Ejercicios y problemas propuestos

Página 162

Para practicar

Números complejos en forma binómica. Operaciones

1 Calcula.

a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i)$

b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$

d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i) = 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 =$

$= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i$

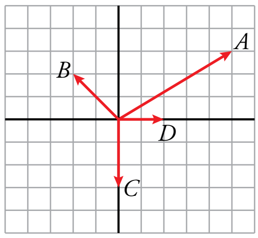
b) $3 + 2i\ (-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$

c) $-2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$

d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2 = 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i = 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i$

2 Los puntos A, B, C, D corresponden a los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4.

Efectúa y representa.



a) $z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3$

b) $(z_2 - z_1)^2$

c) $\dfrac{5\,(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3}$

d) $\dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4}$

$z_1 = 5 + 3i \qquad z_2 = -2 + 2i \qquad z_3 = -3i \qquad z_4 = 2$

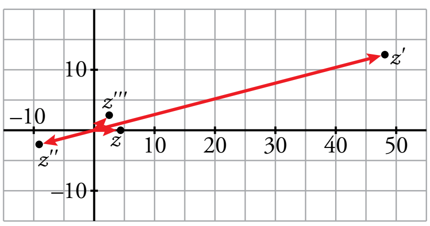
a) $z = z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 = (5 + 3i)\,2 - (-2 + 2i)\,(-3i) = 10 + 6i - 6i + 6i^2 = 4$

b) $z' = (z_2 - z_1)^2 = [-2 + 2i - (5 + 3i)]^2 = (-7 - i)^2 = 49 + 14i + i^2 = 48 + 14i$

c) $z'' = \dfrac{5\,(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3} = \dfrac{5\,(5 + 3i - 2)}{-2 + 2i + (-3i)} = \dfrac{5\,(3 + 3i)}{-2 - i} = \dfrac{(15 + 15i)\,(-2 + i)}{(-2 - i)\,(-2 + i)} = \dfrac{-30 + 15i - 30i + 15i^2}{4 + 1} = -9 - 3i$

d) $z''' = \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4} = \dfrac{5 - 3i - (-2 - 2i)}{2 - 3i} = \dfrac{(7 - i)\,(2 + 3i)}{(2 - 3i)\,(2 + 3i)} = \dfrac{14 + 21i - 2i - 3i^2}{4 + 9} = \dfrac{18 + 19i}{13}$

Representación gráfica:



3 **Calcula en forma binómica.**

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ **b)** $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$ **c)** $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$ **d)** $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}=\dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i}=\dfrac{18+6i}{2-2i}=\dfrac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=$

$=\dfrac{36+36i+12i-12}{4+4}=\dfrac{24+48i}{8}=3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}=\dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2}=\dfrac{-2+3i}{-6+2i}=\dfrac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=$

$=\dfrac{12+4i-18i+6}{36+4}=\dfrac{18-14i}{40}=\dfrac{9-7i}{20}=\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{20}i$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)=\dfrac{2-2i+5i+5}{3-2i}=\dfrac{7+3i}{3-2i}=\dfrac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{21+14i+9i-6}{9+4}=\dfrac{15+23i}{13}=\dfrac{15}{13}+\dfrac{23}{13}i$

d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4+1}+\dfrac{-3+9i-2i-6}{1+9}=$

$=\dfrac{1+3i}{5}+\dfrac{-9+7i}{10}=\dfrac{2+6i-9+7i}{10}=\dfrac{-7+13i}{10}=\dfrac{-7}{10}+\dfrac{13}{10}i$

4 **Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$, calcula:**

a) zwt **b)** $zt - w(t + z)$ **c)** $\dfrac{w}{z}t$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}$ **e)** $\dfrac{3z+it}{3}w$ **f)** $\dfrac{z^2-wt^2}{2}$

$z = 1 - 3i$; $w = -3 + 2i$; $t = -2i$

a) $zwt = (1-3i)(-3+2i)(-2i)=(-3+2i+9i-6i^2)(-2i)=(3+11i)(-2i)=-6i-22i^2=22-6i$

b) $zt-w(t+z)=(1-3i)(-2i)-(-3+2i)(-2i+1-3i)=(-2i+6i^2)-(-3+3i)(1-5i)=$

$=(-6-2i)-(-3+2i)(1-5i)=(-6-2i)-(-3+15i+2i-10i^2)=$

$=(-6-2i)-(7+17i)=-13-19i$

c) $\dfrac{w}{z}t=\dfrac{-3+2i}{1-3i}(-2i)=\dfrac{6i-4i^2}{1-3i}=\dfrac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{4+12i+6i+18i^2}{1+9}=$

$=\dfrac{-14+18i}{10}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{9}{5}i$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}=\dfrac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i}=\dfrac{2-6i+6i}{-3+2i}=\dfrac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2}=\dfrac{-6-4i}{9+4}=-\dfrac{6}{13}-\dfrac{4}{13}i$

e) $\dfrac{3z+it}{3}w=\dfrac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i)=\dfrac{3-9i+2}{3}(-3+2i)=$

$=\left(\dfrac{5}{3}-3i\right)(-3+2i)=-5+\dfrac{10}{3}i+9i-6i^2=1+\dfrac{37}{3}i$

f) $\dfrac{z^2-wt^2}{2}=\dfrac{(1-3i)^2-(-3+2i)(-2i)^2}{2}=\dfrac{1-6i+9i^2-(-3+2i)(-4)}{2}=$

$=\dfrac{-8-6i-12+8i}{2}=\dfrac{-20}{2}+\dfrac{2}{2}i=-10+i$

5 **Calcula.**

a) i^{37} **b)** i^{126} **c)** i^{-7} **d)** i^{64} **e)** i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$ b) $i^{126} = i^2 = -1$ c) $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$ d) $i^{64} = i^0 = 1$ e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

6 **Dado el número complejo** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**, prueba que:**

a) $1 + z + z^2 = 0$ **b)** $\frac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} =$

$= \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a).

Por tanto; $\frac{1}{z} = z^2$.

7 **Calcula** m **y** n **para que se verifique la igualdad** $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$**.**

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2+n) + (m+5)\,i = 7 - 2i \to \begin{cases} 2+n=7 \\ m+5=-2 \end{cases} \begin{matrix} n=5 \\ m=-7 \end{matrix}$

8 **Determina** k **para que el cociente** $\frac{k+i}{1+i}$ **sea igual a** $2 - i$**.**

$\frac{k+i}{1+i} = \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k-ki+i+1}{1+1} = \frac{(k+1)+(1-k)\,i}{2} = \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2 - i \to \begin{cases} \frac{k+1}{2} = 2 \to k = 3 \\ \frac{1-k}{2} = -1 \to k = 3 \end{cases}$

Por tanto, $k = 3$.

9 **Dados los complejos** $2 - ai$ **y** $3 - bi$**, halla** a **y** b **para que su producto sea igual a** $8 + 4i$**.**

$(2-ai)(3-bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)\,i = 8 + 4i$

$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$

$b = \frac{4+3a}{-2}$

$6 - a\left(\frac{4+3a}{-2}\right) = 8 \to 6 + \frac{4a+3a^2}{2} = 8$

$\frac{4a+3a^2}{2} = 2 \to 4a + 3a^2 = 4 \to 3a^2 + 4a - 4 = 0$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \to b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \to b = 1 \end{cases}$

Números complejos en forma polar

10 **Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar:**

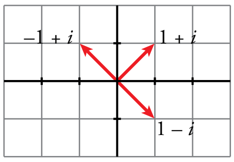
a) $1 - i$ **b)** $-1 + i$ **c)** $\sqrt{3} + i$ **d)** $-\sqrt{3} - i$

e) -4 **f)** $2i$ **g)** $-\frac{3}{4}i$ **h)** $2 + 2\sqrt{3}i$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

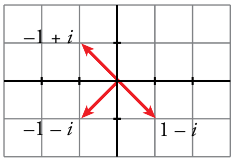
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

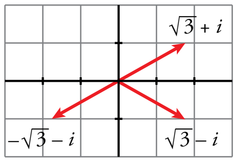
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

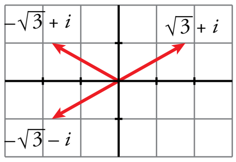
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

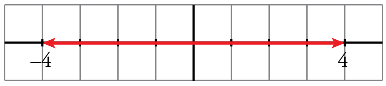
Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$



e) $-4 = 4_{180°}$

Opuesto: $4 = 4_{0°}$

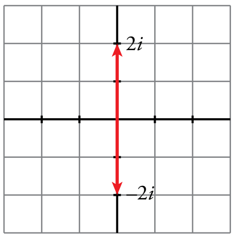
Conjugado: $-4 = 4_{180°}$



f) $2i = 2_{90°}$

Opuesto: $-2i = 2_{270°}$

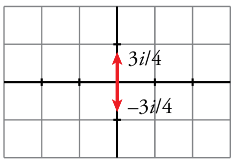
Conjugado: $-2i = 2_{270°}$



g) $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270°}$

Opuesto: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$

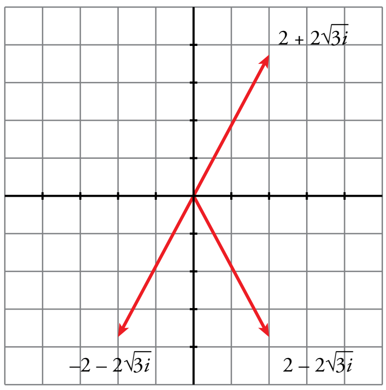
Conjugado: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$



h) $2 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{60°}$

Opuesto: $-2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{240°}$

Conjugado: $2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{300°}$



11 **Escribe en forma binómica estos números complejos:**

a) $2_{45°}$ **b)** $3_{(\pi/6)}$ **c)** $\sqrt{2}_{180°}$ **d)** $17_{0°}$

e) $1_{(\pi/2)}$ **f)** $5_{270°}$ **g)** $1_{150°}$ **h)** $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2\,(\cos 45° + i\,\mathrm{sen}\,45°) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}\,(\cos 180° + i\,\mathrm{sen}\,180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i\cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = \cos 150° + i\,\mathrm{sen}\,150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100°} = 4\,(\cos 100° + i\,\mathrm{sen}\,100°) = 4\,(-0,17 + i\cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$

12 **Dados los números complejos:** $z_1 = 2_{270°}$, $z_2 = 4_{120°}$; $z_3 = 3_{315°}$, **calcula:**

a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_2 \cdot z_3$ **c)** $z_1 \cdot z_3$

d) $\frac{z_3}{z_1}$ **e)** $\frac{z_2}{z_1}$ **f)** $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

g) z_1^2 **h)** z_2^3 **i)** z_3^4

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30°}$ b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75°}$ c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225°}$

d) $\frac{z_3}{z_1} = 1,5_{45°}$ e) $\frac{z_2}{z_1} = 2_{-150°} = 2_{210°}$ f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1,5_{105°}$

g) $z_1^2 = 4_{180°}$ h) $z_2^3 = 64_{0°}$ i) $z_3^4 = 81_{180°}$

13 **Expresa en forma polar y calcula.**

a) $(-1 - i)^5$ **b)** $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\,i}$ **c)** $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ **e)** $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$ **f)** $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = (\sqrt{2}_{225°})^5 = 4\sqrt{2}_{1\,125°} = 4\sqrt{2}_{45°} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\,i} = \sqrt[4]{2_{300°}} = \sqrt[4]{2}_{(300° + 360°\,n)/4} = \sqrt[4]{2}_{75° + 90°\,n}$; $n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt[4]{2}_{75°}$ $\sqrt[4]{2}_{165°}$ $\sqrt[4]{2}_{255°}$ $\sqrt[4]{2}_{345°}$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{2^6}_{(360°\,k)/4} = 2\sqrt{2}_{90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,i$ $2\sqrt{2}_{180°} = -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{270°} = -2\sqrt{2}\,i$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/3} = 2_{30° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $2_{150°} = -\sqrt{3} + i$ $2_{270°} = -2i$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6 = (4_{150°})^6 = 4\,096_{900°} = 4\,096_{180°} = -4\,096$

f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306°\,52'})^3 = 125_{920°\,36'} = 125_{200°\,36'}$

14 **Calcula y representa gráficamente el resultado.**

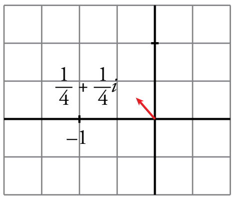
a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{2_{30°}}\right)^3 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285°}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855°} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135°} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(cos\, 135 + i\, sen\, 135°) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{4}i$



b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i} =$

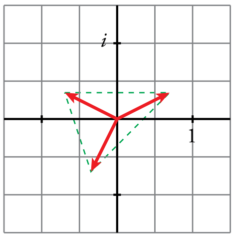
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71°\,34'}} = \left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71°\,34' + 360°\,k)/3} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23°\,51' + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23°\,51'} = 0,785 + 0,347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{143°\,51'} = -0,693 + 0,56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{263°\,51'} = -0,092 - 0,853i$



15 **Calcula y representa las soluciones.**

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-27i}$

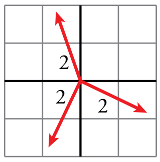
a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i} = \sqrt[3]{8_{300°}} = 2_{(300° + 360°\,k)/3} = 2_{100° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100°} = -0{,}35 + 1{,}97i$

$2_{220°} = -1{,}53 - 1{,}26i$

$2_{340°} = 1{,}88 - 0{,}68i$

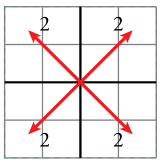


b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ $\qquad 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ $\qquad 2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$



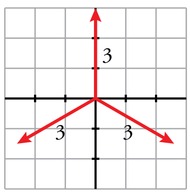
c) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\,k)/3}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°} = 3i$

$3_{210°} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$3_{330°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$



16 Calcula pasando a forma polar.

a) $(1 + i\sqrt{3})^5$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

c) $\sqrt[6]{-64}$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

a) $(1+i\sqrt{3})^5 = (2_{60°})^5 = 32_{300°} = 32\,(cos\ 300° + i\ sen\ 300°) = 32\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}\,i$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5} = \dfrac{8_{0°}}{(\sqrt{2}_{315°})^5} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{1\,575°}} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{135°}} = \left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225°} =$

$= \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\,(cos\ 225° + i\ sen\ 225°) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

c) $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = \sqrt[6]{2^6}_{(180° + 360°\,k)/6} = 2_{30° + 60°\,k};\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30°} = \sqrt{3} + i \qquad 2_{90°} = 2i \qquad 2_{150°} = -\sqrt{3} + i$

$2_{210°} = -\sqrt{3} - i \qquad 2_{270°} = -2 \qquad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}_{315°}}{3\sqrt{2}_{135°}}} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)_{180°}} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{(180° + 360°\,k)/2} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90° + 180°\,k};\ \ k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i \qquad \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270°} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

17 Expresa en forma polar z, su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$

b) $z = -2 - 2i$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$

d) $z = -5$

e) $z = 7i$

f) $z = -3 - 4i$

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2_{300°};\ -z = -1 + \sqrt{3}\,i = 2_{120°};\ \bar{z} = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225°};\ -z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45°};\ \bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150°};\ -z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330°};\ \bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210°}$

d) $z = -5 = 5_{180°};\ -z = 5 = 5_{0°};\ \bar{z} = -5 = 5_{180°}$

e) $z = 7i = 7_{90°};\ -z = -7i = 7_{270°};\ \bar{z} = -7i = 7_{270°}$

f) $z = -3 - 4i = 5_{233,13°};\ -z = 3 + 4i = 5_{53,13°};\ \bar{z} = -3 + 4i = 5_{126,87°}$

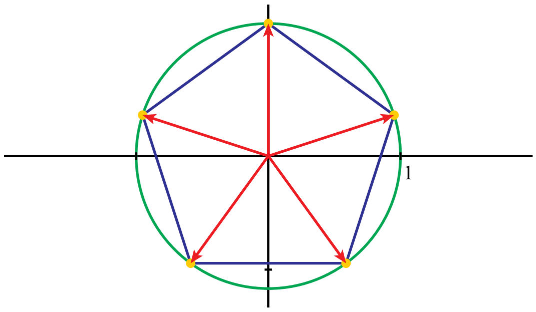
18 **Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:**

a) $\sqrt[5]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{-1}$ **c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$

a) $\sqrt[5]{i}=\sqrt[5]{1_{90°}}=1_{(90°+360°\,k)/5}=1_{18°+72°\,k};\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

Las cinco raíces son: $1_{18°};\ \ 1_{90°};\ \ 1_{162°};\ \ 1_{234°};\ \ 1_{306°}$

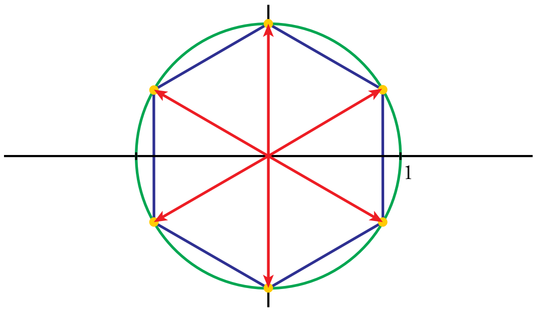
Representación del polígono (pentágono):



b) $\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1_{180°}}=1_{(180°+360°\,k)/6}=1_{30°+60°\,k};\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

Las seis raíces son: $1_{30°};\ 1_{90°};\ 1_{150°};\ 1_{210°};\ 1_{270°};\ 1_{330°}$

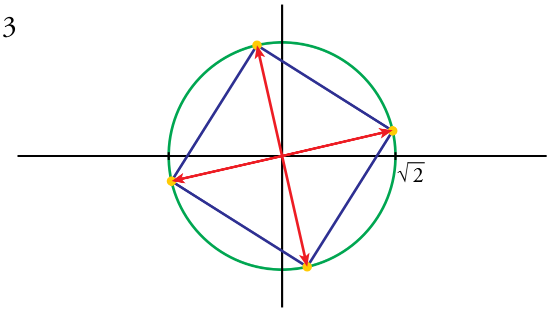
Representación del polígono (hexágono):



c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}=\sqrt[4]{4_{30°}}=\sqrt[4]{2^2}_{(30°+360°\,k)/4}=\sqrt{2}_{7°\,30'+90°\,k};\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt{2}_{7°\,30'};\ \sqrt{2}_{97°\,30'};\ \sqrt{2}_{187°\,30'};\ \sqrt{2}_{277°\,30'}$

Representación del polígono (cuadrado):



19 **Calcula** $\bar{z}^5$ **y** $\sqrt[4]{\bar{z}}$**, siendo** $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Primero, pasamos z a forma polar:

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$tg\ \alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}\ \to\ \alpha=120° \ \text{ porque } z \text{ está en el segundo cuadrante.}$$

Luego $z=1_{120°}$.

$$\bar{z}^5=(1_{-120°})^5=(1_{240°})^5=(1^5)_{5\cdot 240°}=1_{120°}=z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\sqrt[4]{\bar{z}}=\sqrt[4]{1_{240°}}=(\sqrt[4]{1})_{(240°+360°\,k)/4};\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Si $k=0\ \to\ z_1=1_{60°}=1\,(cos\ 60°+i\ sen\ 60°)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k=1\ \to\ z_2=1_{150°}=1\,(cos\ 150°+i\ sen\ 150°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Si $k=2\ \to\ z_3=1_{240°}=1\,(cos\ 240°+i\ sen\ 240°)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k=3\ \to\ z_4=1_{330°}=1\,(cos\ 330°+i\ sen\ 330°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

Página 163

Ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

20 **Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $z^2 + 4 = 0$

b) $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$

d) $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \quad \begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2} \quad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{19}\,i}{2} \quad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

21 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $z^5 + 32 = 0$ **b)** $iz^3 - 27 = 0$ **c)** $z^3 + 8i = 0$ **d)** $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^5 + 32 = 0 \rightarrow z^5 = -32$

$z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/5} = 2_{36° + 72°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36°} \quad 2_{108°} \quad 2_{180°} \quad 2_{252°} \quad 2_{324°}$

b) $iz^3 - 27 = 0 \rightarrow z^3 + 27i = 0 \rightarrow z^3 = -27i$

$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\,k)/3} = 3_{90° + 120°\,k};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°} \quad 3_{210°} \quad 3_{330°}$

c) $z^3 + 8i = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270°}} = 2_{(270° + 360°\,k)/3} = 2_{90° + 120°\,k};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{90°} = 2i \quad 2_{210°} = -\sqrt{3} - i \quad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

d) $iz^4 + 4 = 0 \rightarrow z^4 - 4i = 0 \rightarrow z^4 = 4i$

$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90°}} = \sqrt{2}_{(90° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{22°\,30' + 90°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{22°\,30'} = 1,3 + 0,5i$

$\sqrt{2}_{112°\,30'} = -0,5 + 1,3i$

$\sqrt{2}_{202°\,30'} = -1,3 - 0,5i$

$\sqrt{2}_{292°\,30'} = 0,5 - 1,3i$

22 **Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:**

a) $z^2 + 4i = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0 \rightarrow z^2 = -4i \rightarrow z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270°}} \rightarrow z = 2_{(270° + 360°\,k)/2}$; $k = 0, 1$

Las dos raíces son: $z_1 = 2_{135°}$, $z_2 = 2_{315°}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{1 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ $\begin{cases} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{cases}$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm\sqrt{5}\,i$ $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{5}\,i \\ z_2 = \sqrt{5}\,i \end{cases}$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 13t + 36 = 0$

$t = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \dfrac{-13 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} t = -4 \\ t = -9 \end{cases}$

$z^2 = -4 \rightarrow z = \pm 2i$

$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm 3i$

Las soluciones son: $2i = 2_{90°}$; $-2i = 2_{270°}$; $3i = 3_{90°}$; $-3i = 3_{270°}$

23 **Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^4 + 16 = 0$

c) $z^4 - 8z = 0$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}} = 1_{360°\,k/4} = 1_{90°k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{0°} = 1$

$1_{90°} = i$

$1_{180°} = -1$

$1_{270°} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0$ $\begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{(360°\,k)/3} = 2_{120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son: 0; $2_{0°} = 2$; $2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i$; $2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$

24 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3z - \ \ w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases} \xrightarrow{-3\cdot(1.^a)} \begin{cases} -9z + 3w = -3 + 3i \\ \ \ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-7z = 5 - 5i \ \to \ z = -\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7}i$

$3\left(-\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{7}i\right) - w = 1 - i \ \to \ w = -\dfrac{15}{7} + \dfrac{15}{7}i - 1 + i = -\dfrac{22}{7} + \dfrac{22}{7}i$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + \ \ w = 6 - i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^a)} \begin{cases} -2z - 6w = -16 + 6i \\ \ \ 2z + \ \ w = 6 - i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-5w = -10 + 5i \ \to \ w = 2 - i$

$z + 3(2 - i) = 8 - 3i \ \to \ z = 8 - 3i - 6 + 3i = 2$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases} \xrightarrow{2\cdot(2.^a)} \begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 6z - 4w = 22i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $11z = 33i \ \to \ z = 3i$

$5(3i) + 4w = 11i \ \to \ 4w = -4i \ \to \ w = -i$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^a)} \begin{cases} -4z + 10w = 10 - 4i \\ \ \ 4z - \ \ 3w = -3 - 10i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $7w = 7 - 14i \ \to \ w = 1 - 2i$

$2z - 5(1 - 2i) = -5 + 2i \ \to \ 2z = -5 + 2i + 5 - 10i \ \to \ z = -4i$

Para resolver

25 Calcula a y b de modo que se verifique:

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$(a + bi)^2 = 3 + 4i \ \to \ a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \ \to$

$\to \ a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \ \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \ \to \ b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a} \end{cases}$

$a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \ \to \ a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \ \to \ a^4 - 4 = 3a^2 \ \to \ a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \ \to \ a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$a = -2 \ \to \ b = -1$

$a = 2 \ \to \ b = 1$

26 **Halla el valor de b para que el producto $(3-6i)(4+bi)$ sea un número:**

a) imaginario puro. **b) real.**

$$(3-6i)(4+bi) = 12+3bi-24i+6b = (12+6b)+(3b-24)\,i$$

a) $12+6b=0 \to b=-2$

b) $3b-24=0 \to b=8$

27 **Determina a para que $(a-2i)^2$ sea un número imaginario puro.**

$$(a-2i)^2 = a^2+4i^2-4ai = (a^2-4)-4ai$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$a^2-4=0 \to a=\pm 2 \begin{cases} a_1=-2 \\ a_2=2 \end{cases}$$

28 **Calcula x para que el resultado de $(x+2+ix)(x-i)$ sea un número real.**

$(x+2+ix)(x-i) = x^2-xi+2x-2i+x^2i-xi^2 =$

$= x^2-xi+2x-2i+ix^2+x = (x^2+3x)+(x^2-x-2)\,i$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2-x-2=0 \to x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

29 **Calcula el valor que debe tener a para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.**

$$z=\frac{a+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a+ai+2i+2i^2}{1+1}=\frac{a-2+(a+2)\,i}{2}$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+4}{2}} \to \sqrt{\frac{a^2+4}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{a^2+4}{2}=\frac{9}{2} \to a^2=5 \begin{cases} a_1=\sqrt{5} \\ a_2=-\sqrt{5} \end{cases}$$

30 **La suma de dos números complejos es $3+i$. La parte real del primero es 2 y el cociente entre este y el segundo es un número real. Hállalos.**

Sean $z=2+bi$ y $w=c+di$ los números complejos buscados.

$$z+w=3+i \to 2+bi+c+di=3+i \to \begin{cases} 2+c=3 \to c=1 \\ b+d=1 \ (1) \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\frac{z}{w}=k \to z=kw \to 2+bi=k(1+di) \to \begin{cases} 2=k \\ bi=kdi \to b=2d \end{cases}$$

Ahora sustituimos en (1):

$$b+d=1 \to 2d+d=1 \to d=\frac{1}{3} \to b=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Los números buscados son $z=2+\frac{2}{3}i$ y $w=1+\frac{1}{3}i$.

31 **Si $z=(i^0+i^1+i^2+i^3+\ldots+i^{10})(3+ki)$, halla el valor de k para que el módulo de z sea 5.**

$i^0+i^1+\ldots+i^{10}=\frac{i\cdot i^{10}-i^0}{i-1}$ porque es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón i.

$$\frac{i\cdot i^{10}-i^0}{i-1}=\frac{i^{11}-i^0}{i-1}=\frac{-i-1}{i-1}=\frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{-i^2-i-i-1}{i^2-1}=\frac{-2i}{-2}=i$$

Por tanto: $z = i \cdot (3 + ki) = -k + 3i$

$|z| = \sqrt{(-k)^2 + 3^2} = \sqrt{k^2 + 9}$

$|z| = 5 \to \sqrt{k^2 + 9} = 5 \to k_1 = 2,\ k_2 = -2$

32 **¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x - 4i}{x + i}$?**

$$\frac{x - 4i}{x + i} = \frac{(x - 4i)(x - i)}{(x + i)(x - i)} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} + \frac{-5x}{x^2 + 1} i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = 0 \to x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

33 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.**

* ***Llámalos r_α y s_β y escribe las condiciones que los relacionan.***

$\frac{r}{s} = 3$

$r + s = 8$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$

$\alpha - \beta = 0°$

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ 4s = 8;\ s = 2;\ r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \beta = \frac{\pi}{6};\ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

34 **El producto de dos números complejos es $2_{90°}$ y el cubo del primero dividido por el otro es $(1/2)_{0°}$. Hállalos.**

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 2_{90°} \begin{cases} r \cdot s = 2 \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{s_\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0°} \begin{cases} r^3/s = \frac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = 90° \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ s = 2r^3 \end{array}\right\} r \cdot 2r^3 = 2 \to r^4 = 1 \to r = \begin{cases} 1 \to s = 2 \cdot 1^3 = 2 \\ -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90° \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{array}\right\} \to 4\alpha = 90° + 360° k \to \alpha = \frac{90° + 360° k}{4};\ k = 0, 1, 2, 3$$

$\beta = 90° - \alpha$

Hay cuatro soluciones:

$z_1 = 1_{22°\,30'} \to w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67°\,30'} = 2_{67°\,30'}$

$z_2 = 1_{112°\,30'} \to w_2 = 2_{337°\,30'}$

$z_3 = 1_{202°\,30'} \to w_3 = 2_{607°\,30'} = 2_{247°\,30'}$

$z_4 = 1_{292°\,30'} \to w_4 = 2_{877°\,30'} = 2_{157°\,30'}$

35 **El producto de dos números complejos es –27 y uno de ellos es igual al cuadrado del otro. Calcúlalos.**

Llamemos z y w a los complejos buscados.

$$\begin{cases} zw = -27 \to w^3 = -27 \to w = \sqrt[3]{-27} \to w = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° \cdot 360° k)/3};\ k = 0, 1, 2 \\ z = w^2 \end{cases}$$

- Si $k = 0 \to w_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i$

  $z_1 = w_1^2 = (3_{60°})^2 = 9_{120°} = 9(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2} i$

- Si $k = 1 \to w_2 = 3_{180°} = 3(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = -3$

  $z_2 = w_2^2 = (3_{180°})^2 = 9_{0°} = 9(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 9$

- Si $k = 2 \to w_3 = 3_{300°} = 3(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i$

  $z_3 = w_3^2 = (3_{300°})^2 = 9_{240°} = 9(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{2} i$

Hemos obtenido tres soluciones del problema.

36 **Halla, en función de x, el módulo de $z = \dfrac{1+xi}{1-xi}$.**

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x.

$$|z| = \left| \frac{1+xi}{1-xi} \right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

O bien:

$$z = \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{(1+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)} = \frac{1+x^2+2xi}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1$$

37 **Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y que la suma de sus módulos es 10.**

$$\left.\begin{array}{l} z + \overline{z} = 8 \\ |z| + |\overline{z}| = 10 \end{array}\right\} \text{ Como } |z| = |\overline{z}| \to |z| = 5$$

Si llamamos:

$z = a + bi \to \overline{z} = a - bi$

$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \to a = 4$

$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \to 16 + b^2 = 25 \to b^2 = 9 \to b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay dos soluciones:

$z_1 = 4 + 3i \to \overline{z}_1 = 4 - 3i$

$z_2 = 4 - 3i \to \overline{z}_2 = 4 + 3i$

38 **Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.**

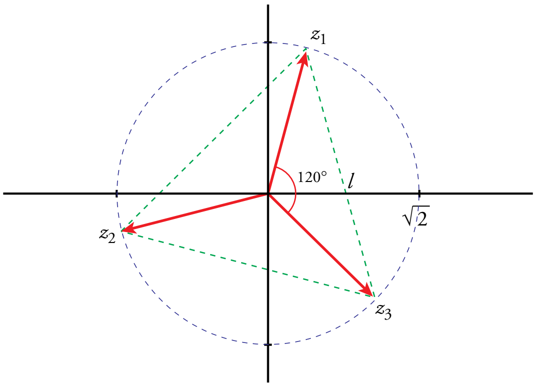
$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225°}} = \sqrt{2}_{(225° + 360°\, k)/3} = \sqrt{2}_{75° + 120°\, k}$

Las tres raíces son:

$z_1 = \sqrt{2}_{75°}$

$z_2 = \sqrt{2}_{195°}$

$z_3 = \sqrt{2}_{315°}$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, cos\, 120° = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$

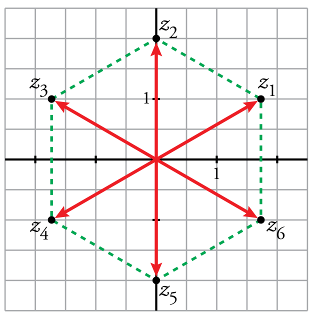
$l = \sqrt{6}$

39 **Dibuja el hexágono cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[6]{-64}$.**
¿Obtienes el mismo hexágono con los afijos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?
Compruébalo y representa los resultados obtenidos.

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\, k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{30°} = 2\,(cos\, 30° + i\, sen\, 30°) = \sqrt{3} + i$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{90°} = 2\,(cos\, 90° + i\, sen\, 90°) = 2i$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{150°} = 2\,(cos\, 150° + i\, sen\, 150°) = -\sqrt{3} + i$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{210°} = 2\,(cos\, 210° + i\, sen\, 210°) = -\sqrt{3} - i$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270°} = 2\,(cos\, 270° + i\, sen\, 270°) = -2i$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330°} = 2\,(cos\, 330° + i\, sen\, 330°) = \sqrt{3} - i$

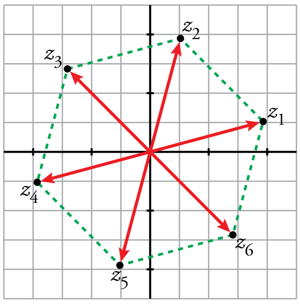
Representación gráfica:



No se obtiene el mismo hexágono porque las raíces sextas de dos números distintos son diferentes. Se obtienen hexágonos girados con respecto al primero. Veamos los siguientes casos:

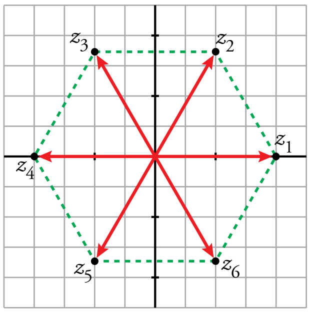
$\sqrt[6]{64i} = \sqrt[6]{64_{90°}} = 2_{(90° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{15°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{75°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{135°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{195°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{255°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{315°}$



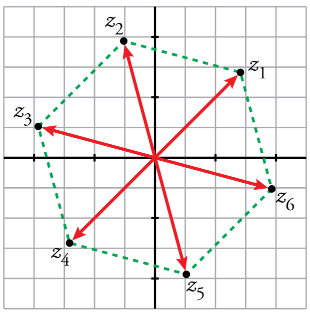
$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0°}} = 2_{(0° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{0°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{60°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{120°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{180°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{240°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{300°}$

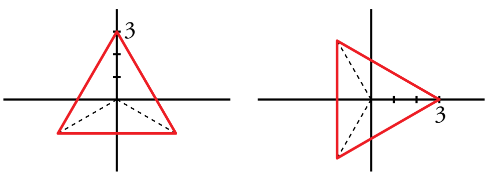


$\sqrt[6]{-64i} = \sqrt[6]{64_{270°}} = 2_{(270° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{45°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{105°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{165°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{225°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{285°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{345°}$



40 **Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos triángulos equiláteros.**



Como los afijos están en los vértices de un triángulo equilátero, los números complejos son:

a) $z_1 = 3_{90°} = 3i$

$z_2 = 3_{210°} = 3\,(cos\ 210° + i\ sen\ 210°) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$z_3 = 3_{330°} = 3\,(cos\ 330° + i\ sen\ 330°) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

b) $z_1 = 3_{0°} = 3$

$z_2 = 3_{120°} = 3\,(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = 3_{240°} = 3\,(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

41 **¿Pueden ser las raíces de un complejo z los números $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ y $2_{316°}$? En caso afirmativo, halla z.**

* ***Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.***

$$28° + 72° = 100° \qquad 100° + 72° = 172°$$
$$172° + 72° = 244° \qquad 244° + 72° = 316°$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28°})^5 = 32_{140°}$$

42 **El número complejo $3_{40°}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.**

Los otros vértices serán:

$$3_{112°} \qquad 3_{184°} \qquad 3_{256°} \qquad 3_{328°}$$

El número será: $z = (3_{40°})^5 = 243$

43 **Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.**

$1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

Las otras raíces cúbicas son:

$\sqrt{2}_{45° + 120°} = \sqrt{2}_{165°} \qquad \sqrt{2}_{165° + 120°} = \sqrt{2}_{285°}$

Hallamos z:

$$z = (1 + i)^3 = (\sqrt{2}_{45°})^3 = \sqrt{8}_{135°} = \sqrt{8}\,(cos\,135° + i\,sen\,135°) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

44 **Busca dos números complejos cuya suma sea $-3 + 3i$ y que una de las raíces cuadradas de su cociente sea $2i$.**

Sean z y w los números complejos buscados. Entonces,

$$\begin{cases} z + w = -3 + 3i \\ \dfrac{z}{w} = (2i)^2 \end{cases} \to \begin{cases} z + w = -3 + 3i \to -4w + w = -3 + 3i \to w = 1 - i \\ z = -4w \end{cases}$$

$z = -4(1 - i) = -4 + 4i$

45 **Calcula el valor que debe tener b para que el módulo de $\dfrac{-3 + bi}{1 - 2i}$ sea igual a $\sqrt{2}$.**

$$\frac{-3 + bi}{1 - 2i} = \frac{(-3 + bi)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-3 - 6i + bi + 2bi^2}{1 + 4} = \frac{-3 - 2b}{14} + \frac{b - 6}{14}i$$

Como el módulo de este número debe ser $\sqrt{2}$, obtenemos:

$$\sqrt{\left(\frac{-3 - 2b}{14}\right)^2 + \left(\frac{b - 6}{14}\right)^2} = \sqrt{2} \to \frac{\sqrt{5b^2 + 45}}{14} = \sqrt{2} \to$$

$$\to \frac{5b^2 + 45}{196} = 2 \to 5b^2 = 347 \to b_1 = \sqrt{\frac{347}{5}},\; b_2 = -\sqrt{\frac{347}{5}}$$

46 **Expresa $cos\,4\alpha$ y $sen\,4\alpha$ en función de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$, utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.**

$$cos\,4\alpha + i\,sen\,4\alpha = (cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)^4 = cos^4\alpha + 4i\,cos^3\alpha\,sen\,\alpha - 6\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha - 4i\,cos\,\alpha\,sen^3\alpha + sen^4\alpha =$$
$$= cos^4\alpha - 6\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha + sen^4\alpha + i(4\,cos^3\alpha\,sen\,\alpha - 4\,cos\,\alpha\,sen^3\alpha)$$

De aquí obtenemos que:

$cos\,4\alpha = cos^4\alpha - 6\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha + sen^4\alpha$

$sen\,4\alpha = 4\,cos^3\alpha\,sen\,\alpha - 4\,cos\,\alpha\,sen^3\alpha$

Página 164

47 **Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.**

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45°}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por $1_{72°}$:

$z_2 = 2_{117°} = -0{,}91 + 1{,}78i \qquad z_3 = 2_{189°} = -1{,}97 - 0{,}31i$

$z_4 = 2_{261°} = -0{,}31 - 1{,}97i \qquad z_5 = 2_{333°} = 1{,}78 - 0{,}91i$

Los otros cuatro vértices serán:

$(-0{,}91;\ 1{,}78) \quad (-1{,}97;\ -0{,}31) \quad (-0{,}31;\ -1{,}97) \quad (1{,}78;\ -0{,}91)$

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:

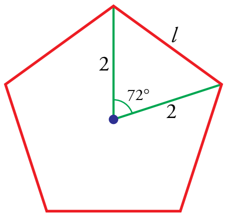
$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\cos 72°$

$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0{,}31$

$l^2 = 8 - 1{,}24$

$l^2 = 6{,}76$

$l = 2{,}6$ unidades



48 **El afijo de $3 + 2i$ es uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas. Halla los otros vértices y el área del cuadrado.**

Si tenemos un vértice de un cuadrado centrado en el origen, para calcular los otros vértices tenemos que multiplicar por $i = 1_{90°}$ y así hacer giros de 90°.

$z_1 = 3 + 2i \qquad z_2 = (3 + 2i)i = -2 + 3i \qquad z_3 = (-2 + 3i)i = -3 - 2i \qquad z_4 = (-3 - 2i)i = 2 - 3i$

Los otros vértices serán: $(-2, 3)$, $(-3, -2)$ y $(2, -3)$.

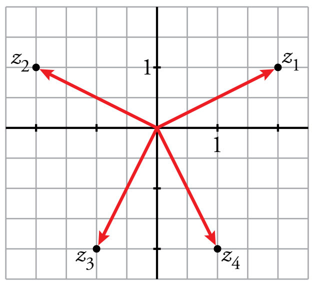
La diagonal del cuadrado mide: $2|z_1| = 2\sqrt{9 + 4} = 2\sqrt{13}$ porque está centrado en el origen.

El área del cuadrado es (usando la fórmula del área de un rombo):

$$A = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 26 \text{ u}^2$$

49 **¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.**

No, porque sus afijos no se encuentran en los vértices de un polígono regular centrado en el origen. Podemos comprobarlo en el siguiente gráfico:



50 **Sean A, B, C, D los afijos de los números $z_0 = 4$; $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1$; $z_3 = \frac{1+i}{2}z_2$.**

a) ¿Cuáles son las coordenadas de A, B, C, D?

b) Calcula $d_0 = |z_0 - z_1|$; $d_1 = |z_1 - z_2|$; $d_2 = |z_2 - z_3|$ e interpreta geométricamente estos números.

c) ¿Cuánto mide la línea poligonal $ABCD$?

a) $z_0 = 4 \qquad z_1 = \frac{1+i}{2} \cdot 4 = 2 + 2i \qquad z_2 = \frac{1+i}{2} \cdot (2 + 2i) = (1 + i)^2 = 2i \qquad z_3 = \frac{1+i}{2} \cdot 2i = -1 + i$

Los afijos son: $A(4, 0)$; $B(2, 2)$; $C(0, 2)$; $D(-1, 1)$.

b) $d_0 = |4-(2+2i)| = |2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$d_1 = |2+2i-2i| = |2| = 2$

$d_2 = |2i-(-1+i)| = |1+i| = \sqrt{2}$

Las distancias calculadas forman una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) La línea poligonal $ABCD$ mide $2\sqrt{2}+2+\sqrt{2} = 3\sqrt{2}+2$

51 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $1+i$ y $1-i$ **b) $5i$ y $-5i$** **c) $2-3i$ y $2+3i$** **d) $4-i$ y $1+2i$**

a) $[x-(1+i)][x-(1-i)] = x^2-(1-i)x-(1+i)x+(1-i^2) =$

$= x^2-(1-i+1+i)x+(1-i^2) = x^2-2x+2 = 0$

b) $(x-5i)(x+5i) = x^2+5xi-5xi-25i^2 = x^2+25 = 0$

c) $[x-(2-3i)][x-(2+3i)] = (x-2-3i)(x-2+3i) =$

$= x^2-2x+3xi-2x+4-6i-3xi+6i-9i^2 = x^2-4x+13 = 0$

d) En este caso, la ecuación de segundo grado no tendrá coeficientes reales porque las soluciones no son números complejos conjugados.

$[x-(4-i)][x-(1+2i)] = (x-4+i)(x-1-2i) = x^2-(5+i)x+6+7i = 0$

52 Halla el valor que debe tener m para que $1-2i$ sea una solución de la ecuación $z^2-mz+5=0$.

Calculamos las soluciones de la ecuación:

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2-20}}{2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2-20}{4}}$$

Si $\dfrac{m}{2} = 1 \to m = 2 \to \dfrac{m^2-20}{4} = \dfrac{4-20}{4} = -4$

Comprobamos ahora cuáles son las soluciones si $m=2$.

$z = \dfrac{2}{2} \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

Luego, en efecto, $1-2i$ es una de ellas.

53 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2z+3i-2 = 3+zi$

b) $(5+i)z = 3z+4i-2$

c) $(1-i)z^2 = 1+i$

d) $(i^{23}-i^{37})z = 2i^{22}-3i^{19}$

a) $2z-zi = 3-3i+2 \to z(2-i) = 5-3i \to z = \dfrac{5-3i}{2-i} = \dfrac{(5-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{13-i}{5}$

b) $(5+i)z-3z = 4i-2 \to (2+i)z = 4i-2 \to z = \dfrac{4i-2}{2+i} = \dfrac{2i(2+i)}{2+i} = 2i$

c) $z^2 = \dfrac{1+i}{1-i} \to z^2 = \dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \to z^2 = \dfrac{(1+i)^2}{2}$

$z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $(-i-i)z = 2(-1)-3(-i) \to -2iz = -2+3i \to z = \dfrac{-2+3i}{-2i} = -\dfrac{3}{2}-i$

54 **Halla los números complejos z y w que verifican cada uno de estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{array}\right\}$ Sumando miembro a miembro:

$2z = -4 + 6i \ \rightarrow \ z = -2 + 3i$

$w = (-1 + 2i) - (-2 + 3i) = 1 - i$

Solución: $z = -2 + 3i$; $w = 1 - i$

b) $\left.\begin{array}{r} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la 2.ª ecuación y sumamos:

$\left.\begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ -2iz - 2w = -10 - 10i \end{array}\right\}$ $(1 - 2i)z = -8 - 9i \ \rightarrow \ z = \dfrac{-8 - 9i}{1 - 2i} = 2 - 5i$

$w = \dfrac{2 + i - (2 - 5i)}{2} = \dfrac{6i}{2} = 3i$

Solución: $z = 2 - 5i$; $w = 3i$

55 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2 + i)z + iw = 3 - 3i \end{cases}$

a) Multiplicamos por $-i$ la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} -iz - iw = i + 2 \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$-iw + (1 - i)w = i + 2 + 1 + 3i \ \rightarrow \ (1 - 2i)w = 3 + 4i$

$w = \dfrac{3 + 4i}{1 - 2i} = \dfrac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{1^2 - 2i^2} = \dfrac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$

$z = -1 + 2i - w = -1 + 2i + 1 - 2i = 0$

Solución: $z = 0$; $w = -1 + 2i$

b) Multiplicamos por i la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} zi - wi = 5i + 3 \\ (2 + i)z + wi = 3 - 3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$zi + (2 + i)z = 5i + 3 + 3 - 3i \ \rightarrow \ (2 + 2i)z = 6 + 2i$

$z = \dfrac{6 + 2i}{2 + 2i} = \dfrac{(6 + 2i)(2 - 2i)}{4 - 4i^2} = \dfrac{16 - 8i}{8} = 2 - i$

$w = z - 5 + 3i = 2 - i - 5 + 3i = -3 + 2i$

Solución: $z = 2 - i$; $w = -3 + 2i$

56 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 + z^2 - 2 = 0$

b) $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

a) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$$z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z^2+2z+2) \rightarrow z_1 = 1$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \rightarrow z_2 = -1+i,\ z_3 = -1-i$$

b) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z+1)(z^2-4z+5) \rightarrow z_1 = -1$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \rightarrow z_2 = 2+i,\ z_3 = 2-i$$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \rightarrow z_1 = 3i,\ z_2 = -3i$$

$$z^2 = 16 \rightarrow z = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow z_3 = 4,\ z_4 = -4$$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$$z^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

$$z^2 = -1 + i = \sqrt{2}_{135°} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{135°}} = \sqrt[4]{2}_{(135 + 360° k)/2};\ k = 0,\ 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5°}$$

$$z^2 = -1 - i = \sqrt{2}_{225°} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{225°}} = \sqrt[4]{2}_{(225° + 360° k)/2};\ k = 0,\ 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{112,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{292,5°}$$

57 Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Buscamos los números tales que $z^2 = \overline{z}$.

En forma polar, $(r_\alpha)^2 = r_{-\alpha}$

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ 2\alpha = -\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\alpha = 0° + 360° k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 120°,\ \alpha_3 = 240° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{120°},\ z_4 = 1_{240°} \text{ son las demás soluciones} \end{cases}$$

(Para calcular los valores de α hemos igualado 3α a 0°, 360° y 720°.)

Los números son:

$z_1 = 0 \quad z_2 = 1_{0°} \quad z_3 = 1_{120°} \quad z_4 = 1_{240°}$

Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades entre complejos

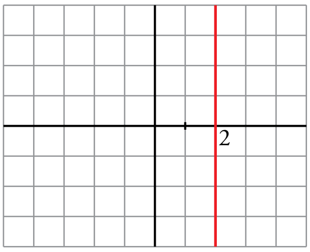
58 **Representa y describe con palabras cada una de estas familias de números complejos:**

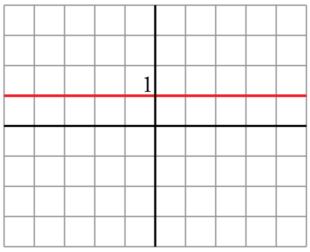
a) ***Re z*** **= 2** b) ***Im z*** **= 1**

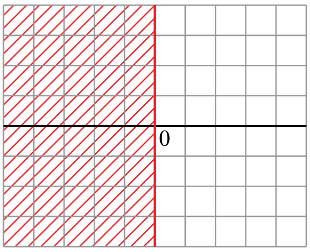
c) ***Re z*** **≤ 0** d) **–1 ≤ *Im z* ≤ 3**

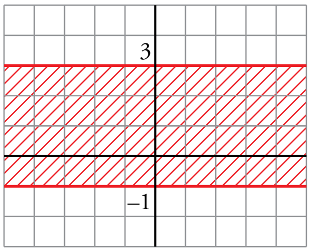
e) **–2 < *Re z* < 5** f) **|*z*| ≤ 3**

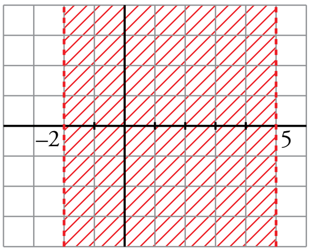
g) ***Arg z*** **= 45°** h) **0° ≤ *Arg z* ≤ 90°**

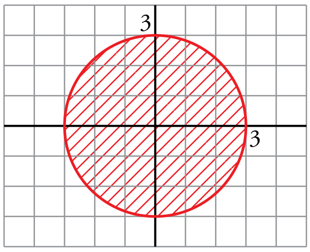
a)


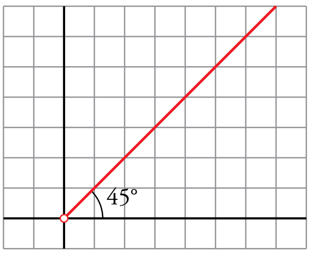
b)


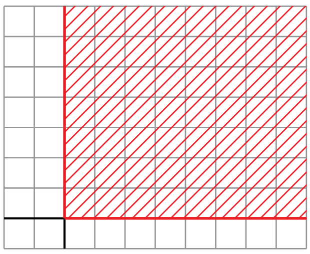
c)


d)


e)


f)


g)


h)


59 **Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.**

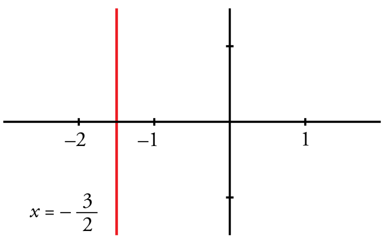
* ***Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.***

Llamamos $z = x + iy$.

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así, $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Representación:

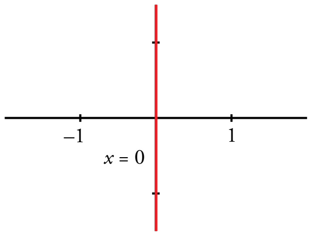


60 **Representa los números complejos que verifican:**

a) $\bar{z} = -z$ **b)** $|z + \bar{z}| = 3$ **c)** $|z - \bar{z}| = 4$

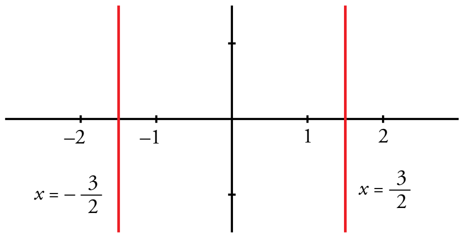
a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)



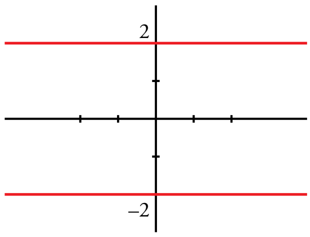
b) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$|z + \bar{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = 3/2 \\ 2x = -3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$

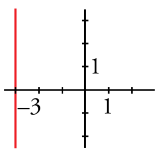


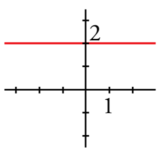
c) $z - \bar{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

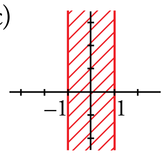
$|z - \bar{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \begin{cases} 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ 2y = -4 \rightarrow y = -2 \end{cases}$

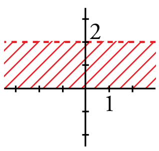


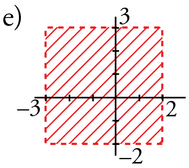
61 **Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:**

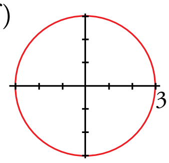
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

* ***En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.***

a) $Re\, z = -3$ b) $Im\, z = 2$ c) $-1 \le Re\, z \le 1$

d) $0 \le Im\, z < 2$ e) $\begin{cases} -3 < Re\, z < 2 \\ -2 < Im\, z < 3 \end{cases}$ f) $|z| = 3$

Cuestiones teóricas

62 **¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0°?**

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

63 **Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180°}$ y $r_{360° - \alpha}$?**

$r_{\alpha + 180°} = -z$ (opuesto de z)

$r_{360° - \alpha} = \overline{z}$ (conjugado de z)

64 **Comprueba que:**

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{kz} = k\,\overline{z}$, **con** $k \in \mathbb{R}$

$z = a + bi = r_\alpha \ \rightarrow\ \overline{z} = a - bi = r_{360° - \alpha}$

$w = c + di = r'_\beta \ \rightarrow\ \overline{w} = c - di = r'_{360° - \beta}$

a) $z + w = (a + c) + (b + d)\,i \ \rightarrow\ \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)\,i$

$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)\,i = \overline{z + w}$

b) $x \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \ \rightarrow\ \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)}$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360° - \alpha + 360° - \beta} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$

c) $kz = ka + kbi \ \rightarrow\ \overline{kz} = ka - kbi$

$k\overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$

65 **Demuestra que** $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360° - \alpha} \ \rightarrow\ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

66 **El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.**

Sí. Por ejemplo:

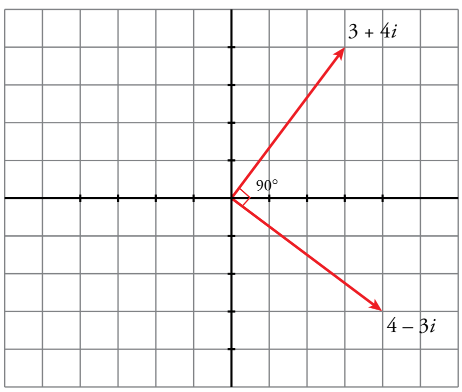
$z = i,\ \ w = i$

$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$

Página 165

67 **Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90°.**

$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$



68 **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?**

Se diferencian en 180°. Si el argumento del número es α, el de su opuesto es:

$$180° + \alpha$$

69 **¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$?**

* ***Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.***

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = a - bi$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a^2+b^2} = a \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} = -b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a}{a} = a^2+b^2 \;\to\; a^2+b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\ \text{Ha de tener módulo 1.} \end{array}$$

70 **Sean z y w dos números complejos tales que $|z| = \sqrt{2}$ y $|w| = \sqrt{2}$. Justifica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:**

a) $|z + w| = 2\sqrt{2}$ **b)** $|3z| = 3\sqrt{2}$ **c)** $|z \cdot w| = 2$ **d)** $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$:

$z = a + bi \;\to\; z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

a) Falso, porque $z + w$ representa la diagonal del cuadrado cuyos lados son z y w. Por tanto, su longitud no puede ser la suma de las longitudes de los lados.

b) Verdadero.

Si $z = a + bi \;\to\; 3z = 3a + 3bi$

$|3z| = |3a + 3bi| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2+b^2} = 3|z| = 3\sqrt{2}$

c) Verdadero. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos, tal como hemos visto en las operaciones en forma polar.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

d) Verdadero. En forma polar $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\dfrac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y, por tanto, el módulo del inverso de un número complejo es el inverso del módulo.

$\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

71 **Si $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$, ¿qué relación debe existir entre α y β para que ocurra cada una de las siguientes afirmaciones?**

a) $z \cdot w$ es imaginario puro.

b) z/w es un número real.

c) $z \cdot w$ está en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

a) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Por tanto $\alpha + \beta = 90°$ o $\alpha + \beta = 270°$, es decir, $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 450° - \alpha$ o $\beta = 270° - \alpha$, $\beta = 630° - \alpha$.

b) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$

Por tanto, $\alpha - \beta = 0°$ o $\alpha - \beta = 180°$, es decir, $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha - 180°$.

c) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Por tanto, $\alpha + \beta = 45°$ o $\alpha + \beta = 225°$, es decir, $\beta = 45° - \alpha$, $\beta = 405° - \alpha$ o $\beta = 225° - \alpha$, $\beta = 585° - \alpha$.

72 Sea $z \neq 0$ un número complejo y $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Justifica que los afijos de z, zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$$

El afijo de $zw = z \cdot (1_{120°})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 120° respecto del origen de coordenadas.

De la misma forma, el afijo de $zw^2 = z \cdot (1_{240°})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 240° respecto del origen de coordenadas.

Por tanto, los afijos de los tres números complejos están en los vértices de un triángulo equilátero.

Para profundizar

73 Halla los números complejos cuyo cubo coincide con el cuadrado de su conjugado.

Si el número complejo es r_α tenemos que:

$$(r_\alpha)^3 = (r_{-\alpha})^2 \rightarrow (r^3)_{3\alpha} = (r^2)_{-2\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^3 - r^2 = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2(r-1) = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 72°,\ \alpha_3 = 144°,\ \alpha_4 = 216°,\ \alpha_5 = 288° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{72°},\ z_4 = 1_{144°},\ z_5 = 1_{216°},\ z_6 = 1_{288°} \text{ son las demás soluciones.} \end{cases}$$

Los números son: 0, $1_{0°}$, $1_{72°}$, $1_{144°}$, $1_{216°}$ y $1_{288°}$.

74 Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \rightarrow \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \rightarrow \begin{cases} \frac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{cases}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\left.\right\} \ \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \ \to \ 16 = r^4 \ \to \ \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\} \ \alpha + 3\alpha = 180° \ \to \ 4\alpha = 180° \ \to \ \begin{cases} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{cases}$$

Por tanto, $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

75 **Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:**

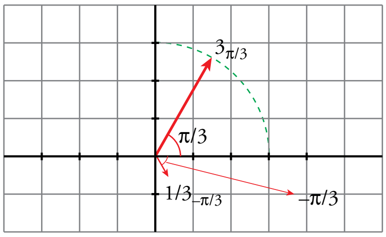
a) $\boldsymbol{3_{\pi/3}}$

b) $\boldsymbol{2i}$

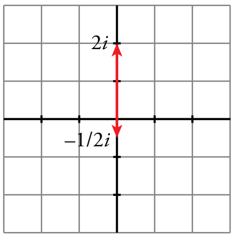
c) $\boldsymbol{-1 + i}$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

a) $\dfrac{1}{3_{\pi/3}} = \dfrac{1_{0°}}{3_{\pi/3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{5\pi/3}$



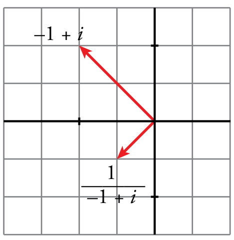
b) $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2} = \dfrac{-1}{2}i = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{270°}$



c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

$$\frac{1}{-1+i} = \frac{1_{0°}}{\sqrt{2}_{135°}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225°} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Si $z = r_\alpha$ entonces $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{r}\right)_{360° - \alpha}$.

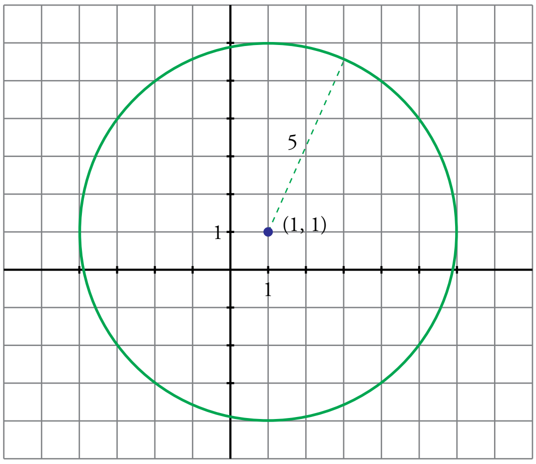


76 **Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?**

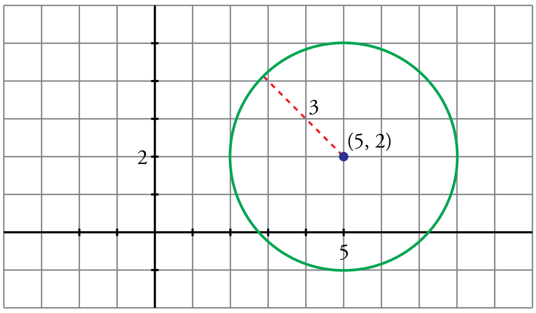
a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.



b) Circunferencia con centro en (5, 2) y radio 3.



77 **Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.**

$|z - (1 + i)| = 3$

78 **La suma de los números complejos $z = a + 3i$ y $w = b - 5i$ dividida por su diferencia es un número imaginario puro. Prueba que z y w han de tener el mismo módulo.**

$z + w = a + b - 2i$

$z - w = a - b + 8i$

$\dfrac{a + b - 2i}{a - b + 8i} = ki$ con k número real $\rightarrow a + b - 2i = (a - b + 8i)ki \rightarrow$

$$\rightarrow a + b - 2i = -8k + k(a - b)\,i \rightarrow \begin{cases} a + b = -8k \\ -2 = k(a - b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = -8k \\ a - b = -\dfrac{2}{k} \end{cases}$$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos: $a^2 - b^2 = 16$

Por otro lado:

$|z| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9}$

$|w| = \sqrt{b^2 + (-5)^2} = \sqrt{b^2 + 25}$

Para que los módulos sean iguales, debería ser:

$\sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{b^2 + 25} \rightarrow a^2 + 9 = b^2 + 25 \rightarrow a^2 - b^2 = 16$ y esto es exactamente lo que hemos obtenido a partir de los datos del problema.

79 **Sea z un número complejo cuyo afijo está en la bisectriz del primer cuadrante. Comprueba que $\dfrac{z-1-i}{z+1+i}$ es un número real.**

El número complejo que está en la bisectriz del primer cuadrante es de la forma $z = a + ai$.

$$\frac{a+ai-1-i}{a+ai+1+i} = \frac{a-1+(a-1)\,i}{a+1+(a+1)\,i} = \frac{[a-1+(a-1)\,i]\cdot[a+1-(a+1)\,i]}{[a+1+(a+1)\,i]\cdot[a+1-(a+1)\,i]} =$$

$$= \frac{(a-1)\,(a+1)-(a-1)\,(a+1)\,i+(a-1)\,(a+1)\,i-(a-1)\,(a+1)\,i^2}{(a+1)^2+(a+1)^2} =$$

$$= \frac{2\,(a-1)\,(a+1)}{2\,(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}\text{, que es un número real.}$$

Autoevaluación

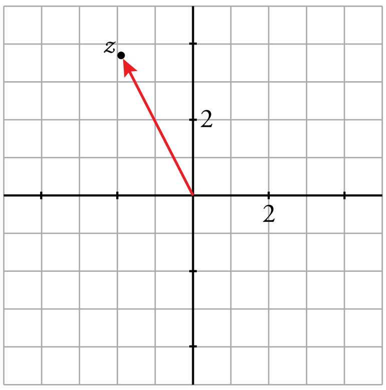
Página 165

1 **Efectúa y representa la solución.**

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)\,(2-i)}{-3+i}$$

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)\,(2-i)}{-3+i} = \frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i} = \frac{5-12i-3-i}{-3+i} =$$

$$= \frac{(2-13i)\,(-3-i)}{(-3+i)\,(-3-i)} = \frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2} = \frac{-19+37i}{10} = -\frac{19}{10}+\frac{37}{10}i$$



2 **Calcula z y expresa los resultados en forma binómica.**

$$\sqrt[4]{z} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}$$

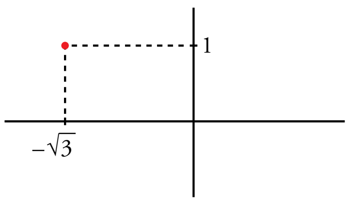
$$z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^4$$

Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2 \\ tg\ \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha = 150° \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\,i \to \sqrt{2}_{90°}$$

$$z = \left(\frac{2_{150°}}{\sqrt{2}_{90°}}\right)^4 = (\sqrt{2}_{60°})^4 = 4_{240°} \to z = 4\,(\cos 240° + i\ sen\ 240°)$$



$$z = 4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2-2\sqrt{3}\,i$$

3 Halla a y b para que se verifique la igualdad:

$$\mathbf{5(a-2i)=(3+i)(b-i)}$$

$5a-10i=3b-i^2-3i+bi \rightarrow 5a-10i=3b+1+(-3+b)i$

Igualando las componentes $\left\{\begin{matrix} 5a=3b+1 \\ -10=-3+b \end{matrix}\right\} \rightarrow b=-7,\ a=-4$

4 Resuelve la ecuación: $z^2-10z+29=0$

$z=\dfrac{10\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{10\pm4i}{2}$ $\begin{cases} z_1=5+2i \\ z_2=5-2i \end{cases}$

Soluciones; $z_1=5+2i,\ z_2=5-2i$

5 Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sea igual a 2.

$\dfrac{x+2i}{1-i}=\dfrac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2}=\dfrac{x-2+(x+2)i}{1+1}=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{x+2}{2}i$

Módulo $=\sqrt{\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2}=2 \rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+4}{2}}=2 \rightarrow \dfrac{x^2+4}{2}=4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2+4=8 \rightarrow x^2=4$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=-2$

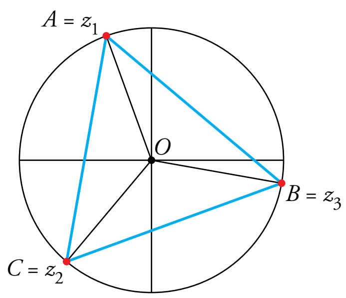
6 Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3}-4i$.

$z=\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$

Expresamos $4\sqrt{3}-4i$ en forma polar:

$\left.\begin{matrix} r=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=8 \\ tg\ \alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha=330° \end{matrix}\right\}\ 4\sqrt{3}-4i=8_{330°}$

$z=\sqrt[3]{8_{330°}}=\sqrt[3]{8}_{(330°+360°k)/3}$ $\begin{cases} z_1=2_{110°} \\ z_2=2_{230°} \\ z_3=2_{350°} \end{cases}$



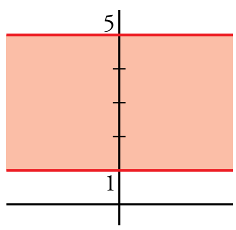
En el triángulo AOB conocemos dos lados, $\overline{OA}=\overline{OB}=2$, y el ángulo comprendido, 120°. Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, $\overline{AB}$:

$\overline{AB}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos120°=12 \rightarrow \overline{AB}=\sqrt{12}=3\sqrt{3}$ u

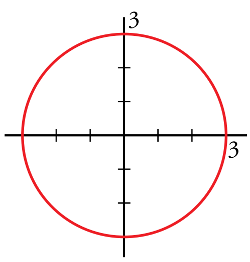
7 Representa gráficamente.

a) $1\le Im\ z\le5$ **b) $|z|=3$** **c) $z+\bar{z}=-4$**

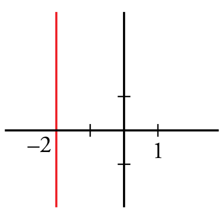
a)



b)



c) $a+bi+a-bi=-4 \rightarrow 2a=-4 \rightarrow a=-2$



8 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea $2_{150°}$ y su producto $18_{90°}$.**

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150°} \rightarrow \frac{r}{s} = 2;\ \alpha - \beta = 150°$$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90°} \rightarrow r \cdot s = 18;\ \alpha + \beta = 90°$$

Resolvemos los sistemas:

$$\begin{cases} \dfrac{r}{s} = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 150° \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 120° \\ \beta = -30° = 330° \end{cases}$$

Los números son $6_{120°}$ y $3_{330°}$. Otra posible solución es: $6_{300°}$ y $3_{150°}$.

9 **Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.**

Supongamos que $z = a + bi$. Entonces:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

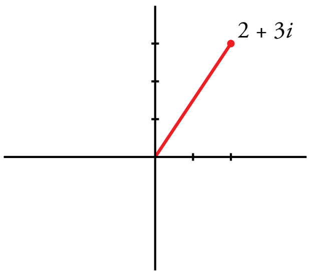
10 **Calcula el valor de $cos\ 120°$ y de $sen\ 120°$ a partir del producto $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.**

$$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1\,(cos\ 90° + i\ sen\ 90°) \cdot 1\,(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) =$$

$$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1_{120°} = 1\,(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow cos\ 120° = -\frac{1}{2};\ sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

11 **Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.**



Multiplicamos por $1_{30°} = 1\,(cos\ 30° + i\ sen\ 30°)$.

$$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30°} = (2 + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2}i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$$