1. Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1,\ 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo.

$$\text{a) } f(x)=\frac{1}{x} \ ; \text{ b) } f(x)=(2-x)^3 \ ; \text{ c) } f(x)=x^2-x+1 \ ; \text{ d) } f(x)=2^x$$

2. Dada la función $f(x)=x^2-1$, halla la tasa de variación media en el intervalo $[2,\ 2+h]$.

3. Comprueba que la TVM de la función $f(x)=-x^2+5x-3$ en el intervalo $[1,1+h]$ es igual a $-h+3$. Calcula la TVM de esa función en los intervalos $[1,\ 2]$, $[1,\ 1{,}5]$, utilizando la expresión anterior.

4. Compara la TVM de las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=3^x$ en los intervalos $[2,\ 3]$ y $[3,\ 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

5. Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo $f(x)=\dfrac{2x-3}{5}$.

6. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x=1$, utilizando la definición de derivada:

$$\text{a) } f(x)=3x^2-1 \ ; \text{ b) } f(x)=(2x+1)^2 \ ; \text{ c) } f(x)=\frac{3}{x} \ ; \text{ d) } f(x)=\frac{1}{x+2}$$

7. Halla el valor del crecimiento de $f(x)=(x-3)^2$ en los puntos $x=1$ y $x=3$, aplicando la definición de derivada.

8. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $y=x^2-5x+1$ en el punto de abscisa $x=-2$, utilizando la definición de derivada.

9. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $y=4x-x^2$ en el punto de abscisa $x=-2$, aplicando la definición de derivada.

10. Comprueba, utilizando la definición de derivada en cada caso.

$$\text{a) } f(x)=5x \Rightarrow f'(x)=5 \ ; \text{ b) } f(x)=7x^2 \Rightarrow f'(x)=14x \ ; \text{ c) } f(x)=x^2+x \Rightarrow f'(x)=2x+1 \ ;$$

$$\text{d) } f(x)=\frac{3}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{x^2}$$

11. Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican.

$$\text{a) } f(x)=2x^3+3x^2-6,\ x=1 \ ; \text{ b) } f(x)=\cos(2x+\pi),\ x=0 \ ; \text{ c) } f(x)=\frac{x}{3}+\sqrt{2},\ x=-\frac{17}{3} \ ;$$

$$\text{d) } f(x)=\frac{1}{7x+1},\ x=0 \ ; \text{ e) } f(x)=\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2},\ x=\pi \ ; \text{ f) } f(x)=\frac{2}{(x+3)^3},\ x=-1 \ ;$$

$$\text{g) } f(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{2},\ x=2 \ ; \text{ h) } f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-4}},\ x=8 \ ; \text{ i) } f(x)=x\operatorname{sen}(\pi-x),\ x=\frac{\pi}{2} \ ;$$

$$\text{j) } f(x)=(5x-2)^3,\ x=\frac{1}{5} \ ; \text{ k) } f(x)=\frac{x+5}{x-5},\ x=3$$

12. Halla la función derivada de las siguientes funciones y simplifica, en la medida de lo posible, el resultado.

$$\text{a) } f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \ ; \text{ b) } f(x)=(x^2-3)^3 \ ; \text{ c) } f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2} \ ; \text{ d) } f(x)=\sqrt{x^2+1} \ ; \text{ e) } f(x)=\sqrt[3]{(x+6)^2} \ ;$$

$$\text{f) } f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x} \ ; \text{ g) } f(x)=\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \text{ h) } f(x)=7^{x+1}\cdot e^{-x} \ ; \text{ i) } f(x)=\frac{1}{3x}+\frac{x}{3} \ ; \text{ j) } f(x)=\ln 3x+e^{\sqrt{x}} \ ;$$

k) $f(x)=\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2$; l) $f(x)=e^{2x}\cdot \operatorname{tg} x$; m) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; n) $f(x)=\cos^2 x+e^{\operatorname{sen} x}$;

ñ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$; o) $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\cdot e^{1-x}$; p) $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$; q) $f(x)=\log\dfrac{x^2}{3-x}$; r) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x^2$;

s) $f(x)=\sqrt{\ln x}$; t) $f(x)=\operatorname{arcsen}\dfrac{x^2}{3}$; u) $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2+1)$; v) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$; w) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{2}$;

x) $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$; y) $f(x)=\arccos e^{-x}$; z) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; α) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

13. Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

a) $y=3x^2-2x+1$; b) $y=x^3-3x$

14. Obtén los puntos donde $f'(x)=1$ en los siguientes casos:

a) $f(x)=x^2-3x+2$; b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$

15. Halla los puntos en los que la derivada de cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y=x^2-2x$; b) $y=\dfrac{x}{x+2}$; c) $y=4\sqrt{x+3}$; d) $y=\ln(4x-1)$

16. Halla los puntos en los que la derivada vale 0 en cada uno de los siguientes casos:

a) $y=2x^2-8x+5$; b) $y=-x^2+5x$; c) $y=x^4-4x^2$; d) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

17. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ en el punto de abscisa $x=2$.

18. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=-x^2+2x+5$ en el punto de abscisa $x=-1$.

19. Escribe la ecuación de la recta tangente a $y=x^2+4x+1$, cuya pendiente sea igual a 2.

20. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\sqrt{x+1}$ en $x=0$.

21. Obtén los puntos críticos o singulares de las siguientes funciones:

a) $y=3x^2-2x+5$; b) $y=2x^3-3x^2+1$; c) $y=x^4-4x^3$; d) $y=x^3-12x$

22. Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; b) $y=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

23. Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos críticos:

a) $y=x^3+3x$; b) $y=\dfrac{1}{x}$; c) $y=\sqrt{x}$; d) $y=\ln x$

24. Observa los resultados obtenidos en el ejercicio 11 y di si cada una de las funciones es creciente o decreciente en el punto que se indica.

25. Obtén los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{3x+1}{2}$; b) $y=5-2x$; c) $y=x^2-3x+2$; d) $y=2x-x^2$; e) $y=x^2$; f) $y=x^3-3x$

26. Dada la función $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f? ¿Tiene f máximo o mínimo?

27. Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:
    - Es continua.
    - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
    - Tiene tangente horizontal en $(-3,\ 2)$ y en $(1,\ 5)$.

    Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

28. De una función sabemos que:
    - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
    - Su derivada es igual a 0 en $(-2,\ 2)$ y en $(2,\ -1)$.
    - Corta a los ejes en $(0,\ 0)$ y en $(4,\ 0)$.

    Represéntala gráficamente.

29. Comprueba que la función $y = (x-1)^3$ pasa por los puntos $(0,\ -1)$, $(1,\ 0)$ y $(2,\ 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1,\ 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

30. Comprueba que la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
    - Tiene derivada nula en $(0,\ 0)$.
    - La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
    - La posición de la curva respecto a la asíntota anterior es $y < 2$ si $x \to +\infty$, $y < 2$ si $x \to -\infty$.

    Represéntala.

31. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.

32. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

33. a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x + 8$ en cualquier punto?

    b) ¿Cuánto ha de valer x par que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?

    c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

34. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene pendiente igual a 8?

35. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

36. Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

37. ¿En qué puntos de $y = \dfrac{1}{x}$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

38. La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

39. Aplica las propiedades de los logaritmos para derivar las siguientes funciones.

    a) $f(x) = \ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$; c) $f(x) = \ln\left(x \cdot e^{-x}\right)$; d) $f(x) = \log\dfrac{(3x-5)^3}{x}$;

    e) $f(x) = \log(\operatorname{tg} x)^2$; f) $f(x) = \ln x^x$

40. En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos críticos o singulares y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos. Represéntalas.

a) $y=x^3-3x^2$; b) $y=x^3-3x+2$; c) $y=x^4+4x^3$; d) $y=x^3-9x^2+24x-20$; e) $y=12x-x^3$;

f) $y=-x^4+x^2$; g) $y=x^5-6x^3-8x-1$; h) $y=x^4-8x^2+2$

41. Representa las siguientes funciones hallando los puntos críticos o singulares y estudiando sus ramas infinitas.

a) $y=x^3-2x^2+x$; b) $y=-x^4+2x^2$; c) $y=\dfrac{x}{x^2+5x+4}$;

d) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; e) $y=\dfrac{x}{(x+5)^2}$; f) $y=\dfrac{2x^2}{x+2}$

42. Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes.

a) $y=\dfrac{x-3}{x+2}$; b) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$; c) $y=\dfrac{x^3}{3}+4x$; d) $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

43. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x}{x^2-16}$; b) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$; c) $y=\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$; d) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$; e) $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$; f) $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$;

g) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$; h) $y=\dfrac{x^2}{(x-2)^2}$; i) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; j) $y=\dfrac{x^2-5}{2x-4}$

44. Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0,1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2,-1)$ vale 0.

45. Halla el vértice de la parábola $y=x^2+6x+11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

46. Determina la parábola $y=ax^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=2x-3$ en el punto $A(2,1)$ y que pasa por el punto $B(5,-2)$.

47. Determina el valor de x para que las tangentes a las curvas $y=3x^2-2x+5$ e $y=x^2+6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

48. Halla a, b y c en $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x=-4$ y en $x=0$ y que pase por $(1,1)$.

49. Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y=x^2-5x+k$ en $x=1$ pase por el origen de coordenadas.

50. Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ es $x=-\dfrac{b}{2a}$.

51. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\ln x$ que es paralela a la recta $y=3x-2$.

52. ¿Tiene algún punto de tangente horizontal la función $y=\operatorname{tg} x$?

53. El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es $C(q)=3q^2+5q+75$. El coste medio por unidad es $M(q)=\dfrac{C(q)}{q}$. ¿Cuántas unidades se deben fabricas para que el coste medio por unidad sea mínimo? Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado anteriormente.