1. Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes.

$$\text{a) } \frac{\pi}{6} \;;\; \text{b) } \frac{2\pi}{3} \;;\; \text{c) } \frac{4\pi}{3} \;;\; \text{d) } \frac{5\pi}{4} \;;\; \text{e) } \frac{7\pi}{6} \;;\; \text{f) } \frac{9\pi}{2} \;;\; \text{g) } 1{,}5 \;;\; \text{h) } 3{,}2 \;;\; \text{i) } 5 \;;\; \text{j) } 2{,}75$$

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos dados en grados. Exprésalos en función de π y en forma decimal.

$$\text{a) } 40^\circ \;;\; \text{b) } 108^\circ \;;\; \text{c) } 135^\circ \;;\; \text{d) } 240^\circ \;;\; \text{e) } 270^\circ \;;\; \text{f) } 126^\circ \;;\; \text{g) } 72^\circ \;;\; \text{h) } 200^\circ \;;\; \text{i) } 300^\circ$$

3. Halla el <u>valor exacto</u> de las siguientes operaciones sin utilizar la calculadora.

$$\text{a) } 5\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0+2\cos\pi-\cos\frac{3\pi}{2}+\cos 2\pi \;;\; \text{b) } 5\,\mathrm{tg}\,\pi+3\cos\frac{\pi}{2}-2\,\mathrm{tg}\,0+\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}-2\,\mathrm{sen}\,2\pi \;;$$

$$\text{c) } \frac{2}{3}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}-4\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}+3\,\mathrm{sen}\,\pi-\frac{5}{3}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} \;;\; \text{d) } \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}+\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}+\mathrm{sen}\,\pi \;;\; \text{e) } \mathrm{sen}\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}-\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4} \;;$$

$$\text{f) } \cos\pi-\cos 0+\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{3\pi}{2} \;;\; \text{g) } \mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}+\mathrm{tg}\frac{11\pi}{6} \;;\; \text{h) } \cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} \;;$$

$$\text{i) } \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}$$

4. En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α contenidos en el intervalo $[0,\ 2\pi)$ tales que:

$$\text{a) } \mathrm{sen}\,\alpha=0{,}32 \;;\; \text{b) } \cos\alpha=0{,}58 \;;\; \text{c) } \mathrm{tg}\,\alpha=-1{,}5 \;;\; \text{d) } \mathrm{sen}\,\alpha=-0{,}63$$

5. Halla las razones trigonométricas (<u>valores exactos</u>) del ángulo 75° sabiendo que $75^\circ=30^\circ+45^\circ$.

6. Sabiendo que $\mathrm{sen}\,x=\dfrac{3}{5}$ y que $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x (<u>valores exactos</u>):

$$\text{a) } \mathrm{sen}\,2x \;;\; \text{b) } \mathrm{tg}\frac{x}{2} \;;\; \text{c) } \mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \;;\; \text{d) } \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \;;\; \text{e) } \cos\frac{x}{2} \;;\; \text{f) } \mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

7. Halla las razones trigonométricas (<u>valores exactos</u>) del ángulo 15° de dos formas, considerando:

$$\text{a) } 15^\circ=45^\circ-30^\circ \;;\; \text{b) } 15^\circ=\frac{30^\circ}{2}$$

8. Sabiendo que $\mathrm{sen}\,x=\dfrac{2}{3}$ y que x es un ángulo del primer cuadrante, calcula (<u>valores exactos</u>):

$$\text{a) } \mathrm{sen}\,2x \;;\; \text{b) } \mathrm{tg}\frac{x}{2} \;;\; \text{c) } \cos(30^\circ-x)$$

9. Sabemos que $\cos x=-\dfrac{3}{4}$ y $\mathrm{sen}\,x<0$. Sin hallar el valor de x, calcula (<u>valores exactos</u>):

$$\text{a) } \mathrm{sen}\,x \;;\; \text{b) } \cos(\pi+x) \;;\; \text{c) } \cos 2x \;;\; \text{d) } \mathrm{tg}\frac{x}{2} \;;\; \text{e) } \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \;;\; \text{f) } \cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)$$

10. Si $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=4$ y $\mathrm{tg}\,\alpha=-2$, halla $\mathrm{tg}\,2\beta$ (<u>valor exacto</u>).

11. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$:

$$\text{a) } 2\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x+1=0 \;;\; \text{b) } \mathrm{sen}^2 x-\mathrm{sen}\,x=0 \;;\; \text{c) } 2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0 \;;\; \text{d) } \mathrm{sen}^2 x-\cos^2 x=1 \;;$$

$$\text{e) } \cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x=0 \;;\; \text{f) } 2\cos^2 x+\mathrm{sen}\,x=1 \;;\; \text{g) } 3\,\mathrm{tg}^2 x-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x=0 \;;\; \text{h) } \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2} \;;$$

$$\text{i) } \mathrm{sen}\,2x-2\cos^2 x=0 \;;\; \text{j) } \cos 2x-3\,\mathrm{sen}\,x+1=0 \;;\; \text{k) } \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x=0 \;;\; \text{l) } \cos^2\frac{x}{2}+\cos x-\frac{1}{2}=0 \;;$$

$$\text{m) } \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1=\cos x \;;\; \text{n) } 2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}+\cos 2x=0 \;;\; \text{ñ) } \cos 2x+3\,\mathrm{sen}\,x=2 \;;\; \text{o) } \mathrm{tg}\,2x\cdot\mathrm{tg}\,x=1 \;;\; \text{p) } 2\,\mathrm{sen}\,x=\mathrm{tg}\,2x$$

12. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; b) $2\operatorname{tg}x\cos^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{sen}x=\operatorname{tg}x$; c) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos x$;

d) $\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\beta$; e) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; f) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

g) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}a}$; h) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; i) $\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x\cos^2x-\operatorname{sen}^3x$;

j) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$; k) $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$;

l) $\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$; m) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$

13. Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ (calcula su valor para $\dfrac{\pi}{4}$) ; b) $\dfrac{2\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos2\alpha}$; c) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas (dar todas las soluciones positivas y reducidas, tanto en grados como en radianes):

a) $\cos x\cos2x+2\cos^2x=0$; b) $\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}+\cos x-1=0$; c) $\operatorname{sen}2x\cos x=6\operatorname{sen}^3x$; d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\operatorname{tg}x=1$;

e) $4\cos2x+3\cos x=1$; f) $\operatorname{tg}2x+2\cos x=0$; g) $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos x=1$; h) $2\operatorname{sen}x\cos^2x-6\operatorname{sen}^3x=0$;

i) $\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x=\cos2x$; j) $\dfrac{\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x}{\cos x+\cos3x}=1$; k) $\dfrac{\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x}{\cos3x+\cos x}=\sqrt{3}$; l) $\operatorname{sen}3x-\cos3x=\operatorname{sen}x-\cos x$

15. Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en grados, correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases}x+y=120^\circ\\ \operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$; b) $\begin{cases}\operatorname{sen}^2x+\cos^2y=1\\ \cos^2x-\operatorname{sen}^2y=1\end{cases}$; c) $\begin{cases}\operatorname{sen}x+\cos y=1\\ x+y=90^\circ\end{cases}$;

d) $\begin{cases}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=\sqrt{3}\\ \cos x+\cos y=1\end{cases}$; e) $\begin{cases}\operatorname{sen}^2x+\cos^2y=\dfrac{3}{4}\\ \cos^2x-\operatorname{sen}^2y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$; f) $\begin{cases}\cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\\ \operatorname{sen}(x-y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

16. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}x=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; b) $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; c) $\operatorname{tg}x=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$

17. En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central en grados y en radianes.

18. En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?

19. En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

Soluciones

1. a) 30^o ; b) 120^o ; c) 240^o ; d) 225^o ; e) 210^o ; f) 810^o ; g) $85,94^o$; h) $183,35^o$; i) $286,48^o$; j) $158,56^o$

2. a) $\frac{2\pi}{9}\text{rad} \approx 0,7\,\text{rad}$; b) $\frac{3\pi}{5}\text{rad} \approx 1,88\,\text{rad}$; c) $\frac{3\pi}{4}\text{rad} \approx 2,36\,\text{rad}$; d) $\frac{4\pi}{3}\text{rad} \approx 4,19\,\text{rad}$;
e) $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71\,\text{rad}$; f) $\frac{7\pi}{10}\text{rad} \approx 2,2\,\text{rad}$; g) $\frac{2\pi}{5}\text{rad} \approx 1,26\,\text{rad}$; h) $\frac{10\pi}{9}\text{rad} \approx 3,49\,\text{rad}$; i) $\frac{5\pi}{3}\text{rad} \approx 5,24\,\text{rad}$

3. a) -2 ; b) -1 ; c) 3 ; d) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) -2 ; g) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; h) $\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$; i) -2

4. a) $\alpha_1 = 0,33$; $\alpha_2 = 2,82$; b) $\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 5,33$; c) $\alpha_1 = 2,16$; $\alpha_2 = 5,3$; d) $\alpha_1 = 3,82$; $\alpha_2 = 5,6$

5. $\text{sen}\,75^o = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\cos 75^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\text{tg}\,75^o = 2+\sqrt{3}$

6. a) $\text{sen}\,2x = -\frac{24}{25}$; b) $\text{tg}\,\frac{x}{2} = 3$; c) $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$; d) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$;
e) $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; f) $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{7}$

7. Usando las dos formas indicadas en los apartados a) y b) se obtiene, naturalmente, los mismos valores:
$\text{sen}\,15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\text{tg}\,15^o = 2-\sqrt{3}$

8. a) $\text{sen}\,2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$; b) $\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; c) $\cos(30^o - x) = \frac{\sqrt{15}+2}{6}$

9. a) $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; b) $\cos(\pi + x) = \frac{3}{4}$; c) $\cos 2x = \frac{1}{8}$; d) $\text{tg}\,\frac{x}{2} = \sqrt{7}$;
e) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\frac{3}{4}$; f) $\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

10. $\text{tg}\,2\beta = -\frac{84}{13}$

11. a) $x=90^o$, $x=270^o$; b) $x=0^o$, $x=90^o$, $x=180^o$; c) $x=30^o$, $x=90^o$, $x=270^o$, $x=330^o$;
d) $x=90^o$, $x=270^o$; e) $x=45^o$, $x=135^o$, $x=225^o$, $x=315^o$; f) $x=90^o$, 210^o, $x=330^o$;
g) $x=0^o$, $x=30^o$, $x=180^o$, $x=210^o$; h) $x=60^o$, $x=300^o$; i) $x=45^o$, $x=90^o$, $x=225^o$, $x=270^o$;
j) $x=30^o$, $x=150^o$; k) $x=45^o$, $x=225^o$; l) $x=90^o$, $x=270^o$; m) $x=0^o$;
n) $x=60^o$, $x=90^o$, $x=270^o$, $x=300^o$; ñ) $x=30^o$, $x=90^o$, $x=150^o$;
o) $x=30^o$, $x=150^o$, $x=210^o$, $x=330^o$; p) $x=0^o$, $x=120^o$, $x=180^o$, $x=240^o$

12. En este ejercicio no es posible dar las soluciones finales, pues es un ejercicio en el que se requiere hacer demostraciones.

13. a) $\frac{\text{sen}\,2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = 2\,\text{ctg}\,\alpha$. Su valor para $\frac{\pi}{4}$ es 2 ; b) $\frac{2\cos(45^o+\alpha)\cos(45^o-\alpha)}{\cos 2\alpha} = 1$;
c) $\frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}\left(1+\text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\right) = 2$

14. a) $x = 68,53^{\circ}$, $x = 90^{\circ}$, $x = 270^{\circ}$, $x = 291,46^{\circ}$; b) $x = 0^{\circ}$, $x = 120^{\circ}$, $x = 240^{\circ}$;
    c) $x = 0^{\circ}$, $x = 30^{\circ}$, $x = 150^{\circ}$, $x = 180^{\circ}$, $x = 210^{\circ}$, $x = 330^{\circ}$; d) $x = 0^{\circ}$, $x = 45^{\circ}$, $x = 180^{\circ}$, $x = 225^{\circ}$;
    e) $x = 51,34^{\circ}$, $x = 180^{\circ}$, $x = 308,71^{\circ}$; f) $x = 90^{\circ}$, $x = 210^{\circ}$, $x = 270^{\circ}$, $x = 330^{\circ}$; g) $x = 90^{\circ}$, $x = 180^{\circ}$;
    h) $x = 0^{\circ}$, $x = 30^{\circ}$, $x = 150^{\circ}$, $x = 180^{\circ}$, $x = 210^{\circ}$, $x = 330^{\circ}$;
    i) $x = 30^{\circ}$, $x = 45^{\circ}$, $x = 135^{\circ}$, $x = 150^{\circ}$, $x = 225^{\circ}$, $x = 315^{\circ}$;
    j) $x = 15^{\circ}$, $x = 75^{\circ}$, $x = 195^{\circ}$, $x = 255^{\circ}$; k) $x = 30^{\circ}$, $x = 120^{\circ}$, $x = 210^{\circ}$, $x = 300^{\circ}$;
    l) $x = 0^{\circ}$, $x = 67,5^{\circ}$, $x = 157,5^{\circ}$, $x = 180^{\circ}$, $x = 247,5^{\circ}$, $x = 337,5^{\circ}$
15. a) $x = 90^{\circ}$, $y = 30^{\circ}$; b) $x = 0^{\circ}$, $y = 0^{\circ}$; c) $x = 30^{\circ}$, $y = 60^{\circ}$; d) $x = 60^{\circ}$, $y = 60^{\circ}$;
    e) $x = 30^{\circ}$, $y = 45^{\circ}$; f) $x = 45^{\circ}$, $y = 15^{\circ}$
16. En este ejercicio no es posible dar las soluciones finales, pues es un ejercicio en el que se requiere hacer demostraciones.
17. El ángulo central es $\alpha = 1,25\,\mathrm{rad} = 71,62^{\circ}$.
18. El arco correspondiente tendrá una longitud de $24\,\mathrm{cm}$.
19. El radio de la circunferencia es $r = 4,8\,\mathrm{cm}$.