En qué consisten los números complejos

Necesidad de una ampliación del campo numérico

Intentar resolver la ecuación $x^2+9=0$ nos lleva a $x=\sqrt{-9}$, expresión que no tiene sentido en el conjunto de los números reales, puesto que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea -9. Esta situación pone de manifiesto la necesidad de ampliar los conjuntos de números, de tal manera que tengan cabida estas soluciones. Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como números válidos a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más. Conceptos importantes:

- ***Unidad imaginaria***. Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Se designa por la letra i. $i=\sqrt{-1}$; $i^2=-1$. El nombre i viene de *imaginario*.
- ***Números complejos***. Son expresiones del tipo $a+bi$ donde a y b son números reales. A los números complejos se les suele denotar con las letras z, w. Así, se suele escribir $z=-4+2i$, $w=8-11i$, etcétera.
- ***Componentes***. La expresión $z=a+bi$ se llama forma binómica de un número complejo, porque tiene dos componentes: a (***componente real***) y b (***componente imaginaria***). También se les llaman, respectivamente, ***parte real*** ($\operatorname{Re} z$) y ***parte imaginaria*** ($\operatorname{Im} z$) de un número complejo (se usa más esta última terminología).
- ***Igualdad***. Dos números complejos son iguales cuando tienen la misma parte real y la misma parte imaginara. Es decir: $a+bi=a'+b'i \Leftrightarrow a=a'\,;\, b=b'$.
- El ***conjunto de los números complejos*** se designa por $\mathbb{C}$. Simbólicamente: $\mathbb{C}=\{a+bi : a,\, b\in\mathbb{R}\}$.
- ***Los números reales son complejos***. Es decir, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Los reales son número complejos cuya parte imaginaria es cero: $a+0i=a$, $a\in\mathbb{R}$.
- ***Los números imaginarios*** son los número complejos cuya parte imaginaria no es cero. Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario. En particular, reciben el nombre de ***números imaginarios puros*** los imaginarios cuya parte real es cero. Los números imaginarios puros son de la forma $0+bi=bi$, $b\in\mathbb{R}$.
- Los números complejos $a+bi$ y $-a-bi$ se llaman ***opuestos***.
- Los complejos $z=a+bi$ y $\overline{z}=a-bi$ se llaman ***conjugados***.

Resolución de una ecuación de segundo grado

Resolvamos la ecuación $z^2-6z+13=0$:

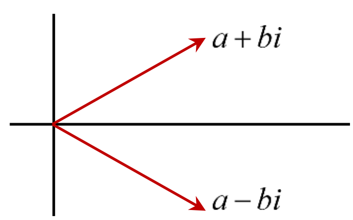
$$z^2-6z+13=0 \Leftrightarrow z=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{6\pm 4i}{2}=\begin{cases} z_1=\dfrac{6+4i}{2}=3+2i \\ z_2=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i \end{cases}$$

Como se puede observar, las soluciones, $z_1=3+2i$ y $z_2=3-2i$ son dos números imaginarios conjugados. Este resultado se puede generalizar:

> Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

Representación gráfica de los números complejos

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama eje real, y el eje Y, eje imaginario. El número complejos $a+bi$ se representa mediante el punto (a,b), que se llama su afijo, o mediante un vector (flecha) de origen $(0,0)$ y extremo (a,b). Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real, y los imaginarios puros sobre el eje imaginario. Los afijos de un número complejo y su conjugado son simétricos respecto del eje real (véase figura de la derecha).



Operaciones con números complejos en forma binómica

La suma, la resta y la multiplicación de números complejos se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2=-1$. Por ejemplo:

- $\left(\sqrt{2}-3i\right)+\left(3\sqrt{2}+5i\right)=\left(\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)+\left(-3+5\right)i=4\sqrt{2}+2i$
- $\left(3-4i\right)-\left(8-10i\right)=3-4i-8+10i=\left(3-8\right)+\left(-4+10\right)i=-5+6i$
- $\left(2-5i\right)\cdot\left(1+6i\right)=2+12i-5i-30i^2=2+12i-5i-30\left(-1\right)=2+12i-5i+30=32+7i$
- $\left(2\sqrt{2}-3i\right)\cdot\left(5-\sqrt{2}i\right)=10\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sqrt{2}i-15i+3\sqrt{2}i^2=10\sqrt{2}-4i-15i-3\sqrt{2}=7\sqrt{2}-19i$
- $\left(8-3i\right)\left(8+3i\right)=8^2-\left(3i\right)^2=64-9i^2=64-9\left(-1\right)=64+9=73$

En el último ejemplo podemos ver como multiplicando ***un número complejo por su conjugado se obtiene un número real***. Se cumple, en general, la siguiente propiedad: $z\cdot\overline{z}=\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)=a^2+b^2$. Este resultado va a ser muy útil para dividir complejos: multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último, consiguiendo así que en el denominador quede un número real. Por ejemplo:

- $\dfrac{3-2i}{2+i}=\dfrac{\left(3-2i\right)\left(2-i\right)}{2+i}=\dfrac{6-3i-4i+2i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{6-3i-4i-2}{4+1}=\dfrac{4-7i}{5}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{7}{5}i$

Por tanto, el resultado de sumar, resta, multiplicar o dividir dos números complejos es otro número complejo, que se obtiene del siguiente modo:

Suma: $\left(a+bi\right)+\left(c+di\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i$.

Resta: $\left(a+bi\right)-\left(c+di\right)=\left(a-c\right)+\left(b-d\right)i$.

Multiplicación o producto: $\left(a+bi\right)\cdot\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i$.

Multiplicación de un complejo por su conjugado: $\left(a+bi\right)\cdot\left(a-bi\right)=a^2+b^2$.

División: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{\left(a+bi\right)\left(c-di\right)}{\left(c+di\right)\left(c-di\right)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Propiedades importantes de la suma y del producto de números complejos

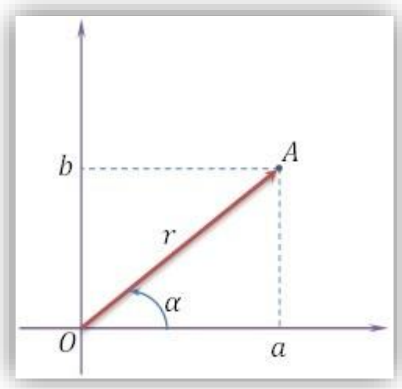
- **Elemento neutro de la suma**: para todo número complejo $a+bi\in\mathbb{C}$, existe $p+qi\in\mathbb{C}$ de tal manera que $\left(a+bi\right)+\left(p+qi\right)=a+bi$. Resultad evidente que el neutro de la suma es el número cero: $p+qi=0+0i=0$.
- **Existencia de elemento opuesto para la suma**: para todo número complejo $a+bi\in\mathbb{C}$, existe $r+si\in\mathbb{C}$ de tal manera que $\left(a+bi\right)+\left(r+si\right)=0+0i=0$. Es fácil darse cuenta de que el elemento opuesto de $a+bi$ es $-a-bi$
- **Existencia de elemento neutro del producto o elemento unidad**: para todo número complejo $a+bi\in\mathbb{C}$, existe $p+qi\in\mathbb{C}$ de tal manera que $\left(a+bi\right)\cdot\left(p+qi\right)=a+bi$. Es muy fácil darse cuenta también de que elemento neutro del producto es el número 1: $p+qi=1+0i=1$
- **Existencia de elemento inverso**: para todo número complejo $a+bi\in\mathbb{C}$ distinto de 0, existe $\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ de tal manera que $\left(a+bi\right)\cdot\left(\alpha+\beta i\right)=1+0i=1$. Este elemento inverso es único y se obtiene del siguiente modo:

$$\alpha+\beta i=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

En la práctica, las propiedades de estas operaciones permiten operar con los complejos de la misma forma que con los reales.

Números complejos en forma polar

El número complejo $z = a + bi$, en lugar de quedar determinado por sus componentes real e imaginaria, a y b, puede quedar fijado mediante su módulo y su argumento, cuyas definiciones se dan a continuación. Contemplemos antes la siguiente figura:



El ***módulo*** r de un número complejo z es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Simbólicamente lo expresamos así: $|z| = r$.

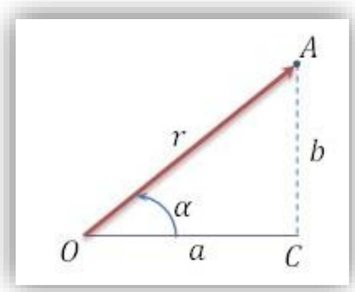
El ***argumento*** α de un número complejo z ($z \neq 0$) es el ángulo que el vector correspondiente forma con el semieje real positivo. O sea, observando la figura anterior: $\arg z = \alpha$.

La ***forma polar*** de un número complejo z viene dada por su módulo y su argumento, y se escribe así: $z = r_\alpha$.

Conviene darse cuenta de que un mismo número complejo, escrito en forma polar, tiene un número ilimitado de argumentos: todos los ángulos que se diferencian en un número entero de «vueltas». Así, el número complejo en forma polar debería escribirse $z = r_{\alpha+2\pi k}$ o bien $z = r_{\alpha+360^\circ k}$. Se acostumbra a escribir, sin embargo, $z = r_\alpha$, siendo α el llamado ***argumento principal***. Así, el argumento principal es un ángulo comprendido entre 0° y 360°.

Paso de forma binómica a polar

Si de la figura del principio en la que se representa el número complejo $z = a + bi = r_\alpha$ nos quedamos con el triángulo rectángulo que se ha formado, OCA (ver figura de la derecha), vemos que en él se cumple



$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Las igualdades anteriores permiten pasar números complejos de su forma binómica a la polar.

Ejemplo 1

Escribamos en forma polar los números complejos $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = -\sqrt{3} - i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = 2_{60^\circ} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 210^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = 2_{60^\circ}$$

En el primer caso, como la parte real y la imaginaria son positivas, el argumento se encuentra en el primer cuadrante. En el segundo caso ocurre que ambas son negativas, por lo que el argumento será un ángulo del cuarto cuadrante.

Paso de forma polar a binómica

Si lo que se quiere es pasar de la forma polar a la forma binómica, obsérvese que la figura anterior también nos proporciona las fórmulas necesarias:

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplo 2

Escribamos en forma binómica el número complejo $z = 4_{120^\circ}$.

$$4_{120^\circ} = a+bi \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4\cos 120^\circ = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \\ b = 4\operatorname{sen}120^\circ = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 4_{120^\circ} = -2+2\sqrt{3}i$$

Forma trigonométrica

Si en la forma binómica de un número complejo $z = a+bi$, sustituimos sus componentes real e imaginaria por las expresiones anteriores, queda: $z = a+bi = r\cos\alpha + i\cdot r\operatorname{sen}\alpha$. O lo que es lo mismo:

$$z = r\left(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\right)$$

La expresión anterior es la llamada ***forma trigonométrica*** de un número complejo y sirve para pasar de forma polar a forma binómica.

Operaciones con complejos en forma polar

Producto de números complejos en forma polar

El producto de dos números complejos es otro número complejo tal que su módulo es el producto de los módulos de los factores, y su argumento es la suma de los argumentos de los factores:

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = \left(r\cdot r'\right)_{\alpha+\beta}$$

La fórmula anterior proporciona la forma de realizar productos de números complejos en forma polar. Obsérvese que el resultado es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

Demostración:

Hemos de recordar, de la parte de trigonometría, los desarrollos de $\cos\left(\alpha+\beta\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\alpha+\beta\right)$:

$$\cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \quad ; \quad \operatorname{sen}\left(\alpha+\beta\right) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Supongamos pues que tenemos dos números complejos $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$. Ambos se pueden escribir en su forma trigonométrica: $z_1 = r\left(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\right)$, $z_2 = r'\left(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta\right)$. Entonces, multiplicando estas dos últimas formas:

$$z_1\cdot z_2 = r_\alpha\cdot r'_\beta = r\cdot r'\cdot\left(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\left(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta\right) =$$
$$= r\cdot r'\cdot\left(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + i\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\right)\right) =$$
$$= r\cdot r'\cdot\left(\cos\left(\alpha+\beta\right) + i\operatorname{sen}\left(\alpha+\beta\right)\right) = \left(r\cdot r'\right)_{\alpha+\beta}$$

Es importante resaltar el efecto de la multiplicación de un número complejo $z = r_\alpha$ por el número complejo 1_β. Lo que ocurre es que el número complejo z se gira un ángulo β alrededor del origen: $r_\alpha\cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$

Ejemplo 3

Vamos a multiplicar los números complejos $z_1 = 2_{30^\circ}$ y $z_2 = 3_{60^\circ}$. Además daremos el resultado en todas las formas posibles.

$$z_1 \cdot z_2 = (2\cdot 3)_{30^\circ+60^\circ} = 6_{90^\circ} = 6(\cos 90^\text{o} + i\,\text{sen}\,90^\text{o}) = 6(0+1\cdot i) = 6i = (0,6)$$

La forma polar del producto es 6_{90°, la forma trigonométrica es $6(\cos 90^\text{o} + i\,\text{sen}\,90^\text{o})$, la forma binómica es $6i$ y, finalmente, la forma cartesiana o de par ordenado es $(0,6)$.

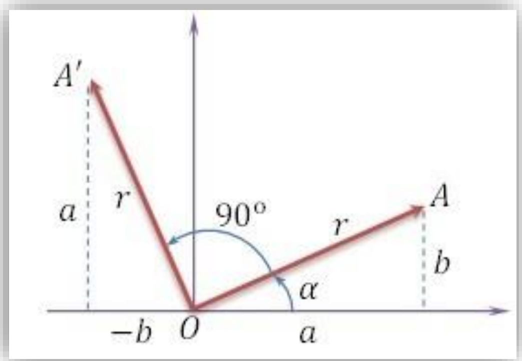
Ejemplo 4

En este ejemplo vamos a multiplica el número complejo $z_1 = a+bi = r_\alpha$ por el complejo $z_2 = i$, y daremos una interpretación geométrica del resultado.

Como $z_2 = i = 0+1\cdot i$, entonces $r = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$ y $\text{tg}\,\alpha = \left[\frac{1}{0}\right]$. Esto último quiere decir que el argumento principal de $z_2 = i$ es $\alpha = 90^\text{o}$. Por tanto, $z_2 = i = 1_{90^\circ}$ (en realidad no haría falta hacer todo esto para obtener la forma polar de i, sino que bastaría pensar en su forma como par, $(0,1)$, y en el afijo correspondiente). Así pues:

$$z_1 \cdot z_2 = (r\cdot 1)_{\alpha+90^\circ} = r_{\alpha+90^\circ}$$

La interpretación geométrica o gráfica del resultado equivale a girar el vector correspondiente al complejo



Cociente de números complejos en forma polar

Para dividir dos números complejos, se dividen sus módulos y se restan sus argumentos:

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

La demostración es fácil pues $\left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta} \cdot r'_\beta = \left(\frac{r}{r'}\cdot r'\right)_{\alpha-\beta+\beta} = r_\alpha$.

Ejemplo 5

Vamos a dividir los números complejos $z_1 = 4_{45^\circ}$ y $z_2 = i$, y daremos el resultado en todas las formas posibles.

Sabemos que $i = 1_{90^\circ}$. Entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{45^\circ}}{1_{90^\circ}} = 4_{-45^\circ} = 4(\cos(-45^\text{o}) + i\,\text{sen}(-45^\text{o})) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

La forma polar del producto es 4_{-45°, la forma trigonométrica es $4(\cos(-45^\text{o}) + i\,\text{sen}(-45^\text{o}))$, la forma binómica es $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ y, finalmente, la forma cartesiana o de par ordenado es $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

Inverso de un número complejo en forma polar

Para calcular el inverso de un número complejo no nulo, basta darse cuenta de que $1 = 1 + 0 \cdot i = 1_{0^\circ}$. Aplicando la fórmula de la división de números complejos en forma polar, el inverso del número complejo no nulo $z = r_\alpha$, es:

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

El inverso de un número complejo no nulo, tiene por módulo el inverso del módulo y por argumento principal el opuesto del suyo.

Potenciación de números complejos en forma polar. Fórmula de Moivre

Sea el número complejo $z = r_\alpha$, el cual deseamos elevarlo a la potencia de exponente n.

$$z^n = (r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \ldots \cdot (n \text{ veces}) \cdot \ldots \cdot r_\alpha = (r^n)_{\alpha+\alpha+\ldots+(n \text{ veces})+\ldots+\alpha}$$

Es decir, la potencia de un número complejo en forma polar la podremos calcular del siguiente modo:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

Si los dos miembros de la fórmula anterior los expresamos en forma trigonométrica se obtiene la que se conoce con el nombre de ***Fórmula de Moivre***:

$$\left(r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

Una aplicación de la fórmula de Moivre es el cálculo de razones trigonométricas de ángulos múltiplos de otro. Por ejemplo, si consideramos el complejo $1_\alpha = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ podemos elevarlo al cuadrado de dos forma distintas.

Una de ellas, utilizando el cuadrado de la suma:

$$(1_\alpha)^2 = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos^2\alpha + i^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

La otra, utilizando la fórmula de Moivre:

$$(1_\alpha)^2 = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\operatorname{sen} 2\alpha$$

Igualando las dos expresiones anteriores tenemos que

$$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha + i\operatorname{sen} 2\alpha$$

Como los dos complejos son iguales, también lo serán sus partes reales e imaginarias. De ahí se obtienen las conocidas fórmulas del coseno y del seno del ángulo doble:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \quad ; \quad \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Ejemplo 6

Calculemos $\left(2+2\sqrt{3}\right)^5$. Pasando el complejo de la base a forma polar, podemos utilizar la cómoda fórmula de Moivre.

$$2+2\sqrt{3}i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2\sqrt{3}i = 4_{60^\circ}$$

Entonces:

$$\left(2+2\sqrt{3}\right)^5 = \left(4_{60^\circ}\right)^5 = 4^5\left(\cos(4\cdot 60^\circ) + i\operatorname{sen}(5\cdot 60^\circ)\right) = 1024(\cos 300^\circ + i\operatorname{sen} 300^\circ) =$$

$$= 1024(\cos 60^\circ + i\operatorname{sen} 60^\circ) = 1024\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512 - 512\sqrt{3}i$$

Radicación de números complejos

Decir que la raíz de índice n del número complejo r_α es el número complejo R_β es lo mismo que decir que la potencia de exponente n de R_β es igual a r_α. Simbólicamente:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = R_\beta \Leftrightarrow \left(R_\beta\right)^n = r_\alpha$$

Entonces, por la potenciación de complejos en forma polar:

$$r_\alpha = \left(R^n\right)_{n\beta}$$

De la igualdad de los dos complejos anteriores dados en forma polar se deduce que los módulos de ambos han de ser iguales y que los argumentos principales han de diferenciarse en un número entero de «vueltas». Es decir:

$$r = R^n \Rightarrow R = \sqrt[n]{r} \quad ; \quad n\beta - \alpha = 360^\circ k \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 360^\circ k}{n}$$

La dos igualdades anteriores proporcionan el módulo y los argumentos de las raíces de índice n del complejo r_α.

Dando a k los valores $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, se obtienen n argumentos distintos y, por tanto, n raíces de índice n distintas del número complejo r_α. Si se le dieran a k valores iguales o superiores a n, los argumentos se repetirían, por ser suma de un número entero de «vueltas», con alguno de los argumentos ya calculados. Así pues, podemos deducir que el número complejo r_α tiene n raíces de índice n distintas.

Ejemplo 7

En este ejemplo vamos a calcular y a representar las tres raíces cúbicas del número complejo $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

En primer lugar pasamos el número complejo a coordenadas polares.

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow z = 1_{135^\circ}$$

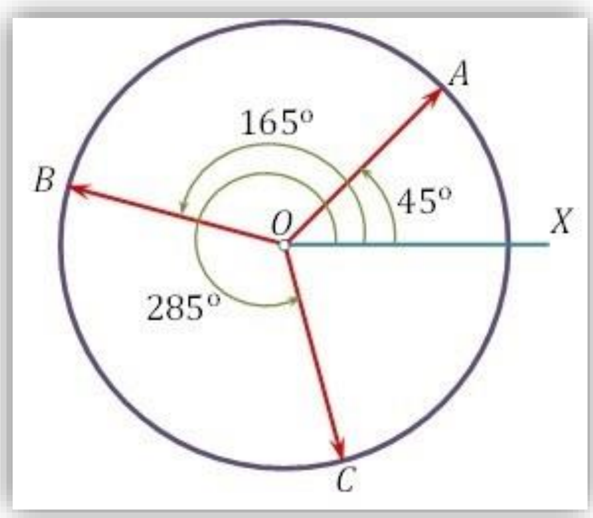
Procedemos ahora a realizar la raíz cúbica del número complejo 1_{135°.

$$\sqrt[3]{1_{135^\circ}} = R_\beta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \beta = \frac{135^\circ + 360^\circ k}{3} \end{array} \right.$$

Ahora damos a k los valores $0, 1, 2$ para obtener los argumentos de las tres raíces de $z = 1_{135^\circ}$:

- $k = 0 \Rightarrow \beta_1 = 45^\circ \Rightarrow r_1 = 1_{45^\circ} = 1 \cdot \left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$
- $k = 1 \Rightarrow \beta_2 = 165^\circ \Rightarrow r_2 = 1_{165^\circ} = 1 \cdot \left(\cos 165^\circ + i \operatorname{sen} 165^\circ\right) = -\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ \cong -0.9659 + 0.2588 i$
- $k = 2 \Rightarrow \beta_3 = 285^\circ \Rightarrow r_3 = 1_{285^\circ} = 1 \cdot \left(\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ\right) = \cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ \cong 0.2588 + 0.9659 i$

- La representación gráfica de las tres raíces del número complejo $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ es la siguiente (el radio de la circunferencia es 1, que es el módulo común de cada una de las tres raíces y A, B, C son sus afijos):



Obsérvese que los extremos de cada afijo forman, al unirlos, un triángulo equilátero. De hecho, si en vez de efectuar una raíz cúbica, efectuamos la raíz de índice n de un número complejo $z=r_\alpha$, los extremos de los afijos de las n raíces que se obtienen, forman un polígono regular de n lados.

Ejemplo 8

Hallemos ahora las raíces cuartas de $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

En primer lugar pasamos el número complejo a coordenadas polares.

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1\\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=240^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow z=1_{240^\circ}$$

Procedemos ahora a realizar la raíz cúbica del número complejo 1_{240°.

$$\sqrt[4]{1_{135^\circ}}=R_\beta\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}R=\sqrt[4]{1}=1\\ \beta=\frac{240^\circ+360^\circ k}{4}\end{array}\right.$$

Ahora damos a k los valores 0, 1, 2, 3 para obtener los argumentos de las tres raíces de $z=1_{240^\circ}$:

- $k=0\Rightarrow\beta_1=60^\circ\Rightarrow r_1=1_{60^\circ}=1\cdot(\cos 60^\circ+i\operatorname{sen}60^\circ)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k=1\Rightarrow\beta_2=150^\circ\Rightarrow r_2=1_{150^\circ}=1\cdot(\cos 150^\circ+i\operatorname{sen}150^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- $k=2\Rightarrow\beta_3=240^\circ\Rightarrow r_3=1_{240^\circ}=1\cdot(\cos 240^\circ+i\operatorname{sen}240^\circ)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k=3\Rightarrow\beta_4=330^\circ\Rightarrow r_4=1_{330^\circ}=1\cdot(\cos 330^\circ+i\operatorname{sen}330^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$