M^*) = 3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. Los tres planos se cortan en un punto.



Actividades resueltas

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1: x - y + 2z - 2 = 0 \\ \pi_2: x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3: x - 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^*:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: x - y + 2z - 2 = 0 \\ \pi_2: x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3: x - 3y - z - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el rango de M es tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 - 3 - 2 - 1 + 9 = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

Por lo que el sistema es compatible y determinado, los tres planos se cortan en un punto.

Resolvemos con el método de *Cramer* y se obtiene el punto de intersección:

$$x = -2, \quad y = -2 \quad y \quad z = 1$$

Todo lo explicado anteriormente con las ecuaciones generales de los planos sirve también si alguno de ellos viene dado en ecuaciones paramétricas. Podemos plantear el sistema formado por sus ecuaciones y analizar su compatibilidad, o bien hallar los vectores normales y comprobar si son paralelos o no.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = -1 - \lambda + 2\mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases} \end{cases}$$

Método 1:

Expresamos al plano π_2 en forma general y aplicamos el método explicado.

Método 2:

Hallamos los vectores normales de ambos planos:

$$\vec{n}_1 = (A, B, C) \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 2) \qquad \vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

Los vectores normales NO son paralelos, y por tanto tampoco lo son los planos:

$$\frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{-5} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n}_1 \text{ y } \vec{n}_2 \text{ no son proporcionales}$$

Esto implica que **los planos son secantes**. Se cortan en una recta.

Si los vectores fueran proporcionales, determinamos si los planos son paralelos o coincidentes simplemente sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del otro plano. Si dicho punto pertenece a ambos planos, la única opción posible es que sean coincidentes.

Método 3:

Sustituimos las expresiones paramétricas de π_2 en π_1:

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = -1 - \lambda + 2\mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (2 + \lambda - 3\mu) - (-1 - \lambda + 2\mu) + 2 \cdot (2\lambda - \mu) - 1 = 0$$

Operamos y obtenemos: $6\lambda - 7\mu + 2 = 0$

Tenemos una relación entre λ y μ, por tanto **los planos son secantes**.

Si los planos son paralelos, al sustituir las ecuaciones paramétricas en la general se cancelarán los términos en λ y μ. Dependiendo del término independiente resultante podremos deducir:

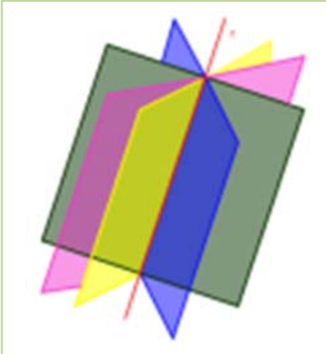
– Si obtenemos $0 = 0$, **los planos son coincidentes**.

– Si obtenemos $0 = k$, con $k \neq 0$, **los planos son paralelos**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

3.3. Haces de planos en el espacio

3.3.1. Haz de planos secantes



Definimos el **haz de planos secantes** a una recta como el conjunto de todos los planos que contienen a dicha recta.

Para obtener el haz de planos secantes a una recta, expresamos la recta como intersección de dos planos:

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Cualquier otro plano del haz debe contener a la recta, por tanto, su ecuación debe ser combinación lineal de las dos anteriores y la ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_r : \alpha \cdot (Ax + By + Cz + D) + \beta \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0 \text{ con } \alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{R}.$$

Si α y β son no nulos, podemos reescribir la ecuación del haz de planos secantes como:

$$\pi_r : (Ax + By + Cz + D) + \lambda \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuación que, *en ocasiones*, simplifica la resolución de muchos problemas de geometría.

Actividades resueltas

- *Halla el haz de planos secantes a la recta:* $r : \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = z+3$

Expresamos la recta como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{x+2}{5} = z+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot(x+2) = 5\cdot(y-1) \\ x+2 = 5\cdot(z+3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+8 = 5y-5 \\ x+2 = 5z+15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-5y+13 = 0 \\ x-5z-13 = 0 \end{array}\right\}$$

La ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_r: 4x - 5y + 13 + \lambda(x - 5z - 13) = 0$$

- *Halla el plano del haz de planos anterior que pasa por el punto* $P\ (3, 2, -2)$.

Para que el plano pase por dicho punto, las coordenadas de P deben verificar su ecuación:

$$\pi_r:\ 4x - 5y + 13 + \lambda(x - 5z - 13) = 0 \Rightarrow 12 - 5\cdot 2 + 13 + \lambda\cdot(3 - 5\cdot(-2) - 13) = 0$$

Operamos y obtenemos:

$$15 + \lambda \cdot 0 = 0$$

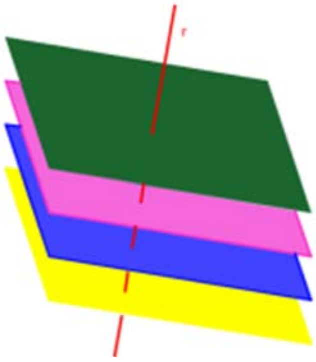
que no tiene solución. Este es uno de los casos a los que nos referíamos cuando dijimos "*en ocasiones*". Lo que ocurre es que P pertenece al segundo plano, por lo que la ecuación pedida es directamente la de ese plano:

$$\pi_r:\ x - 5z - 13 = 0.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

3.3.2. Haz de planos perpendiculares a una recta

Definimos el **haz de planos perpendiculares** a una recta como el conjunto de todos los planos perpendiculares a dicha recta.



Es simple ver que el vector director de la recta es un vector normal de cualquiera de los planos del haz. Siendo la ecuación de la recta:

$$r\colon \frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}=\frac{z-c}{v_3}$$

La ecuación del haz de planos perpendiculares es:

$$v_1x+v_2y+v_3z+D=0 \text{ con } D\in\mathbb{R}.$$

Actividades resueltas

- *Halla el haz de planos perpendiculares a la recta:*

$$r:\frac{x-4}{2}=y+7=\frac{z-1}{3}$$

El vector director de la recta es $\vec{v}=(2,\ 1,\ 3)$, de modo que la ecuación del haz de planos perpendiculares es:

$$2x+y+3z+D=0 \text{ con } D\in\mathbb{R}.$$

- *Halla el haz de planos perpendiculares a la recta:*

$$\left.\begin{array}{r} 4x-y+2z+1=0 \\ x+y-5z-3=0 \end{array}\right\}$$

Necesitamos hallar el vector director de la recta, para lo que procedemos del mismo modo que en la sección 3.1, el vector director de la recta será el producto vectorial de los vectores normales:

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}=3\vec{i}+22\vec{j}+5\vec{k}$$

Por tanto, el haz de planos paralelos tiene por ecuación:

$$3x+22y+5z+D=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

3.4. Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

Consideramos la recta r, dada por las ecuaciones implícitas, y un plano π, dado por su ecuación general:

$$r: \left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\} \qquad \pi: A''x+B''y+C''z+D''=0$$

Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

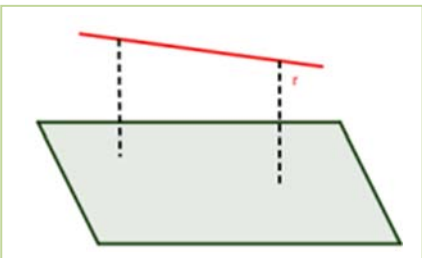
Estudiamos el rango de M y M^*. Se pueden dar los siguientes casos:

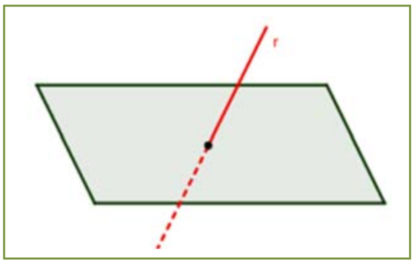
1. Si $rg(M)=rg(M^*)=2 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. La **recta** está **contenida en el plano**.

La interpretación geométrica es simple, los tres planos (los dos que definen la recta y el plano π) pertenecen a un mismo haz.

2. Si $rg(M)=2 \neq rg(M^*)=3 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución. La recta y el plano no se cortan, por tanto son **paralelos**.

Geométricamente se interpreta que el vector de la recta es combinación lineal de los vectores del plano, pero no tienen ningún punto en común.





3. Si $rg(M)=rg(M^*)=3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. La recta y el plano son **secantes** y se cortan en un punto.

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π:*

$$\begin{cases} \pi: x-y+z-3=0 \\ r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y-z-5=0 \end{cases} \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^*:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z-3=0 \\ x+y+z+1=0 \\ x-y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Hallamos el rango de M:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1-1-1+1-1=-4 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(M)=3$$

Como el rango de M es tres, también lo es el rango de M^*. Por tanto, el sistema es compatible determinado y la recta y el plano son secantes, tienen un punto en común que hallamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \pi : x-y+z-3=0 \\ r:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y-z-5=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow P\,(2,-2,-1)$$

Si la recta r viene dada por su ecuación continua la mejor opción es convertirla en sus ecuaciones paramétricas y sustituir en la ecuación del plano π.

Entonces, tendremos una ecuación de una variable que simplifica el razonamiento:

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π:*

$$\begin{cases} \pi : x+2y-3z-5=0 \\ r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi : x+2y-3z-5=0 \\ r:\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

Sustituimos las expresiones paramétricas de *x*, *y* y *z* en la ecuación del plano:

$$(2+t)+2(-1+2t)-3(1-t)-5=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 8t-8=0 \Rightarrow t=1$$

La ecuación resultante tiene una única solución, por tanto la recta y el plano son secantes, se cortan en un punto que podemos determinar sustituyendo el valor de *t* en las ecuaciones de *r*:

$$r:\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=1-t \end{cases} \quad \text{con } t=1 \Rightarrow P\begin{cases} x=2+1 \\ y=-1+2 \\ z=1-1 \end{cases} \Rightarrow P\,(3,1,0)$$

Las otras dos situaciones posibles son:

– Si obtenemos $0 \cdot t = 0$, **la recta está incluida en el plano**.

– Si obtenemos $0 \cdot t = k$, con $k \neq 0$, **la recta y el plano son paralelos**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

3.5. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Para estudiar la posición relativa de dos rectas en el espacio a partir de sus ecuaciones implícitas:

$$r:\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\} \text{ y } s:\left.\begin{array}{l} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{array}\right\}$$

planteamos una vez más el sistema formado por las cuatro ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{array}\right\}$$

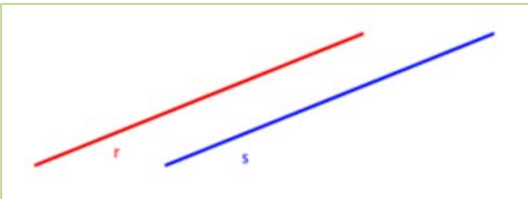
Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

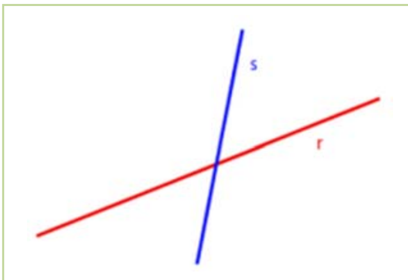
Estudiamos el rango de M y M^*. Se pueden dar los siguientes casos:

- Si $rg(M)=rg(M^*)=2 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones, lo que implica que las rectas son **coincidentes**.

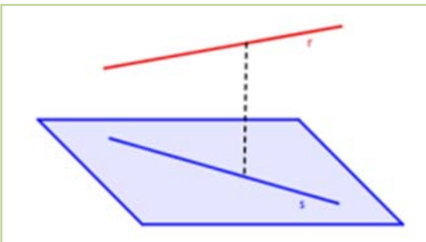
  Que el rango de ambas matrices sea dos implica que sólo dos de las ecuaciones son linealmente independientes o, geométricamente, que los cuatro planos pertenecen al mismo haz.



- Si $rg(M)=2 \neq rg(M^*)=3 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución y sus vectores directores son proporcionales. Las dos rectas son **paralelas**.



- Si $rg(M)=rg(M^*)=3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. Las dos rectas son **secantes** y su intersección es un punto.



- Si $rg(M)=3 \neq rg(M^*)=4 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución. Sus vectores directores no son proporcionales. Las dos rectas **se cruzan**.

Si las rectas no vienen dadas en su forma implícita, debemos realizar el estudio analizando sus vectores

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

directores y puntos por los que pasan (vectores de posición).

Consideramos las rectas *r* y *s*, que vendrán determinadas por un punto y un vector director:

$$r:\begin{cases} P\left(p_1,p_2,p_3\right) \\ \vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)\end{cases} \qquad s:\begin{cases} Q\left(q_1,q_2,q_3\right) \\ \vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)\end{cases}$$

Las situaciones antes estudiadas se determinan del siguiente modo:

- Si las rectas *r* y *s* son **coincidentes** (*r* y *s* son la misma recta)

  Esto significa que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ serán proporcionales, y por tanto:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=1$$

- Las rectas *r* y *s* son **secantes**

  Esto significa que *r* y *s* se cortan en un único punto. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, pero el vector $\overrightarrow{PQ}$ es combinación lineal de ellos. Por tanto, tenemos:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=2 \quad \text{y} \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=2$$

- Las rectas *r* y *s* son **paralelas**

  En este caso las rectas no tienen ningún punto en común, pero están contenidas en el mismo plano. Por tanto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales, pero no serán proporcionales al vector $\overrightarrow{PQ}$. Tenemos:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=1 \quad \text{y} \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=2$$

- Las rectas *r* y *s* se cruzan

  Esto significa que las rectas no tienen ningún punto en común ni están contenidas en el mismo plano. En este caso, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes. Por tanto:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=3$$

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de las rectas:*

$$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+2=-2y=z-1$$

Método 1:

Hallamos el vector director de r con el producto vectorial:

$$\vec{v}_r=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

Y el vector director de s reescribiendo la ecuación continua:

$$s: x+2=-2y=z-1 \Rightarrow s: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_s=\vec{i}-\tfrac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}$$

Hallamos ahora el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P un punto de r y Q un punto de s:

$$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=3 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow P\,(3,0,-4) \quad \text{y} \quad Q\,(-2,0,1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-5,0,5)$$

Planteamos la matriz y calculamos el determinante para hallar el rango:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\frac{5}{2}\neq 0$$

El rango de la matriz es tres, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, por tanto, **las rectas se cruzan**.

Método 2:

Obtenemos las ecuaciones implícitas de s:

$$s: x+2=-2y=z-1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2=-2y \\ x+2=z-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+2=0 \\ x-z+3=0 \end{matrix}\right\}$$

Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M^*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & -6 \end{vmatrix}=10-5=5\neq 0$$

Tenemos que el $\operatorname{rg}(M^*)=4$, pero el rango de M es como mucho 3. **Las dos rectas se cruzan**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

CURIOSIDADES. REVISTA

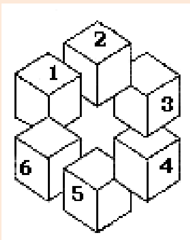
Objetos imposibles

A lo largo del capítulo hemos ido viendo dibujos de las figuras en el espacio. Muchas veces nos han servido de ayuda, pero en otras (por ejemplo, rectas que se cruzan) en el esquema no está tan claro qué está pasando en realidad.

Esto es consecuencia de que **proyectar** una imagen tridimensional en el plano implica una cierta pérdida de información, algo que ciertos artistas aprovechan para realizar dibujos de **figuras imposibles**.

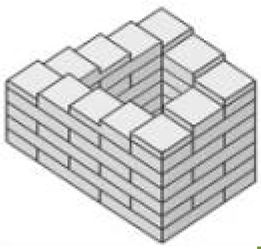
Perspectiva absurda – William Hogarth

Se considera a *Oscar Reutersvard* el creador de las figuras imposibles tal y como las conocemos. En 1934, siendo estudiante, se encontraba aburrido en una clase de latín y se puso a dibujar estrellas de varias puntas.



Un día dibujó una estrella de 6 puntas rodeada de cubos y comprobó algo extraño. Colocó 3 nuevos cubos en las esquinas y apareció una figura imposible.

Las figuras sobre estas líneas se denominan triángulos de *Penrose*, y en 1982 apareció uno de ellos en sellos de correo suecos.

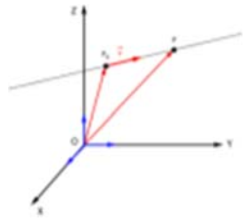
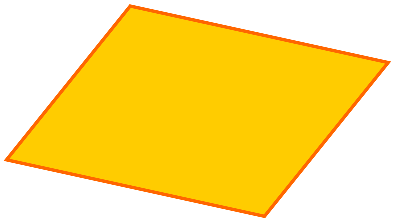
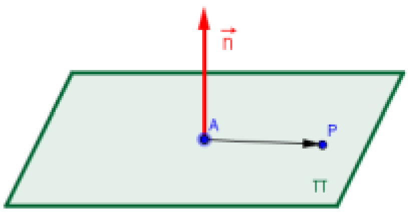


En 1956 *Roger Penrose* publicó un artículo en el que aparecen otras figuras imposibles.

Parece ser que *Penrose* se inspiró en dibujos de *Escher*, que todavía no había pintado figuras imposibles, quien a su vez se inspiró en los artículos de *Reutersvard*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

RESUMEN

Recta	Figura en el espacio que únicamente tiene longitud, no anchura ni profundidad. Se suele representar con una letra minúscula, habitualmente r, y se define a partir de un punto $P\,(p_1, p_2, p_3)$ y un vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$.	
Plano	Figura en el espacio tiene longitud y anchura, pero no profundidad. Se suele representar con una letra griega, habitualmente π, y se define a partir de un punto $P\,(p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$.	
Vector normal del plano	Se llama vector normal del plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ al vector $\vec{n}=(A,B,C)$ que es perpendicular al plano.	

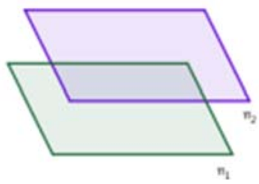
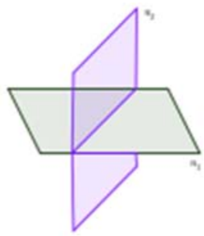
Posiciones relativas de dos planos

Planteado el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos

$$\begin{cases} \pi: Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi': A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Planos coincidentes	$\mathrm{rg}\,(M)=\mathrm{rg}\,(M^*)=1<\text{nº incógnitas}\Rightarrow S.C.I.$	
Planos paralelos	$\mathrm{rg}\,(M)=1\neq\mathrm{rg}\,(M^*)=2\Rightarrow S.I.$	
Planos secantes	$\mathrm{rg}\,(M)=\mathrm{rg}\,(M^*)=2<\text{nº incógnitas}\Rightarrow S.C.I.$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés

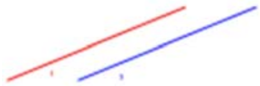
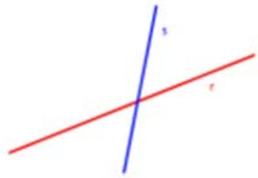
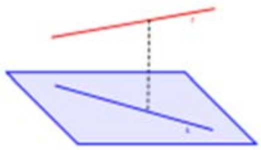
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Imágenes creadas por los autores

Posiciones relativas de dos rectas

Consideramos las rectas r y s, que vendrán determinadas por un punto y un vector director:

$$r:\begin{cases} P\left(p_1,p_2,p_3\right) \\ \vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} Q\left(q_1,q_2,q_3\right) \\ \vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right) \end{cases}$$

Rectas coincidentes	$\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=1$	
Rectas paralelas	$Rango\ \ (\vec{u},\vec{v})=1$ y $\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2$	
Rectas secantes	$Rango\ \ (\vec{u},\vec{v})=2$ y $\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2$	
Rectas que se cruzan	$\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=3$	

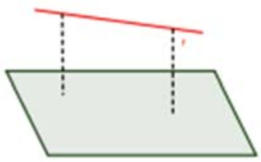
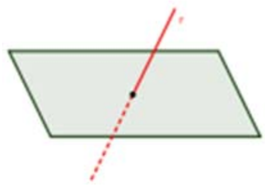
Posiciones relativas de una recta y un plano

Consideramos la recta r, dada por las ecuaciones implícitas, y un plano π, dado por su ecuación general:

$$r:\left.\begin{matrix} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix}\right\} \qquad \pi: A''x+B''y+C''z+D''=0$$

Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada del sistema formado por sus ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Recta contenida en el plano	$\text{rg}\left(M\right)=\text{rg}\left(M^*\right)=2 \Rightarrow S.C.I.$	
Recta y plano paralelos	$\text{rg}\left(M\right)=2\neq\text{rg}\left(M^*\right)=3 \Rightarrow S.I.$	
Recta y plano secantes	$\text{rg}\left(M\right)=\text{rg}\left(M^*\right)=3 \Rightarrow S.C.D.$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,-2)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(1,-2,3)$. Expresa dicha recta de todas las formas posibles.

   b) ¿Pertenece el punto $B\ (3,-5,4)$ a dicha recta? ¿Y el punto $C\ (-2,5,-7)$?

   c) Halla el valor de m y n para que el punto $D\ (m,-7,2n)$ pertenezca a dicha recta.

2. - Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por los puntos $A\ (0,-1,0)$ y $B\ (1,1,0)$. Hallar un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

3. - Dados los puntos $A\ (2,0,1)$ y $B\ (0,-2,3)$, se pide:

   a) Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por ambos puntos.

   b) Halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

4. - Expresa de todas las formas posibles las siguientes rectas:

   a) $r:\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$ b) $s:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ c) $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ d) $s:\begin{cases} x+2y=-2 \\ y-2z=1 \end{cases}$

5. - Expresa de todas las formas posibles la recta $r:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=z-2$ y además halla:

   a) Un punto de dicha recta tal que su segunda coordenada sea - 4.

   b) Un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 2.

6. - Expresa de todas las formas posibles la recta de ecuación $r\equiv\dfrac{2x-1}{5}=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{3z}{1}$ y halla un punto de la misma, cuya primera coordenada sea –4.

7. - Halla las ecuaciones de los ejes OX, OY, OZ y exprésala de todas las formas posibles.

8. - Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A\ (2,1,-1)$ y es paralela:

   a) Al eje OY.

   b) A la recta de ecuación $r:\begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$

   Exprésala de todas las formas posibles.

9. - Dada la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$ se pide:

   a) Expresa dicha recta de todas las formas posibles.

   b) Halla un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 4.

   c) Halla la ecuación de una recta s que sea paralela a la recta r y que pase por el punto $B\ (1,-2,0)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

10. - Expresa de todas las formas posibles la recta $r:\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y halla la ecuación de una recta s que pasando por el punto $B\ (1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

11. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano $\pi: 2x-y+3z-6=0$ y halla 3 puntos de ese plano que estén alineados.

12. - Halla la ecuación del plano (expresarlo de todas las formas posibles) en los siguientes casos:

a) Pasa por el punto $A\ (3,2,-1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$.

b) Pasa por los puntos $A\ (1,2,0)$ y $B\ (-1,1,2)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{u}=(1,-2,-1)$.

c) Pasa por los puntos $A\ (0,-2,1)$, $B\ (-2,0,-1)$ y $C\ (1,-2,0)$.

13. - Halla las ecuaciones de los planos OXY, OXZ, OYZ y exprésalos de todas las formas posibles.

14. - Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P\ (8,9,1)$ y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \qquad \text{y} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{array}\right\}$$

15. - Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A\ (-2,0,1)$ y contiene a la recta r de ecuación

$$r: \frac{x}{2}=y-1=2-z.$$

16. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{1}$.

17. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $r: -x+2=3y=1-z$.

18. - Halla la ecuación del plano que contiene al punto $M\ (-1,2,1)$ y a la recta

$$r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$$

19. - Calcula para qué valor de m los puntos $A\ (1,m,2)$, $B\ (2,3,m)$ y $C\ (-1,-9,8)$ están alineados. En el caso de que $m=0$, halla la ecuación del plano que contiene a dichos puntos. ¿Pertenece el punto $M\ (2,1,-2)$ a dicho plano?

20. - Halla el plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} y=1+x \\ z=-1-2x \end{cases}$ y es paralelo a $s: \frac{x+1}{3}=1-y=\frac{z}{3}$.

21. - Calcula m y n para que la recta $r: \frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$ esté contenida en el plano π, cuya ecuación es $\pi: mx+2y-4z-2n=0$.

22. - Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ y $s: x+2=-2y=z-1$, y halla la ecuación del plano que las contiene.

23. - Halla la posición relativa, según los valores de m y n, de las rectas:

$$r: \frac{x+m}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{n} \qquad s: \begin{cases} -x+y-z=-2 \\ 2x+4y-3z=5 \end{cases}$$

24. - Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

a) $\begin{cases} r: \dfrac{x-1}{2} = -y+2 = \dfrac{z}{2} \\ \pi: x+4y+z+2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \begin{cases} -x+3y-z+2=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases} \\ \pi: 2x+y-z-2=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: \begin{cases} -x+2y+z-4=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases} \\ \pi: 2x+y+z-2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} r: \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z}{-2} \\ \pi: x-4y-z-4=0 \end{cases}$

25. - Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+4y-6z=-4 \\ \pi_2: x-2y+3z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1: 2x-y+z=1 \\ \pi_2: -6x+3y-3z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \pi_1: x-y+3z=4 \\ \pi_2: -2x+3y-z=3 \\ \pi_3: 3x-4y+4z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \pi_1: 3x-y+z=-1 \\ \pi_2: x+y-5z=1 \\ \pi_3: 2x-3y-z=-1 \end{cases}$

26. - Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+2\lambda y-4z=2 \\ \pi_2: x-2y+\lambda z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1: -x+2y+z=2 \\ \pi_2: x+\lambda y-2z=1 \\ \pi_3: \lambda x-y-4z=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \pi_1: x-y+2z=4 \\ \pi_2: 2x+y+z=3 \\ \pi_3: 3x+\lambda y+6z=-8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \pi_1: x+\lambda y-z=2 \\ \pi_2: 2x-y+\lambda z=5 \\ \pi_3: x+10y-6z=1 \end{cases}$

27. - Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de las siguientes rectas y planos, calculando (cuando sea posible), el punto de intersección.

a) $\begin{cases} r: x+1=-y-2=\dfrac{z}{2} \\ \pi: x-3y+\lambda z+2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x+y-2z+4=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases} \\ \pi: x+4y+\lambda z-2=0 \end{cases}$

28. - Dadas las rectas $r: \dfrac{x}{2} = y-3 = \dfrac{z+3}{-1}$ y $s: x+1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

29. - Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: x=y=z$ y $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Halla la recta que corta a r y s y es paralela a la recta $t: (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,2,-1)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

30. - Dados los planos $\pi_1: 3x + 2y - z = 6$ y $\pi_2: -2x + y + 3z - 6 = 0$, halla la ecuación de una recta r que pasando por el punto $M\ (1, 0, -1)$ es paralela a los dos planos.

31. - Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{m}$, $s: x+1 = -y = z-2$, hallar:

a) El valor de m para que ambas rectas se corten.

b) Para ese valor de m, el plano π que contiene a r y s.

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto $M\ (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π.

32. - Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 3z + 4 = 0 \\ -2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 4x - my + 5z - n = 0$ calcula:

a) Valores de m y n para que la recta y el plano sean:

i) paralelos ii) perpendiculares iii) la recta esté contenida en el plano.

b) Para $m = -1$ y $n = 2$, el punto de intersección de la recta y el plano.

c) Punto de intersección de la recta r, con el plano OYZ.

33. - Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z+3}{-1}$ y $s: x+1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $M\ (-1, 1, 1)$ y es perpendicular a ambas rectas.

34. - Dadas las rectas $r: \begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación de la recta que pasa por $M\ (-1, -1, 0)$ y es perpendicular a ambas rectas.

35. - Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\ (1, 0, -1)$, $B\ (1, 1, 0)$y el tercer vértice es el punto de corte del plano OXZ con la recta $r: x = 2y + 2 = z - 1$.

36. - Dados los puntos $A\ (-1, 2, 0)$, $B\ (-3, 3, -1)$ y $C\ (1, a, 1)$, se pide:

a) Calcula el valor de a para que los tres puntos estén alineados.

b) Para $a = -1$, calcula el perímetro del triángulo que tenga de vértices dichos puntos, así como su área y el valor de la altura correspondiente al vértice A.

c) Halla la ecuación de una mediana.

37. - Los puntos $P\ (0, 1, 0)$ y $Q\ (-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercer vértice S pertenece a la recta $r: \{x = 4, z = 1\}$. Además, la recta que contiene a los puntos P y S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

38. - Los puntos $A\ (0, -2, 0)$ y $B\ (-1, 0, 1)$ son dos vértices de un triángulo isósceles.

a) Obtén las coordenadas del otro vértice C, sabiendo que pertenece a la recta $r: \{y = -5, z = 0\}$

b) Halla el valor del ángulo desigual.

AUTOEVALUACIÓN

1. Una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 1, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$ es:

a) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t \cdot (0, 1, 2)$; b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$; c) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$; d) $2x - 3y + 1 = 0$

2. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, 1, 2)$ y $B(2, 4, 7)$ es:

a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + t \cdot (2, 4, 7)$; b) $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$; c) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-7}{5}$; d) $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 + 9t \end{array}\right\}$

3. El vector director de la recta $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ es:

a) $(1, -1, 0)$; b) $(1, 0, 1)$; c) $(-1, 1, 1)$; d) $(1, 1, 1)$

4. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 0)$ es:

a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(2, 4, 7) + \mu(0, 1, 0)$; b) $3x - z = 11$;

c) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, 2, 3)$

5. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y contiene a la recta $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(0, 0, 1)$ es:

a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(2, 0, 1) + \mu(0, 0, 1)$; b) $x = 3$; c) $y = 2$; d) $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{array}\right\}$

6. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y de vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es:

a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1)$; b) $z = 2$; c) $y = 1$; d) $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \mu \end{array}\right\}$

7. Una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $C(0, 0, 7)$ es:

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1$; b) $x - z = 3$; c) $x + z = 7$; d) $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 7\mu \end{array}\right\}$

8. Los planos $x - z = 3$ y $x + z = 7$ son:

a) coincidentes; b) paralelos; c) secantes; d) ortogonales

9. Las rectas $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ y $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 + 10t \end{array}\right\}$ son:

a) coincidentes; b) paralelas; c) secantes; d) se cruzan

10. El plano $x - z = 3$ y la recta $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ son:

a) la recta está contenida en el plano; b) paralelos; c) secantes; d) ortogonales

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés

Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Imágenes creadas por los autores

Apéndice: Problemas de rectas y planos en las P.A.A.U.

(1) Los puntos $P\ (1,1,0)$ y $Q\ (0,2,1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r\colon \{y=0, z=1\}$.

a) Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento $\overline{PQ}$ para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

(2) Los puntos $P\ (1,-1,1)$ y $Q\ (3,-3,3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x+y=0$.

a) Determina los vértices restantes.

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices calculados.

c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

(3) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A\left(-1{,}1{,}0\right)$, $B\left(0{,}1{,}1\right)$, $C\ \left(3{,}0{,}0\right)$ y $D\left(2{,}0{,}-1\right)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'\left(-3{,}1{,}0\right)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcula:

a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras inferior y superior.

b) Los vértices de la cara superior.

c) El volumen del paralelepípedo.

(4) Los puntos $A\left(1{,}1{,}0\right)$, $B\left(1{,}1{,}1\right)$, $C\ \left(2{,}3{,}0\right)$ y D forman un paralelogramo. Calcula:

a) Las coordenadas del vértice D opuesto a B.

b) El área del paralelogramo.

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(5) Sea el plano $\pi:\{x=2+t, y=s, z=1-2s+2t\}$ y la recta $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z$.

a) Encuentra la posición relativa de los mismos.

b) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P\left(-1{,}0{,}2\right)$, es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s.

(6) Dados los puntos $A\left(1{,}1{,}0\right)$ y $B\ \left(0{,}0{,}2\right)$ y la recta $r:\{x=1, y=1+\lambda, z=1+\lambda\}$, halla:

a) Un punto $C\in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en C.

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r.

(7) Considere las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=z$ y $s:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z$.

a) Da su posición relativa.

b) Obtén, si es posible, un plano paralelo a s que contenga a r.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

(8) Dado el punto $A\,(1,1,1)$ y la recta $r:\left.\begin{matrix} x-y=-1 \\ y-z=1 \end{matrix}\right\}$, calcula:

a) Un vector $\vec{u}$ director de la recta r.

b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A.

c) La recta s que pasa por el punto A, está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r.

(9) Sean el plano $\pi: a\,x+2y-4z=b$ y la recta $r:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$.

a) Con $a=1$, estudia la posición relativa de la recta y el plano.

b) Siguiendo con $a=1$, calcula b para que el punto $(3,1,-3)$ pertenezca a la recta y al plano.

c) Determina los valore de a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

(10) Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes OX, OY y OZ tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 metros respectivamente.

a) Halla la ecuación del plano π.

b) Halla la ecuación de la recta r que contiene a los puntos $A\,(2,0,3)$ y $B\,(0,6,a)$ y estudie la posición relativa de π y r según los valores de a.

c) Para el caso $a=2$, halla el punto donde se cortan π y r.

(11) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $P\,(1,2,3)$ y $Q\,(1,-1,3)$, y el plano π que contiene a los puntos $A\,(1,0,1)$, $B\,(2,-1,3)$ y $C\,(4,1,0)$. Calcula:

a) Las ecuaciones implícitas de r y π.

b) La posición relativa de r y π.

(12) Se considera la recta $r:\left.\begin{matrix} 2x-y-5=0 \\ x+z-2=0 \end{matrix}\right\}$.

a) Determina el plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $(1,0,1)$.

(13) Se consideran las rectas $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=z+1$ y $s:\{x=1+t\,,\,y=m+3t\,,\,z=-1+3t\}$.

a) Calcule m para que las rectas se corten en un punto.

b) Para ese m halle el punto de corte.

(14) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P\,(1,1,2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r:\left.\begin{matrix} x=-t \\ y=3t \\ z=t \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad s:\left.\begin{matrix} 2x-2y=4 \\ y-z=-3 \end{matrix}\right\}$$

(15) Encuentra una ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo al plano determinado por el punto $P\,(1,-1,0)$ y la recta que pasa por el punto $Q\,(2,2,2)$ y tiene vector director $\vec{v}=(1,2,3)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

(16) Considera los planos $\pi_1 : 2x - y + z = 0$ y $\pi_2 : z - 3 = 0$.

a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Encuentra, si es posible, una recta paralela a π_1 y a π_2 que pase por el punto $(2,2,-1)$.

(17) Halla los planos que pasando por $A\,(0,2,0)$ y $B\,(0,0,2)$, corten al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo de vértices A, B y C sea 6.

(18) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $x + y - 2z - 1 = 0$ con los ejes coordenados.

(19) Dado el plano de ecuación $\pi : x - 2y + 2z + 7 = 0$, los puntos $A\,(0,1,2)$, $C\,(-1, m, 2)$ y sea B el pie de la perpendicular trazada desde el punto A al plano.

a) Determina el valor de m para que el triángulo ABC sea rectángulo en B y calcula su área.

b) Halla los dos ángulos restantes de dicho triángulo.

(20) Dado el punto $A\,(1,-1,1)$ y los planos $\pi_1 : 2x + y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 : x - 2y + z - 2 = 0$, halla:

a) La ecuación de la recta que pasa por el punto A y es paralela a los planos π_1 y π_2.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde el plano π_2 corta a los ejes.

c) El volumen del tetraedro de vértice el punto A y de base el triángulo del apartado anterior.

(21) Halla el volumen del tetraedro que tiene como vértices el punto $A\,(1,1,1)$ y los puntos en que el plano $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados.

(22) Dada la recta $r : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = z - 1$ y el plano $\pi : x + ay - z + 2 = 0$, hallar el valor de a para que:

a) La recta sea paralela al plano.

b) La recta corte al plano.

c) La recta sea perpendicular al plano.

d) El volumen del tetraedro que tiene como vértices el origen de coordenadas y los puntos donde el plano corta a los ejes valga $\frac{1}{2}$ u^3.

(23) Dados los planos

$$\pi_1 : 2x + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + z + 2 = 0 \qquad \pi_3 : x + 3y + 2z - 3 = 0$$

se pide:

a) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) Calcula el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

(24) Dados el plano $\pi_1 : 2x - y = 2$, y la recta $r : \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{array}\right\}$

a) Estudia la posición relativa de r y π.

b) Determina el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) Determina la recta que pasa por $A\,(-2,1,0)$, corta a r, y es paralela a π.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

(25) Sean las rectas:

$$r: x-2=\frac{y-1}{k}=z+1 \qquad \text{y} \qquad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$$

a) Halla k para que r y s sean coplanarias.

b) Para el valor anterior de k, halla la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) Para el valor anterior de k, halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

(26) Halla una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$r:\{x=1+t\,,\, y=-1+2t\,,\, z=t\}$$

y es perpendicular al plano π:

$$\pi: 2x+y-z=2$$

(27) Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1: x+y+az=2 \qquad \pi_2: x+ay+z=-1 \qquad \pi_3: ax+y+z=3$$

Se pide:

a) Calcula los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) Para los valores de a calculados, halla unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

(28) Dados el plano $\pi: x+3y-z=1$ y la recta $s:\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$

a) Halla la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

(29) Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi: x-2y-z-7=0$, determina el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

(30) Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1} \qquad \text{y} \qquad s:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x\quad +z=1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determina la ecuación general del plano que las contiene.

(31) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$s:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo