Matemáticas II.
2º Bachillerato
Capítulo 2: Determinantes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Índice

Resumen

En una de esas peculiaridades que de vez en cuando se dan en la ciencia, nos encontramos con el caso de las matrices y los determinantes. Hay evidencias de que ambos se conocían entre dos y cuatro siglos antes de nuestra era, cuando para resolver ciertos problemas se organizaba la información en forma de tablas y se explicaban las reglas aritméticas para hallar la solución. Sin embargo, cuando fueron *redescubiertos* para la Matemática moderna, se desarrollaron antes los determinantes que las matrices.

Fue *Carl Friedrich Gauss* (el príncipe de los matemáticos) el primero que usó el término “determinante” en sus *‘Disquisiciones Aritméticas’* de 1801, pero con un significado diferente al nuestro. La idea actual de determinante se debe a *Augustin Louis Cauchy*, mientras que el término “matriz” lo acuñó 50 años después *James Joseph Sylvester* dando a entender que una matriz es “la madre de los determinantes”.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1.1. Definición

Dada una matriz cuadrada de orden n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \dots.. & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots.. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante de la matriz A** y se representa por $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \dots.. & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots.. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a **un número** real que es igual a:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es el número real que se obtiene sumando todos los n factorial ($n!$) productos posibles de n elementos (orden de la matriz) de la matriz, de forma que en cada producto haya un elemento de cada *fila* y uno de cada columna, precedido cada producto con el signo + ó – según que la permutación de los subíndices que indican la columna tenga un número de inversiones, respecto del orden natural, que sea par o impar.

Esta definición sólo es práctica para resolver los determinantes de orden 2 y 3. Los determinantes de orden superior se resuelven con otros métodos, ya que aplicando la definición sería muy laborioso.

1.2. Determinantes de orden dos y tres. Regla de Sarrus

1.2.1. Determinantes de orden dos

Dada una matriz de orden 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se llama determinante de la matriz A,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

al número:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Es decir, se multiplican los elementos de la diagonal principal y se le resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}\to |A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-5\cdot 1=8-5=3$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\to |B|=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot 3-(-2)\cdot(-4)=-3-8=-11$$

1.2.2. Determinantes de orden tres. Regla de Sarrus

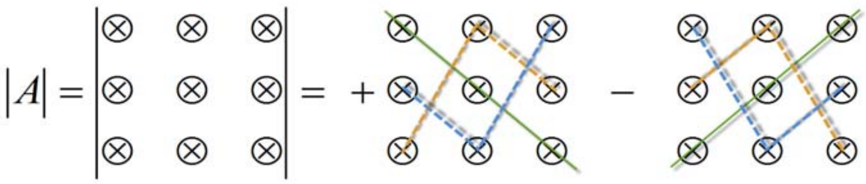
Dada una matriz cuadrada de orden 3,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

se llama determinante de la matriz A al número:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Este desarrollo procedente de la definición de determinante, puede recordarse fácilmente con este diagrama, conocido como la **regla de Sarrus:**



Ejemplo

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}=1\cdot 5\ \cdot(-2)+2\cdot 1\cdot 3+(-1)\cdot 6\cdot 3-3\cdot 5\cdot 3-1\cdot 6\cdot 1-2\,(-1)(-2)=-10+6-18-45-6-4=-77$$

Actividades propuestas

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 5\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}4 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1ª) *El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta.*

$$|A| = |A^t|$$

Demostración

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = |A|$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{21}a_{33}a_{12}$$

reorganizando términos:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} = |A|$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 5 - 4\cdot 3\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot 1\cdot 2 = 36 + 4 + 30 - 60 - 18 - 4 = -12$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 5 - 4\cdot 3\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot 1\cdot 2 = 36 + 4 + 30 - 60 - 18 - 4 = -12$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, a partir de ahora todo lo que se diga para la filas de un determinante será igualmente válido para las columnas, y viceversa, pudiendo hablar simplemente de **líneas de un determinante**.

2ª) *Si los elementos de una fila o de una columna se multiplican todos por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.*

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{21} \\ k\cdot a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot a_{11}\cdot a_{22} - k\cdot a_{21}\cdot a_{12} = k\cdot(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}) = k\cdot|A|$$

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}ka_{13} + a_{12}ka_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}ka_{11} - ka_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= k\cdot(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}) = k\cdot|A|$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -12 \qquad \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 3 & 4 \\ 2\cdot 1 & 3 & 2 \\ 2\cdot 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 10 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24 = 2\cdot(-12) = 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Esta propiedad tiene dos implicaciones:

1. Nos permite sacar fuera los factores comunes a todos los elementos de una línea.
2. $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$, siendo n la dimensión de la matriz

Demostración

Para orden 2:

$$|k\cdot A| = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{21} \\ k\cdot a_{12} & k\cdot a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{21} \\ k\cdot a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k^2\cdot |A|$$

Para orden 3:

$$|k\cdot A| = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k^3\cdot |A|$$

3ª) *Si los elementos de una línea se pueden descomponer en suma de dos o más sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes (o más) que tienen todas las restantes líneas iguales y en dicha línea tienen los primeros, segundos, etc. sumandos.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})\cdot a_{22} - a_{12}\cdot(a_{21}+b_{21}) = a_{11}\cdot a_{22} + b_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} - a_{12}\cdot b_{21}$$

reorganizando términos:

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} + b_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot b_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} (a_{11}+b_{11})a_{22}a_{33} + (a_{21}+b_{21})a_{13}a_{32} + (a_{31}+b_{31})a_{12}a_{23} \\ \quad -(a_{31}+b_{31})a_{22}a_{13} - (a_{11}+b_{11})a_{32}a_{23} - (a_{21}+b_{21})a_{12}a_{33} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \\ \quad + b_{11}a_{22}a_{33} + b_{21}a_{13}a_{32} + b_{31}a_{12}a_{23} - b_{31}a_{22}a_{13} - b_{11}a_{32}a_{23} - b_{21}a_{12}a_{33} \end{cases}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Ejemplo

- Sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 35+108-21-63+9-140=-72$$

Descompongamos la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+5 & 3 \\ 4 & 3+4 & -1 \\ 3 & 4+5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15+48-6-27-40+4=-6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 20+60-15-36-100+5=-66$$

4ª) *Si en un determinante los elemento de una línea son nulos, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 \cdot a_{31} - 0 \cdot a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32} \cdot 0 - 0 \cdot a_{21}a_{33} = 0$$

5ª) *Si en una matriz se permutan dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -|A|$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{33}a_{22} \\ &= -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{13} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= -|A| \end{aligned}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

Actividades propuestas

3. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces **dos** permutaciones de filas.

4. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

5. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

6. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

6ª) ***Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = a \cdot b - a \cdot b = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot a_{33} + a \cdot c \cdot a_{32} + b \cdot c \cdot a_{31} - b \cdot c \cdot a_{31} - a \cdot b \cdot a_{33} - a \cdot c \cdot a_{32} = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 = 20 + 36 - 3 - 36 - 20 + 3 = 0$$

Actividad propuesta

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

8. Comprueba en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Como consecuencia de las segunda, tercera y sexta propiedades tenemos las siguientes:

7ª) *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & k\cdot a \\ a_{21} & b & k\cdot b \\ a_{31} & c & k\cdot c \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a & k\cdot a \\ b & k\cdot b \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$$ (como vimos en la propiedad anterior)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k\cdot a & k\cdot b & k\cdot c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 = 0$$

8ª) *Si los elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11}+s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21}+s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31}+s\cdot a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

Para determinantes de orden dos esta propiedad se reduce a la anterior.

Para determinantes de orden tres:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11}+s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21}+s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31}+s\cdot a_{32} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Prop. 3}]{} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & s\cdot a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Prop. 2}]{} r\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + s\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Prop. 6}]{} r\cdot 0 + s\cdot 0 = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4+3 \\ 3 & 1 & 3+1 \\ -2 & 7 & -2+7 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_1 + C_2]{} 0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

9ª) ***Si a los elementos de una línea se le suma una combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante no varía.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+(r\cdot a_{11}+s\cdot a_{12}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+(r\cdot a_{21}+s\cdot a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+(r\cdot a_{31}+s\cdot a_{32}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

Para determinantes de orden dos sólo hay una posible combinación:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+r\cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+r\cdot a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Prop. 2}]{} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r\cdot a_{12} & a_{12} \\ r\cdot a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Prop. 7}]{} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Actividades propuestas

9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el del determinante de partida.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+C_1+2C_2]{} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

10ª) ***El*** **determinante** ***del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:***

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

Demostración

Para determinantes de orden dos:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

Aplicamos dos veces la propiedad (3):

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

Extraemos todos los factores comunes que se puede (propiedad 2):

$$|A\cdot B| = b_{11}b_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Y observamos que el primer y el último determinantes son nulos (propiedad 6):

$$|A\cdot B| = b_{11}b_{12}\cdot 0 + b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix} + b_{21}b_{22}\cdot 0$$

Vemos que en el segundo determinante hay una permutación de columnas, luego:

$$|A\cdot B| = b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} - b_{12}b_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22}\end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

Actividades propuestas

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres:

a) $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$, pero no se verifique que $|A\cdot B| = |B\cdot A|$.

13. Dadas dos matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no:

a) $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + B^2$

b) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2\cdot A\cdot B$

c) $(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

d) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2\cdot A\cdot B$

e) $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

f) $|(A+B)^2| = |A|^2 + |B|^2$

g) $|(A+B)^2| = |A|^2 + |B|^2 + 2\cdot|A|\cdot|B|$

h) $|(A-B)^2| = |A|^2 - |B|^2$

i) $|(A-B)^2| = |A|^2 + |B|^2 - 2\cdot|A|\cdot|B|$

j) $|(A+B)\cdot(A-B)| = |A|^2 - |B|^2$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

Hemos calculado determinantes de orden 2 y 3 usando la definición de determinante (regla de Sarrus). Intentar aplicar la definición a determinantes de orden mayor que 3 es muy engorroso, por lo que los matemáticos buscaron otro método.

3.1. Definiciones

Comenzamos por definir algunos conceptos que vamos a necesitar.

3.1.1. Menor complementario

Dada una matriz cuadrada A, de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij}, y se representa por α_{ij}, al determinante de orden $(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3.1.2. Adjunto de un elemento

Dada una matriz cuadrada A, de orden n, se llama **adjunto del elemento** a_{ij} y se representa por A_{ij}, al menor complementario α_{ij}, precedido del signo + o – según que la suma de los subíndices $(i+j)$ sea par o impar:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Así, el adjunto del elemento a_{12} será: $A_{12} = -\alpha_{12}$ y el adjunto del elemento a_{33} será: $A_{33} = +\alpha_{33}$.

3.2. Cálculo de determinantes por adjuntos

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{ij}\cdot A_{ij} + \ldots a_{in}\cdot A_{in} & \text{(por filas)} \\ \text{o} \\ a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{ij}\cdot A_{ij} + \ldots a_{nj}\cdot A_{nj} & \text{(por columnas)} \end{cases}$$

Así, el determinante de una matriz A, de orden 3, se podría calcular de seis formas diferentes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} & \text{(por la primera fila)} \\ a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} & \text{(por la segunda fila)} \\ a_{31}\cdot A_{31} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{33}\cdot A_{33} & \text{(por la tercera fila)} \end{cases}$$

o

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} & \text{(por la primera columna)} \\ a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32} & \text{(por la segunda columna)} \\ a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33} & \text{(por la tercera columna)} \end{cases}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

El problema de asignar el signo más o menos a cada adjunto se simplifica si se tiene en cuenta que éstos van alternándose y que el correspondiente al elemento a_{11} es el signo +, sin importar el camino que se siga para llegar al elemento correspondiente.

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \qquad \cdots$$

Ejemplo

- Vamos a desarrollar un determinante de orden 3 mediante los adjuntos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante por los adjuntos de la segunda fila (o de la segunda columna) nos encontramos con un producto en que uno de los factores es nulo, lo que nos simplifica el cálculo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Por tanto, cuando se combina este método para calcular determinantes con las propiedades de los mismos, y *trabajamos* antes para conseguir el mayor número posible de ceros en una línea, podremos calcular de forma muy sencilla dicho determinante por los adjuntos de dicha línea.

Ejemplo

- Calcula este determinante mediante adjuntos, *haciendo ceros* para simplificar las filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+2F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \underbrace{0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}_{0} = -5-22 = -27$$

Mediante este método se ha pasado de calcular un determinante de orden 3 a calcular un determinante de orden 2.

Aunque el ejemplo se ha hecho con un determinante de orden 3, vale para cualquier orden y nos abre la puerta a calcular determinantes de orden superior.

Actividad propuesta

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

3.3. Determinante de una matriz triangular

Como acabas de comprobar en la actividad anterior:

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Demostración

Desarrollamos el determinante por los adjuntos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + \ldots + 0 \cdot A_{n1} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Repetimos desarrollando por los adjuntos de la *nueva* primera columna:

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + \ldots + 0 \cdot A_{n2}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es evidente que este proceso se repetirá hasta *agotar* las columnas, por tanto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

El proceso que hemos seguido en esta demostración es una versión muy simplificada de un método de demostración llamado **método de inducción**.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$$

Actividad propuesta

15. Halla el valor de a que verifica:

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

3.4. Matriz adjunta

Se llama **matriz adjunta** de la matriz A a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A, y se representa por $\mathrm{Adj}(A)$.

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \to \mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +\alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & +\alpha_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +4 & -1 \\ -5 & +2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \to \mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +\alpha_{11} & -\alpha_{12} & +\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & +\alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ +\alpha_{31} & -\alpha_{32} & +\alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & +1 & -21 \\ +22 & -11 & 0 \\ -13 & -4 & +7 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina:

a) $|A|$ y $|B|$

b) $[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $[\mathrm{Adj}(B)]^t$

c) $A\cdot[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $B\cdot[\mathrm{Adj}(B)]^t$

¿Qué observas?

17. a) Calcula la matriz adjunta de:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Halla $|C|$, $[\mathrm{Adj}(C)]^t$ y efectúa el producto $C\cdot[\mathrm{Adj}(C)]^t$.

c) ¿Qué observas?

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

4. MATRIZ INVERSA

En el tema anterior (matrices) se ha visto el concepto de la matriz inversa de una matriz cuadrada y se han calculado inversas de matrices de orden 2 y 3 mediante sistemas de ecuaciones o con el método de Gauss–Jordan. En este capítulo veremos una tercera forma de calcular matrices inversas.

Recordemos que una matriz cuadrada A se llama **regular** (o **inversible**) si existe otra matriz cuadrada, llamada inversa y que se representa por A^{-1}, que multiplicada por la matriz A nos da la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Vamos a deducir cómo es la matriz inversa. Supongamos una matriz cuadrada A de orden n, aunque para facilitar los cálculos trabajaremos con una matriz de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Hallamos la traspuesta de la matriz adjunta:

$$[\mathrm{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz A por la traspuesta de su adjunta $[\mathrm{Adj}(A)]^t$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I$$

Es decir, al multiplicar nuestra matriz A por la traspuesta de su adjunta nos ha aparecido la matriz unidad:

$$A \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t = |A| \cdot I \rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t \right) = I$$

De donde se deduce que, si el determinante de A **no es nulo**:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t$$

Como de toda matriz cuadrada se puede hallar su adjunta y luego la traspuesta de ésta, lo único que puede hacer que no exista la inversa es que no exista el factor $\frac{1}{|A|}$, que no existe cuando $|A| = 0$. Luego:

> ***"La condición necesaria y suficiente para una matriz* cuadrada *tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero"***

Por otro lado, como $A \cdot A^{-1} = I$ y por la novena propiedad: $|A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Actividades resueltas

- *Halla la matriz inversa de*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

En primer lugar comprobamos el valor de su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

Hallamos la matriz adjunta y la traspuesta de ésta:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow [\mathrm{Adj}(A)]^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

- *Halla la matriz inversa de*

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

En primer lugar comprobamos el valor de su determinante:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}=-10-18+6-45-4-6=-77\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow \exists B^{-1}$$

Una vez comprobada la existencia de matriz inversa, hallamos la adjunta de B.

$$\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & +1 & -21\\ +22 & -11 & 0\\ -13 & -4 & +7\end{pmatrix}$$

la traspuesta de esta matriz:

$$[\mathrm{Adj}(B)]^t=\begin{pmatrix}-16 & +22 & -13\\ +1 & -11 & -4\\ -21 & 0 & +7\end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot[\mathrm{Adj}(B)]^t=\frac{1}{-77}\cdot\begin{pmatrix}-16 & +22 & -13\\ +1 & -11 & -4\\ -21 & 0 & +7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/77 & -22/77 & 13/77\\ -1/77 & 11/77 & 4/77\\ 21/77 & 0 & -7/77\end{pmatrix}$$

Actividad propuesta

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A\cdot A^{-1}=I$ y $B\cdot B^{-1}=I$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

5. RANGO DE UNA MATRIZ

Si recordamos que una matriz es una tabla de información, y que la cantidad de información que almacenan algunas tablas es monstruosa (basta con imaginar la base de datos de una empresa), es evidente la necesidad de encontrar una manera de eliminar información redundante y quedarse con una cantidad mínima con la que poder recuperar los datos eliminados.

Ese es el concepto cotidiano de **rango**, el mínimo número de elementos independientes de una tabla de información, es decir, el menor número de líneas con las que podemos obtener todas las demás. Así, basta guardar una cantidad pequeña de líneas junto con las operaciones que generan el resto.

5.1. Menor de una matriz

Dada una matriz de dimensión $m \times n$, se llama *menor de orden* k al determinante formado por la intersección de k filas y k columnas de la matriz.

Así, por ejemplo, en la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

- Los determinantes $|a_{11}|$ $|a_{23}|$ y $|a_{14}|$ serán algunos de los menores de orden 1.
- Los determinantes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ serán algunos de los menores de orden 2.
- Los determinantes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ son menores de orden 3.

En este caso la matriz no tiene menores de orden superior a 3, pues sólo tiene tres filas.

5.2. Rango de una matriz

Definimos en su momento el rango de una matriz como el número de filas o columnas linealmente independientes, y lo calculamos usando el método de Gauss. Vamos a ver otra forma de definir y calcular el rango de una matriz.

Se llama rango de una matriz (o característica de una matriz) al orden del menor de mayor orden no nulo.

Actividades resueltas

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Como la matriz no es la matriz nula, basta con escoger un elemento no nulo para comprobar que el rango de la matriz es por lo menos 1. Tomamos el elemento a_{11} y trabajamos a partir del él (podríamos haber cogido cualquier otro): $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 1$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Trabajamos ahora a partir del menor de orden 1 que hemos tomado, para construir los menores de órdenes superiores. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

La matriz no puede tener rango mayor que 2 pues sólo tiene dos columnas.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Como la matriz no es la matriz nula, ya sabemos que su rango será mayor o igual que 1 y por lo tanto empezamos a trabajar con menores de orden 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) \geq 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

El rango no puede ser mayor que 3.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 que sea distinto de cero y trabajamos con él para formar los menores de orden 3 y superiores. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{rg}(C) \geq 2$

Formamos un menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Como este menor de orden 3 es nulo, formamos otro menor de orden 3, pero siempre a partir del mismo menor de orden 2, hasta que encontremos un menor de orden 3 que sea distinto de cero, si lo hay: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0$

Como todos los menores de orden 3 que se pueden formar son nulos, entonces el rango de la matriz es 2.

Es interesante conocer esta propiedad:

"Si los todos los menores de un determinado orden son nulos, también lo son los de órdenes superiores".

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

CURIOSIDADES. REVISTA

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Su primera especialización fue la teoría de invariantes algebraicos, que le permitió demostrar dos teoremas esenciales en la teoría de la relatividad. Su verdadera aportación a la investigación matemática fue poner las bases del Álgebra Moderna. Sus investigaciones en álgebra no conmutativa destacan, sobre todo, por el carácter unificado y general que dio a esta teoría. Sus publicaciones serían suficientes para valorar su decisiva contribución a las matemáticas, pero hay que considerar, además, que nunca le interesó mucho publicar y siempre permitió a sus colegas y a sus estudiantes desarrollar resultados interesantes a partir de las sugerencias que ella les hacía.

El calificativo ***Noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en Álgebra.

El Senado de la Universidad de Erlangen había declarado en 1898, que la admisión de mujeres estudiantes "*destrozaría todo orden académico*". Sin embargo se les autorizaba a asistir a clase con un permiso especial que no les daba derecho a examinarse. En 1904 Noether regresó a Erlangen donde habían cambiado los estatutos de la Universidad y pudo proseguir sus estudios de doctorado.

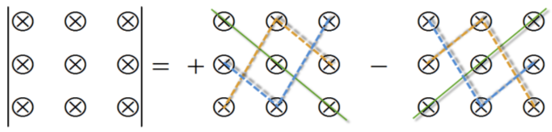
En 1915 fue invitada por David Hilbert (1862-1943) y Félix Klein (1849-1925) a trabajar con ellos en Göttingen. Aunque Göttingen había sido la primera universidad en conceder un doctorado a una mujer, Sonia Kovalevskaya, no por ello tenía la disposición de contratar como enseñante a una mujer. Emmy no fue una excepción y, a pesar de su valía, fracasó en su primer intento de presentarse a oposiciones como docente universitario. El reglamento vigente indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres. Hilbert quiso corregir esa injusticia pero sus esfuerzos no tuvieron éxito, pues ciertos miembros de la facultad, no matemáticos, se opusieron.

Hilbert y Emmy encontraron un sistema para que ella pudiera trabajar como docente: las clases se anunciaban bajo el nombre de Hilbert y ella figuraba como ayudante. Así pudo probar su competencia y ser mejor conocida.

Se cuenta, como anécdota, que Hilbert dijo en un Consejo de la Universidad de Göttingen, *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños"*.

A pesar del reconocimiento obtenido por este éxito, los cambios políticos y la llegada de Hitler al poder le obligaron a reorientar su carrera. Ser una intelectual, pacifista, judía y liberal le obligó a abandonar Alemania.

RESUMEN

Definición de determinante	**El determinante** de una matriz cuadrada A **es el número real** que se obtiene mediante $\det(A) = \lvert A \rvert = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$	
Determinante de orden dos	$\det(A) = \lvert A \rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7$
Determinante de orden tres. Regla de Sarrus		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 18 - 45 - 6 - 4 = -21$
Menor complementario	Menor complementario del elemento a_{ij}, α_{ij}, es el determinante de orden $n - 1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
Adjunto de un elemento	Adjunto del elemento a_{ij}, A_{ij}, es el menor complementario α_{ij}, precedido de + o – según la suma de los subíndices $i + j$ sea par o impar. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ A_{33} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{cases}$
Matriz adjunta	Se llama matriz adjunta de la matriz A a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A, y se representa por $\mathrm{Adj}(A)$.	$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$
Desarrollo por adjuntos	El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.	$\lvert A_3 \rvert = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \end{cases}$
Matriz inversa	**Si el determinante de A no es nulo:** $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A \rvert} \cdot [Adj(A)]^t$	
Menor de una matriz	Menor de orden k es el determinante formado por la intersección de k filas y k columnas de la matriz.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$
Rango de una matriz	Rango (o característica) de una matriz es el orden del menor de mayor orden no nulo	El rango de la matriz anterior es dos, porque $M_2 = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

son múltiplos de 15.

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \dot{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

6.- Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

calcula, sin desarrollar, el valor de

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$$

7.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$$

8.- ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale -5 y que el determinante de la matriz $3\cdot A^t$ vale -1215?

9.- Justifica, sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x\cdot y\cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.- Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

11.- Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$.

12.- Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3).$$

13.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

14.- Sea una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3x3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$. Comprueba si es verdadero o falso

$\lvert -3A \rvert = 9$	$\dfrac{\lvert A \cdot A^t \rvert}{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3x3}$	$4\lvert A \rvert - 7\lvert A^t \rvert = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6x6}$
$\lvert 4A - A^t \rvert = -3^2$	$\lvert A^{-1} \rvert = -3^{-1}$	$\dfrac{\lvert 3A - A^t \rvert}{\lvert 3A^t + A \rvert} = (-2)^{-3}$	$\frac{1}{9}\lvert A^{-1} \rvert - 6\lvert A^t \rvert^2 = 1$	$\lvert 3^{-2} A^t \rvert = -\dfrac{1}{3^7}$

Si son falsas, indica la respuesta correcta.

15.- Sean las matrices A y $B \in \mathcal{M}_{3x3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Con estos datos calcula de forma razonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A| \cdot |B|^{-1}$; $|3B^{-1} \cdot A|$; $|3A \cdot B^t|$; $|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$.

16. - Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz $-\dfrac{3A}{2}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

c) El determinante de la matriz $\dfrac{A^2}{6}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3$.

17.- Para los determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Halla los menores complementarios de los elementos α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{12}, cuando existan.

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

18.- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

19.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la 3ª fila y de la 2ª columna.

20.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide calcular el valor de los siguientes determinantes: $|A \cdot B|$; $|C|$; $|A^t \cdot B^t|$; $|C \cdot B \cdot A|$; $|C|^2$

21. - Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3x$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & x & -3 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = 5x - 3$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

23.- Resuelve la siguiente ecuación $|A - x \cdot I| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

24.- Halla los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1- & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

25.- Aplicando propiedades, calcular el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2.

b) Desarrollando por los elementos de una línea.

26. - Comprobar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 137 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$$

27.- Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

28.- Calcula los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

29. - Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x+6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

30.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

31.- Halla las matrices inversas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$

32.- Siendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Es cierto que $\det(A\cdot B) = \det(B\cdot A)$?

b) Calcula, si es posible, la inversa de $A\cdot B$.

33. - Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

34.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

averigua para qué valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para $\lambda = -3$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

35.- Calcula la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

36.- Dada la matriz

$$M=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.

b) Descompón la matriz M en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica.

c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean todos no nulos y que el valor de uno de ellos sea nulo.

d) Comprueba si: $|M|=|P|+|Q|$ y $|M|=|P|\cdot|Q|$

e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13}x^2-|M|x+4A_{32}=2$

37.- ¿Para qué valores de a la matriz

$$\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$$

no tiene inversa? Halla la inversa para $a=2$.

38.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A?

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\\ a & -2 & 5\end{pmatrix}$$

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A\cdot A^t$ y de $A^t\cdot A$.

39.- Sea C la matriz

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & m\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?

b) Calcula la inversa de C para $m=2$.

40.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & 3\\ 4 & 1 & -x\end{pmatrix}$$

donde x es un número real, halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.

b) La inversa de A para $x=2$.

c) Con $x=5$, el valor $b\in\mathbb{R}$ para que la matriz $b\cdot A$ tenga determinante 1.

41.- Dadas las matrices A, B y $C \in \mathcal{M}_{3x3}$, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $X \cdot A = B$ b) $B \cdot X - 2B = 3X$ c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

42.- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

43.- a) Halla, si existe, la matriz inversa de M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

44.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué valores de a hacen singular la matriz C?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?

c) Calcula B para el valor $a = 1$.

45.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

46.- Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

47. - Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

48.- Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

49. - Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$$A=\begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

50.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $\det(A)=0$

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

51. - Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de A según los valores de m.

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A\cdot X=B$?

c) Calcula X para $m=0$.

52.- Resuelve las ecuaciones:

a) $A\cdot X=B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B\cdot X=C$, siendo

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A\cdot X=B+2C$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

d) $A\cdot X+B=2C$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- El valor del determinante de la matriz A es:

a) 4 b) 0 c) –4 d) 8

2.- El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es:

a) 0 b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) –4 d) $-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

3.- El valor del determinante de la matriz B es:

a) 4 b) 0 c) 8 d) –8

4.- El rango de B es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5.- La matriz inversa de A es:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz inversa de la matriz F es:

$a)\, F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\, F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\, F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $d)\, F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.- El rango de la matriz C es: a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

8.- La matriz de determinante nulo es: a) C b) D c) E d) F

9.- El determinante de la matriz $5CD$ vale: a) 5 b) 0 c) 15 d) 1

10.- El rango de la matriz CF es: a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

Apéndice: Problemas de determinantes en la P.A.U.

(1) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Puede existir una matriz C de forma que se puedan realizar los productos $A \cdot C$ y $C \cdot B$? Si es posible, proporciona un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.

b) Calcula $(B - I)^2$.

c) Determina los valores de x que verifican $|A| = -7|I|$

(2) Dados los números reales a, b, c y d, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Prueba que el polinomio $p(x) = \det(A - x \cdot I_2)$ es $p(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot x + \det(A)$, donde $\mathrm{tr}(A)$ es la traza de la matriz A, es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A.

(3) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Halla el determinante de la matriz A.

b) Halla el determinante de la matriz $3 \cdot A$.

c) Halla el determinante de la matriz $(3 \cdot A)^3$.

(4) Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A \cdot (A - 2 \cdot I)$.

b) Justifica razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $(A - 2 \cdot I)$.

b.2) No existe la matriz inversa de la matriz $(A - I)$.

c) Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2 \cdot I)$.

(5) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sec\theta & \mathrm{tg}\,\theta & 0 \\ \mathrm{tg}\,\theta & \sec\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de θ la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

(6) Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica que $M^2 = M$. Obtén razonadamente:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k\,I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$.

d) Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M\,P = P\,M$.

(7) Dado el número real a se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1-a & 1 & 2\\ a & a^2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Obtén los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.

(8) Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-x & 1 & 0\\ 0 & -x & 1\\ c & b & a-x\end{pmatrix}$$

a) Obtén el polinomio $p(x) = \det(A)$.

b) Si $c = 0$, busca las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b.

(9) Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz A.

b) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $X\cdot A = B$.

(10) Utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Verifica que:

$$\begin{vmatrix}a-2 & 4 & 3\\ 1 & a+1 & -2\\ 0 & 0 & a-4\end{vmatrix} = (a-3)\cdot(a-4)\cdot(a+2)$$

b) Calcula:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 3 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

(11) Sea

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

a) Calcula su inversa, si existe.

b) Encuentra la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A.

c) Resuelve la ecuación

$$x\cdot\left(A^4+A^2-A\right)=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(12) Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6\cdot A - 9\cdot I$, donde I es la matriz identidad.

a) Expresa A^4 como combinación lineal de I y A.

b) 1) Estudia si la matriz

$$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\-2&6&1\\2&-3&2\end{pmatrix}$$

verifica la ecuación $B^2 = 6\cdot B - 9\cdot I$.

2) Determina si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlala.

(13) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-x&1&1\\1&-x&1\\1&1&-x\end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

(14) Sea

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$ (I es la matriz identidad)

b) Calcula todas las matrices diagonales que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.

c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

(15) Sea la matriz

$$\begin{pmatrix}2a&a&a&a\\a&2a&a&a\\a&a&2a&a\\a&a&a&2a\end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de su determinante en función de a.

b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

(16) Aplicando las propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo varía el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j}?

b) La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, ¿tiene inversa?

(17) Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcula razonadamente las raíces de la ecuación polinómica:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades utilizadas.

(18) Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

(19) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a.

b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha inversa para $a = 2$.

(20) Halla una matriz X tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(21) Calcula los valores de *b* para los cuales la matriz *A* tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(22) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$$

(23) Obtén razonadamente:

a) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y verifica la ecuación $B^2 = B$.

b) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene tres filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que el determinante de A es positivo.

(24) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y se sabe que *T* es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcula razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$ b) M^4 c) TM^3T^{-1}

(25) Dadas las matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtén razonadamente el valor de *x* para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6.

b) Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$.

c) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y.

(26) Se da la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Obtén razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m.

b) Explica por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$.

c) Obtén razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprueba que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz identidad.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal

(27) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

calcula razonadamente el valor de los determinantes siguientes escribiendo todos los pasos utilizados.

a) $|A+B|$ y $\frac{1}{2}\left|(A+B)^{-1}\right|$ b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$ c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^{3}B^{-1}\right|$

(28) Dada la matriz

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & a-2\\ 4 & 3 & 2\\ a & a & -6\end{pmatrix}$$

a) Calcula, en función de a, le determinante de la matriz $A(a)$, escribiendo los cálculos necesarios.
b) Determina, razonadamente, los números reales a, para los que el determinante de la matriz inversa $A(a)$ es igual a $\frac{1}{66}$.

(29) Dadas las matrices cuadradas

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}18 & 48 & 12\\ 0 & 18 & 12\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Justifica que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A, incluyendo en la respuesta todos los pasos.
b) Calcula, razonadamente, el determinante de la matriz $3\,A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.
c) Obtén razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación:

$$x\cdot I + y\cdot A + z\cdot A^{2} = B.$$

(30) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A-I)^{2}\cdot(A-5I)$ donde I es la matriz identidad.
b) Obtén la matriz traspuesta de la matriz A.
c) Razona si existe la matriz inversa de A y, en su caso, calcúlala.

(31) Tenemos las matrices reales

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:$$

a) Justifica que existe la matriz inversa de A, calcúlala y calcula el determinante de A^{-1}.
b) Calcula el determinante de la matriz B, $B = A(A + 4\cdot I)$.
c) Determina los números reales x, y, z, t que cumplen:

$$A^{-1} = x\cdot A + y\cdot I \quad , \quad A^{2} = z\cdot A + t\cdot I.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Luis Carlos Vidal