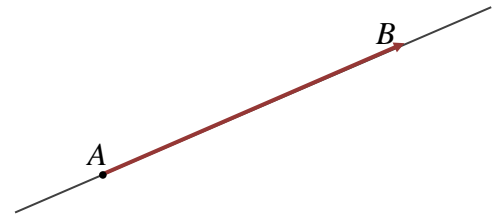


Los vectores y sus operaciones

Un **vector** \overrightarrow{AB} queda determinado por dos puntos, el **origen** A , y el **extremo** B (podemos decir que un vector es un segmento orientado). Un vector queda completamente definido a través de tres elementos: módulo, dirección y sentido.

- **Módulo** de un vector es la distancia entre A y B . Se designa poniendo el vector entre barras: $|\overrightarrow{AB}|$. Digamos que el módulo es a un vector lo que el valor absoluto es a un número real.
- **Dirección** de un vector es la dirección de la recta que lo contiene o en la que se encuentra el vector, así como la de todas sus paralelas.
- **Sentido**. Cada dirección admite, naturalmente, dos sentidos opuestos. En la figura de arriba el vector \overrightarrow{AB} tiene sentido opuesto que el vector \overrightarrow{BA} .



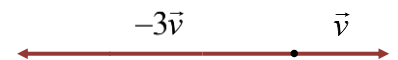
Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Cuando queremos hacer uso de un vector, podemos tomar, en su lugar, cualquiera de los que son iguales a él. Dos vectores iguales también se llaman **equivalentes**. Al conjunto formado por todos los vectores iguales o equivalentes se le llama **vector libre** y se suelen designar así: \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{x} , \vec{y} , etcétera. Es decir, si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''}, \dots$, son todos vectores iguales, entonces $\vec{v} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''}, \dots\}$ es un vector libre. Si decimos que estamos utilizando el vector \vec{v} , lo que queremos decir es que estamos utilizando cualquiera de los del conjunto anterior, y lo llamaremos **representante** de la clase.

Hay dos tipos de magnitudes físicas. Unas son las **magnitudes escalares**, en las que para indicar su valor basta con indicar un número y su unidad correspondiente (la masa, el tiempo, el volumen, la temperatura, la densidad, etc.) Sin embargo, otras son **magnitudes vectoriales**, en las que no basta indicar un número (módulo) y una unidad, sino que también habrá que dar información sobre en qué dirección van, y en qué sentido (velocidad, fuerza, aceleración, etc.)

Producto de un número por un vector

Dado un vector \vec{v} y un número real k , $k\vec{v}$ es otro vector que tiene la misma dirección que \vec{v} . Si $k > 0$, $k\vec{v}$ tiene el mismo sentido que \vec{v} ; y si $k < 0$, $k\vec{v}$ y \vec{v} tienen sentidos opuestos. Además, la relación entre los módulos de \vec{v} y de $k\vec{v}$ es la siguiente: $|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$. Dicho de otra manera, el módulo de $k\vec{v}$ es $|k|$ veces el de \vec{v} .

Así, por ejemplo, el sentido del vector $-3\vec{v}$ es opuesto al de \vec{v} , y su módulo es tres veces el módulo de \vec{v} .



Suma, resta y combinación lineal de vectores

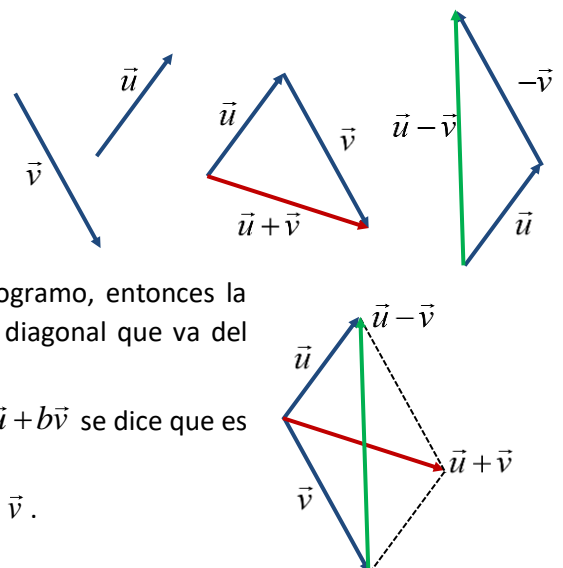
Para sumar dos vectores \vec{u} y \vec{v} , se procede del siguiente modo: se sitúa \vec{v} a continuación de \vec{u} , de manera que el origen de \vec{v} coincida con el extremo de \vec{u} . La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de \vec{u} y extremo el de \vec{v} .

Para restar dos vectores \vec{u} y \vec{v} , $\vec{u} - \vec{v}$, se le suma a \vec{u} , el opuesto de \vec{v} : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Si colocamos \vec{u} y \vec{v} con origen común y completamos un paralelogramo, entonces la diagonal cuyo origen es el de \vec{u} y \vec{v} es el vector suma, $\vec{u} + \vec{v}$. La diagonal que va del extremo de \vec{v} al extremo de \vec{u} es la resta $\vec{u} - \vec{v}$.

Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} , y dos números reales a y b , el vector $a\vec{u} + b\vec{v}$ se dice que es una **combinación lineal** de \vec{u} y \vec{v} .

Por ejemplo, $2\vec{u} - 3\vec{v}$, $-5\vec{u} + 7\vec{v}$, son combinaciones lineales de \vec{u} y \vec{v} .



Coordenadas de un vector

Un importante resultado es que, dados dos vectores \vec{x} , \vec{y} , con distintas direcciones, cualquier vector \vec{v} se puede poner como combinación lineal de \vec{x} y de \vec{y} . Es decir, existen números reales a y b tales que $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}$. Además, la combinación lineal anterior es única, o lo que es lo mismo, sólo existen dos números reales a y b para los que es cierta la igualdad anterior.

Base y coordenadas

Se llama **base** del conjunto de los vectores del plano a dos vectores cualesquiera \vec{x} e \vec{y} con distintas direcciones. En este caso la base se denotará así: $B = \{\vec{x}, \vec{y}\}$. Si los dos vectores de la base son perpendiculares se dice que forman una **base ortogonal**, y si, además, ambos son unitarios o de módulo 1, se dirá que forman una **base ortonormal**.

Tal y como hemos visto anteriormente, cualquier vector \vec{v} del plano se podrá poner como combinación lineal de los vectores de una base $B = \{\vec{x}, \vec{y}\}$ de forma única, es decir, existen números reales a y b tales que $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}$. Pues bien, a los números a y b se les llama **coordenadas** de \vec{v} en la base B y escribiremos, para abreviar, $\vec{v} = (a, b)$ o bien $\vec{v}(a, b)$.

Operaciones con coordenadas

Supongamos que \vec{u} y \vec{v} tienen, respecto de una base B , las siguientes coordenadas: $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Entonces:

- Las coordenadas del vector suma, $\vec{u} + \vec{v}$, se obtienen sumando las coordenadas de \vec{u} con las de \vec{v} :

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

- Dado un número real k , las coordenadas del vector $k\vec{u}$ (producto de un número por un vector), se obtienen multiplicando por k las coordenadas de \vec{u} :

$$k\vec{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

- Dados a y b números reales, las coordenadas de una combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , $a\vec{u} + b\vec{v}$, se obtienen aplicando lo que se ha visto en los dos puntos anteriores:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a(u_1, u_2) + b(v_1, v_2) = (au_1, au_2) + (bv_1, bv_2) = (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2)$$

Ejemplos

- Supongamos que $\vec{u}(2, -3)$ y $\vec{v}(5, 4)$ son dos vectores respecto de una base B . Calcular las coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$, $-5\vec{u}$ y $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
 - Las coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ son: $(2, -3) + (5, 4) = (2 + 5, -3 + 4) = (7, 1)$.
 - Las coordenadas de $-5\vec{u}$ son: $-5(2, -3) = (-5 \cdot 2, -5 \cdot (-3)) = (-10, 15)$.
 - Las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$ son: $3(2, -3) + 2(5, 4) = (6, -9) + (10, 8) = (6 + 10, -9 + 8) = (16, -1)$.
- Las coordenadas de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} respecto de una base B son $\vec{u}(1, -1)$, $\vec{v}(2, 3)$ y $\vec{w}(5, 15)$. Hallar a y b para que se cumpla que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Lo que haremos es expresar la igualdad anterior sustituyendo los vectores por sus coordenadas. Entonces:

$$(5, 15) = a(1, -1) + b(2, 3) = (a, -a) + (2b, 3b) = (a + 2b, -a + 3b). \text{ Igualando las primeras coordenadas entre}$$

sí, y las segundas entre sí se puede plantear el sistema $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -a + 3b = 15 \end{cases}$. Resolviéndolo tenemos que $a = -3$, $b = 4$.

Puntos y vectores en el plano

Sistema de referencia en el plano

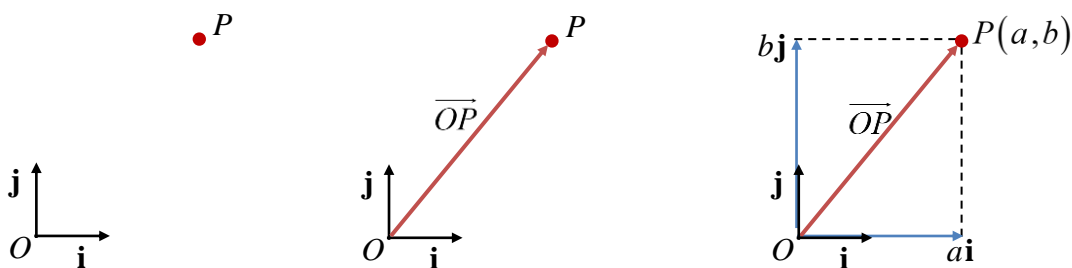
Los vectores son de gran utilidad para la geometría. Vamos a construir, a partir de ellos, un sistema de referencia para expresar analíticamente los puntos. En el tema siguiente también lo utilizaremos para expresar las figuras planas.

Un **sistema de referencia** para el plano consiste en el conjunto $R = \{O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}\}$ formado por un punto fijo O , llamado **origen**, y por una **base** $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ para los vectores. Habitualmente se toma una **base ortonormal** (dos vectores unitarios y perpendiculares). En este caso se habla del sistema de referencia habitual y tenemos que $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

Entonces, a cada punto P del plano, se le asocia un vector fijo \overrightarrow{OP} , llamado **vector de posición** del punto P . Como $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ es una base el vector de posición \overrightarrow{OP} tendrá unas coordenadas respecto de la base:

$$\overrightarrow{OP} = ai + bj = a(1, 0) + b(0, 1) = (a, 0) + (0, b) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (a, b)$$

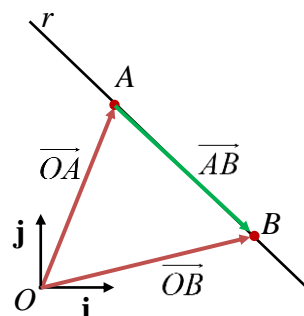
Las coordenadas del vector de posición \overrightarrow{OP} son las mismas que las del punto P : $\overrightarrow{OP}(a, b) \Leftrightarrow P(a, b)$ (véase en la figura siguiente la construcción anterior).



Vector director

Los vectores sirven para marcar las direcciones de las rectas. Un vector paralelo a una recta se dice que es un **vector director** o un **vector de dirección** de ella. Cada recta tiene pues infinitos vectores directores.

Dada una recta r del plano, cada punto suyo tiene su vector de posición correspondiente. Por ejemplo, a un punto A de la recta le corresponde su vector de posición \overrightarrow{OA} , a otro punto B de la recta le corresponde su vector de posición \overrightarrow{OB} , etcétera. El vector que une el punto A con el punto B , \overrightarrow{AB} , sería un vector director de la recta r (ver figura de la derecha). Obsérvese que el vector \overrightarrow{AB} es igual al vector de posición del punto B menos el vector de posición del punto A : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



Coordenadas del vector que une dos puntos

La igualdad anterior nos sirve para hallar las coordenadas del vector que une dos puntos. Como \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} son vectores de posición deben de tener ambos unas coordenadas: $\overrightarrow{OA}(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB}(b_1, b_2)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Así pues las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} se obtienen restándole a las coordenadas de B (que son las mismas que las de \overrightarrow{OB}) las coordenadas de A (que son las mismas que las de \overrightarrow{OA}):

$$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Así, por ejemplo, el vector que une el punto $P(3, -4)$ con el punto $Q(6, 2)$ es $\overrightarrow{PQ} = (6 - 3, 2 - (-4)) = (3, 6)$.

También podemos hallar el vector que une Q con P : $\overrightarrow{QP} = (3 - 6, -4 - 2) = (-3, -6)$.

Condición para que tres puntos estén alineados

Ya hemos visto que si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son dos puntos, el vector $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ es un vector director de la recta que los contiene. Si $C(c_1, c_2)$ está alineado con A y B , pertenecerá también a la recta, y ocurrirá que $\overline{AC}(c_1 - a_1, c_2 - a_2)$ y $\overline{BC}(c_1 - b_1, c_2 - b_2)$ también serán vectores directores de la recta y, por tanto, paralelos a \overline{AB} , lo que significa que los tres vectores han de ser proporcionales, con lo que sus coordenadas deben de formar una proporción:

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{AC} \Rightarrow \frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} ; \overline{AB} = k' \cdot \overline{BC} \Rightarrow \frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - b_2}$$

Un ejercicio típico donde se utiliza lo anterior es el siguiente: averiguar el valor de m para que los puntos $P(1, 4)$, $Q(5, -2)$ y $R(6, m)$ estén alineados.

Por lo que hemos visto $\overline{PQ} = (5 - 1, -2 - 4) = (4, -6)$ y $\overline{PR} = (6 - 1, m - 4) = (5, m - 4)$ habrán de ser paralelos y, por tanto, sus coordenadas proporcionales: $\frac{5}{4} = \frac{m - 4}{-6} \Rightarrow \frac{-30}{4} = m - 4 \Rightarrow m = \frac{-30}{4} + 4 \Rightarrow m = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$.

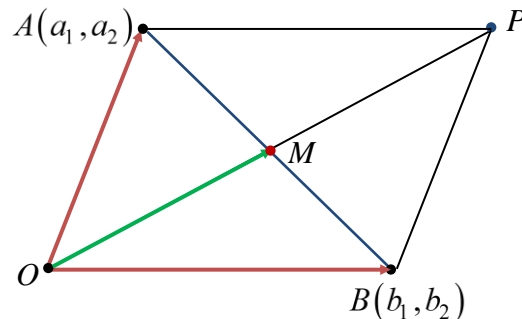
Punto medio de un segmento

Podemos utilizar también los vectores para hallar el punto medio de un segmento. Dado un segmento de extremos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, tenemos que $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OP}$ es la diagonal del paralelogramo $OAPB$. Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio M , tenemos (ver figura de la derecha):

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \overline{OP} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{2} (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio del segmento de extremos

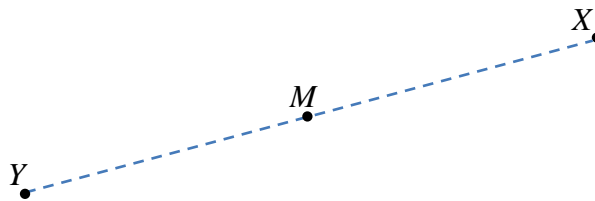
$$A(a_1, a_2) \text{ y } B(b_1, b_2) \text{ son } M \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$



Simétrico de un punto respecto a otro

Si un punto $X(x_1, x_2)$ es el simétrico de otro punto $Y(y_1, y_2)$ respecto de un punto $M(m_1, m_2)$, entonces M es el punto medio del segmento XY . Por tanto:

$$(m_1, m_2) = \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{x_1 + y_1}{2} \\ m_2 = \frac{x_2 + y_2}{2} \end{cases}$$



Despejando x_1 y x_2 se obtienen las coordenadas de X en función de las de Y y las de M .

Por ejemplo, si hemos de hallar el simétrico del punto $A(-6, 9)$ respecto del punto $P(4, 3)$, lo que hacemos es llamar

$$\text{al simétrico } X(x_1, x_2). \text{ Entonces } (4, 3) = \left(\frac{x_1 - 6}{2}, \frac{x_2 + 9}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 - 6}{2} = 4 \Rightarrow x_1 = 14 \\ \frac{x_2 + 9}{2} = 3 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases} . \text{ Por tanto, el simétrico del}$$

punto A respecto del punto P es $X(14, -3)$.

Producto escalar de vectores

Se llama **producto escalar** de dos vectores \vec{u} y \vec{v} al resultado de multiplicar el módulo de \vec{u} , por el módulo de \vec{v} por el coseno del ángulo que forman. Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , es decir, $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$, tenemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha$$

Como $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\cos \alpha$ son números, entonces, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ también es un número. De ahí el nombre de producto escalar, pues *escalar* significa número, en contraposición a *vectorial*, que significa vector.

Antes de seguir digamos que el **vector nulo** o **vector cero**, $\vec{0}$, es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección.

Pues bien, si uno de los dos vectores \vec{u} o \vec{v} es $\vec{0}$, entonces, obviamente, el producto escalar es 0.

Si \vec{u} y \vec{v} son ambos vectores no nulos, para que el producto escalar sea 0 es necesario que $\cos \alpha = 0$, es decir, que \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que el producto escalar de dos vectores no nulos sea igual a 0 es que los vectores sean perpendiculares. Esta es la **propiedad fundamental del producto escalar**.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Si el ángulo $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ es agudo, entonces $\cos \alpha > 0$ y, por tanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$. Sin embargo, si el ángulo $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ es obtuso, entonces $\cos \alpha < 0$ y, en este caso, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

Propiedades del producto escalar

No son difíciles de demostrar, utilizando la definición de producto escalar, las siguientes propiedades elementales.

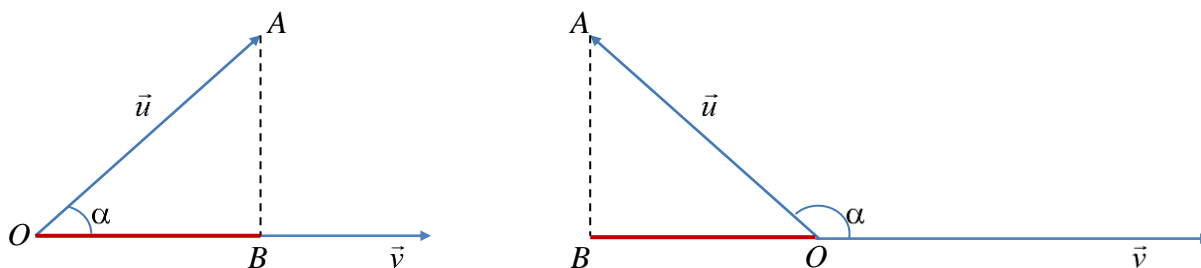
Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Asociativa u homogénea: $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Positiva: $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$, $\forall \vec{u} \neq \vec{0}$

El producto escalar y la proyección de vectores



Llamemos OB a la proyección del vector \vec{u} sobre el vector \vec{v} (ver figura). En el triángulo rectángulo OAB se cumple que $OB = OA \cdot \cos \alpha \Rightarrow OB = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$. Entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = |\vec{v}| OB$, y hemos demostrado la siguiente propiedad:

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Por tanto la proyección OB del vector \vec{u} sobre el vector \vec{v} se obtiene despejando: $OB = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Expresión analítica del producto escalar en bases ortonormales

Si tomamos $R = \{O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}\}$ un sistema de referencia ortonormal, es decir, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ es una base ortonormal formada por dos vectores unitarios (de módulo uno) y perpendiculares (ortogonales), tenemos:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad ; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{j}| |\mathbf{j}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad ; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Además, si las coordenadas de dos vectores \vec{u} y \vec{v} respecto de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ son $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$, entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Demostración:

Como $\vec{u}(u_1, u_2)$, entonces $\vec{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$ y $\vec{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) = (u_1 v_1)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + (u_1 v_2)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + (u_2 v_1)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + (u_2 v_2)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) = \\ &= (u_1 v_1) \cdot 1 + (u_1 v_2) \cdot 0 + (u_2 v_1) \cdot 0 + (u_2 v_2) \cdot 1 = u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{u}(2, -3)$, $\vec{v}(5, 4)$ y $\vec{w}(k, 7)$. Calculemos $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y el valor de k para que $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Por un lado, $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3) \cdot (5, 4) = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 = 10 - 12 = -2$.

Por otro lado, $\vec{v} \cdot \vec{w} = (5, 4) \cdot (k, 7) = 5 \cdot k + 4 \cdot 7 = 5k + 28$. Como $\vec{v} \perp \vec{w}$, entonces $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, es decir $5k + 28 = 0$, con lo que $k = -\frac{28}{5}$

A partir de ahora y en el tema siguiente trabajaremos siempre con sistemas de referencia ortonormales.

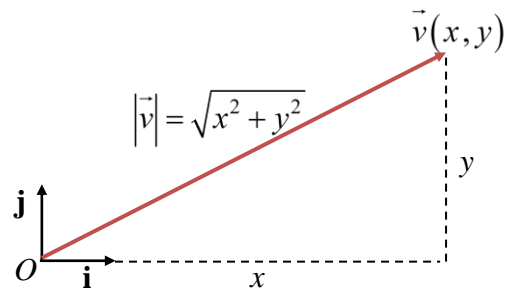
Módulo de un vector

Las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$ son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el módulo de \vec{v} . Por tanto (ver figura de la derecha):

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vamos a deducir esta igualdad a partir del producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0^\circ = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ángulo de dos vectores

Supongamos que α es el ángulo de dos vectores \vec{u} y \vec{v} : $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. Entonces, despejando: $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.

Si las coordenadas de estos vectores son $\vec{u}(x_1, y_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2)$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Por tanto: $\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u}(2, 3)$ y $\vec{v}(5, -1)$, sus módulos son: $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$. Además $\cos \alpha = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{338}} \simeq 0,365 \Rightarrow \alpha = 68,6^\circ$, que es el ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} .