Límite de una función en un punto

Para aprender bien el **concepto de límite** comenzaremos con familiarizarnos con la siguiente terminología.

- $x \to c^-$ ("x *tiende a* c *por la izquierda*"): x toma valores cada vez más cercanos a c, pero menores que c.
- $x \to c^+$ ("x *tiende a* c *por la derecha*"): x toma valores cada vez más cercanos a c, pero mayores que c.
- $x \to c$ ("x *tiende a* c"): x toma valores cada vez más cercanos a c.

Significado de límite lateral y de límite de una función en un punto

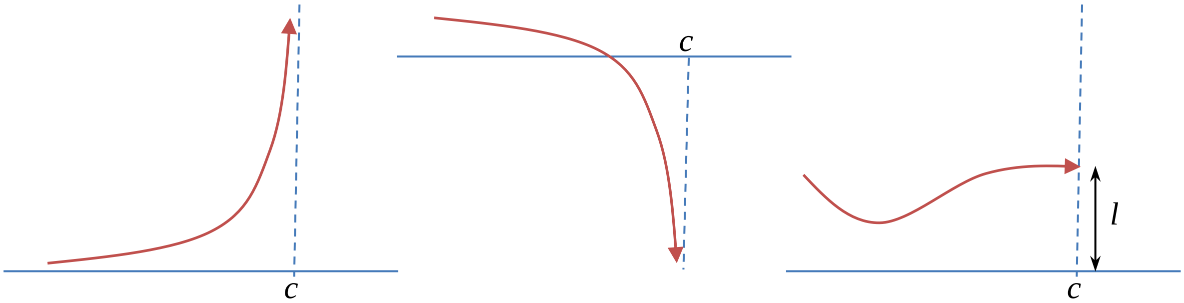
A) Si $x \to c^-$, la variable x toma valores cada vez más cercanos a c, por la izquierda de c. Consecuentemente, $f(x)$ también toma valores variables. El comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to c^-$, se expresa simbólicamente así: $\lim_{x\to c^-} f(x)$, y se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda". Es un límite lateral por la izquierda y, para las funciones elementales que conocemos, puede ser de una de las formas siguientes:

1) $\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$. En este caso, cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más grandes y positivos, llegando a superar cualquier valor, por grande que este sea. Un ejemplo puede ser la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ cuando $x \to 1^-$. Obsérvese que $f(0{,}9) \cong 4{,}7368$, $f(0{,}99) \cong 49{,}7487$, $f(0{,}999) \cong 499{,}7499$. De este modo podríamos seguir aproximándonos a 1 por la izquierda obteniendo valores cada vez más grandes y positivos. Por esta razón escribiremos $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x^2} = +\infty$.

2) $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$. Este caso es parecido al anterior, sólo que $f(x)$ toma valores cada vez más grandes en valor absoluto, pero negativos. Un ejemplo podría ser la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Ahora se tiene que $f(0{,}9) = -10$, $f(0{,}99) = -100$, $f(0{,}999) = -1000$, es decir, $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

3) $\lim_{x\to c^-} f(x) = l$. En este tercer y último caso, cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más cercanos al número real l. Por ejemplo, dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 7$, es fácil darse cuenta de que el límite lateral por la izquierda de 1 es 5: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 - 3x + 7\right) = 5$.

Estos tres casos los puedes ver expresados gráficamente, de izquierda a derecha, en la siguiente figura:



B) El significado de $\lim_{x\to c^+} f(x)$ (límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha) es similar al de $\lim_{x\to c^-} f(x)$. Es decir, puede ocurrir también una de estas tres cosas: $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = l$.

C) El significado de $\lim_{x\to c} f(x)$ (límite de $f(x)$ cuando x tiende c), es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a c tanto por la derecha como por la izquierda. Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = l$, decimos que $\lim_{x\to c} f(x) = l$ Análogamente ocurre cuando los dos límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$. Si los dos límites laterales no toman el mismo valor, se dice que ***no existe*** el límite cuando x tiende a c de la función.

Continuidad de una función en un punto

La idea de función continua es la de que "su gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel". Por eso, para que una función f sea continua en un punto $x=c$ se han de cumplir necesariamente tres condiciones:

1) Que f tenga límite finito cuando $x \to c$, es decir: $\lim_{x\to c} f(x)=l$. Esto implica que los límites laterales han de ser iguales también a l: $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=l$.
2) Que f esté definida en el punto $x=c$, o lo que es lo mismo, que exista $f(c)$. Esto es tanto como decir que c ha de pertenecer al dominio de la función f : $c\in \mathrm{Dom}\, f$.
3) Que el límite coincida con el valor de la función en c, es decir, $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.

Tipos de discontinuidades

Si no se cumple alguna de las condiciones anteriores, la función no será continua en el punto $x=c$. Esto nos lleva a hacer la siguiente clasificación de discontinuidades:

1) Si uno o los dos límites laterales es $+\infty$ o $-\infty$, se dice que la función tiene una o dos **ramas infinitas** en ese punto. En estos casos, la recta $x=c$ es una **asíntota vertical** de la curva. Por ejemplo, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 1^- \\ +\infty & \text{si } x\to 1^+\end{cases}$, lo que quiere decir que la recta $x=1$ es una asíntota vertical de la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$.
2) Si ambos límites laterales son finitos pero distintos, sabemos que $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe. En esta caso la función presenta una **discontinuidad de salto finito** en el punto $x=c$. Esto suele ocurrir en las funciones definidas por trozos. Por ejemplo, para la función $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{si } x<1 \\ 2x^2-x+4 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$, tenemos $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-2x+3\right)=2$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(2x^2-x+4\right)=5$, por tanto no existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, y como ambos límites son finitos, la función presenta una discontinuidad de salto finito en $x=1$.
3) Puede ocurrir que **a la función le falte el punto** $x=c$. Por ejemplo, la función $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}$ no está definida en el punto $x=2$, porque el denominador se anula. Sin embargo, para valores distintos de 2 podríamos simplificar la expresión $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}=x$, con lo que la gráfica de esta función sería como la de $f(x)=x$, salvo que le falta el punto de abscisa $x=2$.
4) Por último, puede ocurrir que tenga el punto $x=c$ desplazado. Este caso es como el anterior, pero la función sí que está definida en $x=c$. Este tipo de comportamientos sólo puede darse en funciones definidas por trozos. Por ejemplo, para la función $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\neq 2 \\ 3 & \text{si } x=2\end{cases}$ se tiene que $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$, pero $f(2)=3$, por tanto f no es continua en $x=2$. Este tipo de discontinuidad se conoce como **discontinuidad evitable**.

Es interesante observar que los ejemplos de las funciones de los apartados 1) y 3), que son funciones definidas de manera "natural" (sin el artificio de la definición "a trozos"), en el punto c en el que son discontinuas no existe imagen, es decir, $c\notin \mathrm{Dom}\, f$. Por eso, las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) son continuas en todos los puntos en los que están definidas. Un par de ejemplos. $f(x)=x^3-3x+5$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$. $g(x)=\frac{x+5}{x+3}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=-3$, que es el punto en el que no está definida.

Cálculo del límite de una función en un punto

El cálculo de límites de funciones en puntos concretos puede ser muy fácil o difícil, según los casos. Vamos a analizar distintas situaciones que nos permitirán reconocer qué proceso conviene seguir en cada caso.

Límite en un punto en el que la función es continua

Hemos visto que una función es continua en $x = c$ si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Sabemos también que las funciones que utilizamos habitualmente mediante su expresión analítica son continuas en todos los puntos en los que están definidas. Por tanto, si $f(x)$ es una función elemental dada por su expresión analítica y existe $f(c)$, entonces para hallar $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ calcularemos, sencillamente $f(c)$. Así, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{4x}{x-5} = \frac{4 \cdot 3}{3-5} = \frac{12}{-2} = -6$.

Es conveniente hacer aquí una observación de importancia. Cuando ponemos $x \to c$ lo que estamos expresando es que nos podemos acercar a c cada vez más, tanto como queramos. Por eso hay límites que carecen de sentido y límites que se pueden calcular, aunque la función no esté definida en el punto c. Veamos un par de ejemplos.

- Carece de sentido hablar de $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x}$ porque, al ser el domino de definición de $\sqrt{x}$ el conjunto $[0\ ,\ +\infty)$, la variable x no puede tomar valores tan próximos como queramos a -3.
- Sí que podemos hablar de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2}$ aunque 0 no sea del dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$, porque podemos dar a x valores del dominio tan próximos a 0 como queramos.

Cálculo de límites de funciones definidas por trozos

Podemos considerar, para fijar ideas, el caso general de la función $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < c \\ f_2(x) & \text{si } x \geq c \end{cases}$, donde f_1 y f_2 son funciones continuas en c.

- **Cálculo del límite en el punto crítico o punto de ruptura c (donde la función pasa de ser una cosa a ser otra).**

  Como f_1 y f_2 son continuas, entonces $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f_1(c)$ y $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f_2(c)$. En la práctica, si $f_1(c) = f_2(c) = l$, entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, y f es continua en $x = c$. Sin embargo, si $f_1(c) \neq f_2(c)$, entonces el límite no existe y hay una discontinuidad de salto finito.
- **Cálculo del límite en otro punto cualquiera del dominio.**

  Para hallar el límite, procederemos así. Si $a < c$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_1(a)$. Si $b > c$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f_2(b)$

Por ejemplo, calculemos los límites de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x < 3 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en los puntos 1, 7 y 3.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x-5) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = \lim\limits_{x \to 7}(-x+2) = -7+2 = -5$. En el punto crítico $x = 3$ hemos de calcular los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-}(2x-5) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+}(-x+2) = -3+2 = -1$. Como los límites laterales no coinciden, no existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (hay una discontinuidad de salto finito).

Otro ejemplo sería estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x-5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en el punto $x = 2$. Tenemos: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}(x^2-3) = 2^2 - 3 = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+}(3x-5) = 3 \cdot 2 - 5 = 1$. Como existen los límites laterales y son iguales existe el límite, es decir, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$. Además, es claro que $f(2) = 1$. Por tanto $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ y f es continua en el punto $x = 2$.

Límite de una función racional

Supongamos que queremos hallar el límite en un punto $x=c$ de una función del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios. Distinguiremos tres casos.

- Si **el denominador no se anula**, es decir, si $Q(x)\neq 0$, la función es continua en c y, por tanto, el límite en c es el valor de la función en c: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(c)}{Q(c)}$.

  Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^2-2x+3}=\dfrac{2\cdot 3^3-3\cdot 3^2+1}{3^2-2\cdot 3+3}=\dfrac{54-27+1}{9-6+3}=\dfrac{28}{6}=\dfrac{14}{3}$

- Si **el denominador se anula y el numerador no se anula**, el límite es infinito. O sea, si $P(c)\neq 0$ y $Q(c)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$. En estos casos hay que estudiar los dos límites laterales, para conocer si el límite es $+\infty$ o $-\infty$. Para ello hay que evaluar la función en un punto muy cercano a c, bien por la izquierda, bien por la derecha y estudiar el signo de la fracción. Veámoslo con un ejemplo: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{2x-6}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 3^-\\ +\infty & \text{si } x\to 3^+\end{cases}$. Observa que el numerador es positivo. Por la izquierda de 3 tomaríamos, por ejemplo, $2,99$, que al sustituirlo en el denominador da $-0,02$. Por tanto, como el numerador es positivo y el denominador negativo, el límite por la izquierda de 3 es $-\infty$. Por la derecha de 3 tomaríamos, por ejemplo, $3,01$, que al sustituirlo en el denominador da $0,02$. Por tanto, como el numerador es positivo y el denominador también, el límite por la derecha es $+\infty$.

  En este caso la recta $x=c$ es una asíntota vertical.

- Si **tanto el numerador como el denominador se anulan**, c es una raíz tanto de $P(x)$ como de $Q(x)$, con lo que la fracción algebraica puede simplificarse. Basta para ello dividir numerador y denominador entre $x-c$ (usando, por ejemplo, la regla de Ruffini). Es decir, $P(x)=(x-c)\cdot P_1(x)$, $Q(x)=(x-c)\cdot Q_1(x)$, con lo que tenemos:

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)\cdot P_1(x)}{(x-c)\cdot Q_1(x)}=\lim_{x\to c}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

  Ahora bastaría hallar el último límite, analizando en cuál de los tres casos se encuentra. En este caso, se suele decir que estamos resolviendo una **indeterminación** del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Veamos algunos ejemplos.

  ✓ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{3x^2-2x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x^2+x-1)}{(x-1)\cdot(3x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{3x+1}=\dfrac{3}{4}$

  ✓ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x^2-3x)}{(x-2)\cdot(x^2-5x+6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x}{x^2-5x+6}=\left[\dfrac{-2}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 2^-\\ +\infty & \text{si } x\to 2^+\end{cases}$

  ✓ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3+5x^2+7x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\cdot(x^2+x)}{(x+1)\cdot(x^2+4x+3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2+4x+3}=(*)$

  Este último límite vuelve a ser del tipo $\dfrac{0}{0}$, así que volvemos a dividir entre $x+1$:

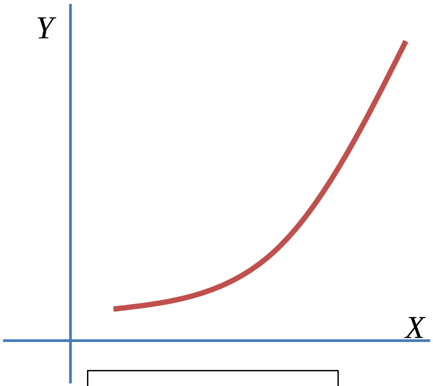
  $(*)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2+4x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot(x+3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{-1}{2}$

Comportamiento de una función en "más infinito"

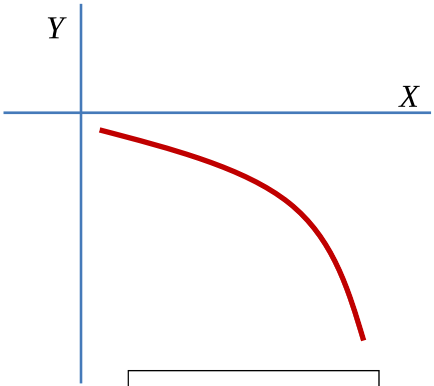
Para expresar que damos a x valores cada vez más grandes, ponemos $x \to +\infty$ (x tiende a más infinito). Los posibles comportamientos de una función cuando $x \to +\infty$ son los siguientes:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, es decir, cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ crecen cada vez más. Por ejemplo, son de este tipo las funciones potenciales como $y = x^n$, las funciones radicales como $y = \sqrt[n]{x}$, y las funciones exponenciales y logarítmicas de base mayor que 1: $y = a^x$, $y = \log_a x$ $(a > 1)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, es decir, cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ son cada vez más pequeños y negativos. Como ejemplo se podrían poner las funciones del ejemplo anterior precedidas del signo menos: $y = -x^5$, $y = -2^x$, $y = -\sqrt{x}$, $y = -\log_3 x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, es decir, cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ son cada vez más próximos a un número l. En tal caso, se dice que la recta $y = l$ es una **asíntota horizontal** de la curva. Por ejemplo, es fácil darse cuenta, sobre todo con la ayuda de la calculadora, de que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 4} = 2$, con lo que la recta horizontal $y = 2$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 4}$. En el siguiente apartado veremos métodos prácticos para el cálculo de límites cuando $x \to +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe, es decir, cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ ni crecen ni decrecen indefinidamente, ni se acercan cada vez más a ningún número. Este comportamiento lo tienen, por ejemplo, las funciones trigonométricas, pues oscilan indefinidamente.

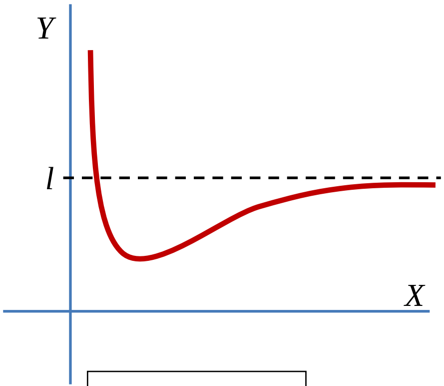
Desde el punto de vista gráfico, los cuatro casos anteriores los podemos representar así:



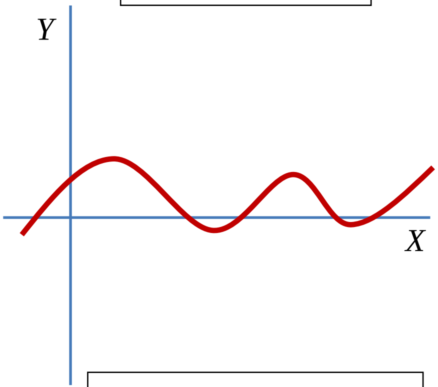
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe

Cálculo de límites en "más infinito"

Al igual que en los límites en un punto, el cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ presenta una variedad de casos, que dependen del tipo de funciones que se presenten. Los más importantes para este nivel de 1º de Bachillerato son los siguientes.

Límites de funciones polinómicas

El límite cuando $x \to +\infty$ de una función polinómica es siempre $+\infty$ o $-\infty$, según que el coeficiente del término de mayor grado (coeficiente líder) sea positivo o negativo. Es decir, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_o$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_o\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$. Observa que en este tipo de límites el protagonismo lo desempeña el término de mayor grado del polinomio, es decir, el valor de las potencias de grado inferior es insignificante comparado con el valor que va tomando el término de mayor grado cuando $x \to +\infty$. De este modo podemos escribir también: $\lim_{x\to+\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_o\right) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.

Así por ejemplo: $\lim_{x\to+\infty}\left(4x^3 - 6x^2 - 2x + 1\right) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(-6x^5 - 7x^4 + 2x^2 - 15\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-6x^5\right) = -\infty$

Límites de funciones inversas de polinómicas

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$, pues al dividir 1 por un número cada vez más grande, el cociente es cada vez más próximo a cero. En particular, si $P(x)$ es una función polinómica, entonces $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{P(x)} = 0$.

Límites de funciones racionales

Hemos visto que, cuando $x \to +\infty$, el protagonismo de una función polinómica lo desempeña el término de mayor grado. De igual modo, en el límite cuando $x \to +\infty$ de un cociente de polinomios o función racional, sólo importan los términos de mayor grado del numerador y del denominador. Por tanto, podemos dar la siguiente regla para hallar límites, cuando $x \to +\infty$, de funciones racionales.

Supongamos que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_o}$ es una función racional. Entonces:

- Si $\text{grado}\, P(x) > \text{grado}\, Q(x)$, es decir, si $m > n$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$. El signo del infinito será el mismo que el del cociente de los coeficientes líderes $\frac{a_m}{b_n}$.
- Si $\text{grado}\, P(x) < \text{grado}\, Q(x)$, es decir, si $m < n$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- Si $\text{grado}\, P(x) = \text{grado}\, Q(x)$, es decir, si $m = n$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_n}$.

Veamos tres ejemplos.

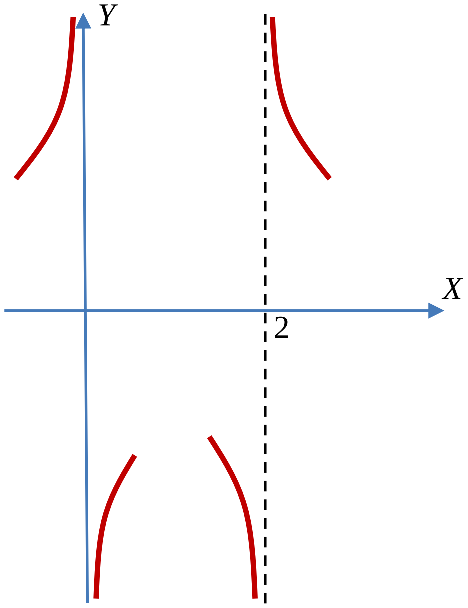
- ✓ $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{-6x^2 + 5x - 3} = -\infty$ porque el grado del polinomio de arriba es mayor que el grado del polinomio de abajo y, además, el cociente de los coeficientes líderes, $\frac{4}{-6}$, es negativo.
- ✓ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4 - 2x^2 + x - 7}{5x^7 - 4x^3 + 6x^2 - 1} = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.
- ✓ $\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 1} = \frac{8}{4} = 2$, porque los grados son iguales y entonces se dividen los coeficientes líderes.

Ramas infinitas. Asíntotas

A lo largo de esta unidad nos hemos encontrado ya con **ramas infinitas**, es decir, tramos de curva que se alejan indefinidamente. Cuando una rama infinita se aproxima a una recta, a esta se la llama **asíntota** de la curva y a la rama correspondiente **rama asintótica**. Vamos a estudiar con detalle los tipos de ramas infinitas.

Ramas infinitas en un punto. Asíntotas verticales

Las únicas ramas infinitas que pueden darse en valores concretos de la abscisa, $x=c$, son las ramas asintóticas verticales. Es decir, en una función hay **asíntota vertical** en $x=c$ si $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$. Si $f(x)$ es una función racional simplificada, es decir, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios que no tengan raíces comunes, sus asíntotas verticales se encuentran en los valores de x que anulan o son raíces del denominador. Se hallan pues resolviendo la ecuación $Q(x)=0$. Una vez calculadas las asíntotas de una función racional uno puede "posicionar" las ramas asintóticas con cierta facilidad. Basta hacer el estudio del signo del límite ($+\infty$ o $-\infty$), dependiendo de que tendamos al punto por la izquierda o por la derecha, con lo que sabremos hacia qué parte de la asíntota (por arriba o por abajo) se aproxima la rama infinita de la curva. Veamos un ejemplo.



Dada la función $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$, observamos que las soluciones de $x^2-2x=0$, son $x=0$ y $x=2$. Estas son las asíntotas verticales. Si ahora calculamos el límite de la función cuando $x\to 0$ y cuando $x\to 2$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to 0^-\\ -\infty & \text{si } x\to 0^+\end{cases}$$

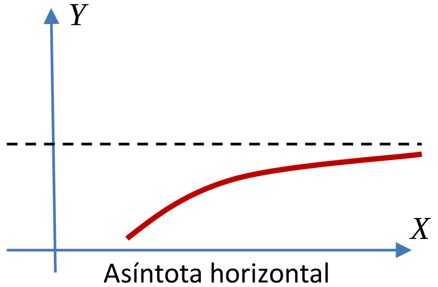
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=\left[\frac{5}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 2^-\\ +\infty & \text{si } x\to 2^+\end{cases}$$

Por tanto, podemos dibujar de manera aproximada las ramas infinitas o asintóticas de la función, que las tiene, como hemos visto, cuando $x\to 0$ y cuando $x\to 2$ (véase la figura de la derecha).

Ramas infinitas en "más infinito"

Hay varios tipos de ramas infinitas cuando $x\to+\infty$. Veamos las más importantes.

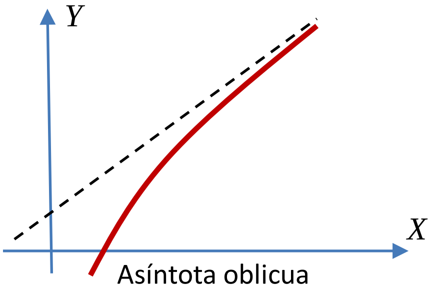
Asíntota horizontal. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, entonces la recta $y=l$ es una asíntota horizontal de la función.



Asíntota horizontal

Asíntotas oblicuas. Hay funciones $y=f(x)$ que, cuando $x\to+\infty$, se aproximan mucho a una recta del tipo $y=mx+n$, con $m\neq 0$. Dicha recta es una asíntota oblicua.

Ramas parabólicas. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$, y la curva no tiene asíntota oblicua, entonces la curva presenta una rama parabólica. Un ejemplo gráfico se vio al final de la página 5, cuando se estudió el comportamiento de una función en $+\infty$. Hay dos tipos de ramas parabólicas. En uno de ellos la curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. Un ejemplo son las funciones polinómicas y exponenciales. En el otro tipo, la curva crece, o decrece, pero cada vez más despacio. Es el caso de las funciones radicales y logarítmicas.



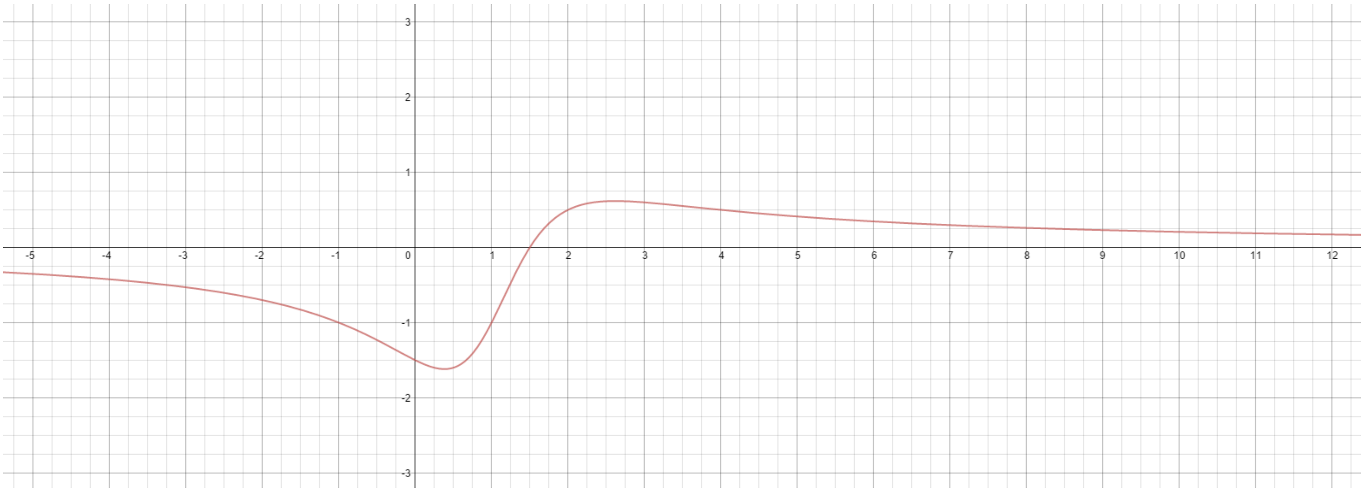
Asíntota oblicua

Obtención de ramas infinitas en funciones racionales

En este apartado consideraremos el caso particular de una función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Para hallar su rama infinita cuando $x\to+\infty$, procederemos del siguiente modo.

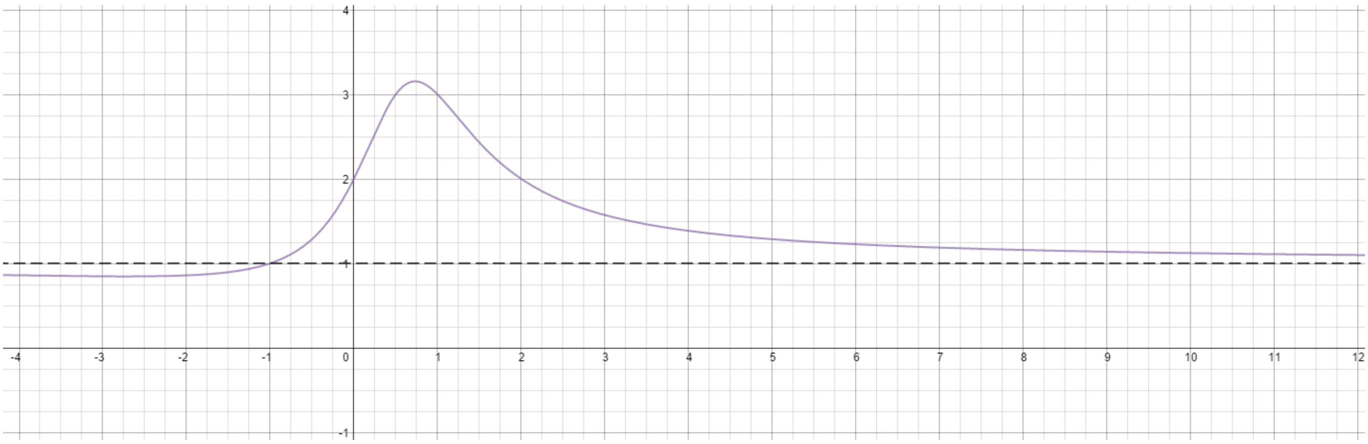
1) Si $\text{grado}\,P(x)<\text{grado}\,Q(x)$, sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$. En este caso la recta $y=0$ (el eje X) es **asíntota horizontal**. Para hallar la posición de la curva respecto de la asíntota, se estudia el signo de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ para un valor grande de x.

   Por ejemplo, la función $y=\dfrac{2x-3}{x^2-2x+2}$ tiene en el eje X una asíntota horizontal. Además, para un valor grande de x, tanto el numerador como el denominador son positivos, con lo que la curva estará por encima de la asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$.



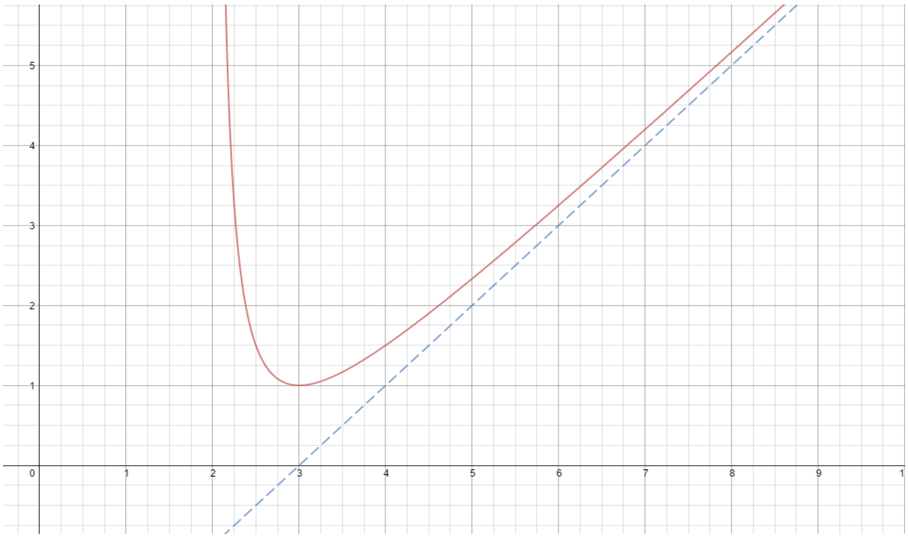
2) $\text{grado}\,P(x)=\text{grado}\,Q(x)$, sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=l$, con lo que la recta $y=l$ es una **asíntota horizontal**. Para hallar la posición de la curva respecto de la asíntota, estudiamos el signo de la diferencia $\dfrac{P(x)}{Q(x)}-l$ para un valor grande de x.

   Por ejemplo, la función $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-x+1}$, tiene una asíntota horizontal en $y=1$. Además, la diferencia $\dfrac{x^2+2}{x^2-x+1}-1$ es positiva si se sustituye x por un valor grande. Por tanto, la curva se acerca a la asíntota por arriba cuando $x\to+\infty$.

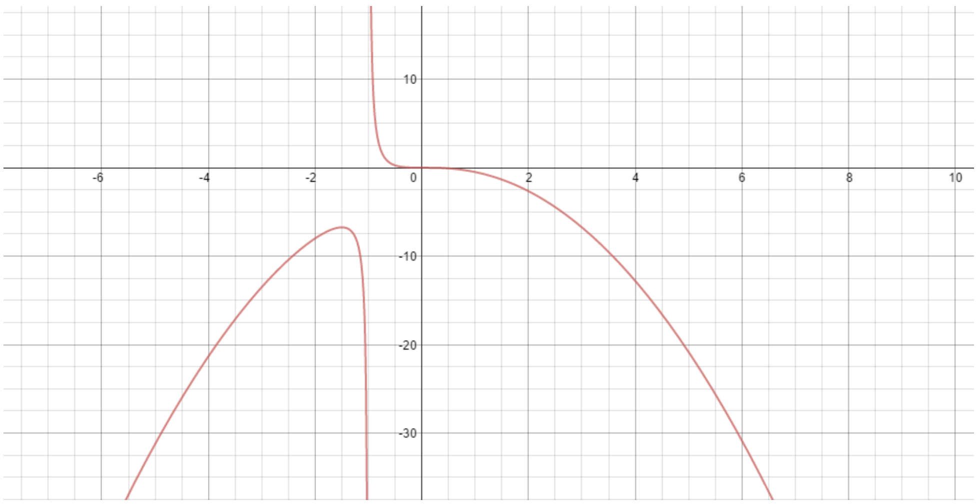


3) $\text{grado}\,P(x)-\text{grado}\,Q(x)=1$. En este caso efectuamos la división de $P(x)$ entre $Q(x)$, con lo que se obtendrá de cociente un polinomio de grado uno, o sea, del tipo $mx+n$, y de resto un polinomio $R(x)$ de grado menor que $Q(x)$. Por tanto, como "dividendo es igual a divisor por cociente más el resto", tendremos que $P(x)=Q(x)\cdot(mx+n)+R(x)$, de donde $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=mx+n+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Si ahora tomamos límites cuando $x\to+\infty$, vemos que nuestra función se dirige hacia "el mismo sitio" que la recta $y=mx+n$, es decir hacia $+\infty$ si $m>0$, o hacia $-\infty$ si $m<0$. Esto es porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{R(x)}{Q(x)}=0$, al ser $R(x)$ de grado menor que $Q(x)$. Todo este razonamiento es para demostrar que la recta $y=mx+n$ es una **asíntota oblicua** de la función racional. La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua estudiando el signo de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ para valores grandes de x.

Por ejemplo, $y=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$ y, por tanto, la recta $y=x-3$ es una asíntota oblicua. Además, para valores grandes de x, $\dfrac{1}{x-2}$ es positivo, por lo que la curva está por encima de la asíntota cuando $x\to+\infty$.

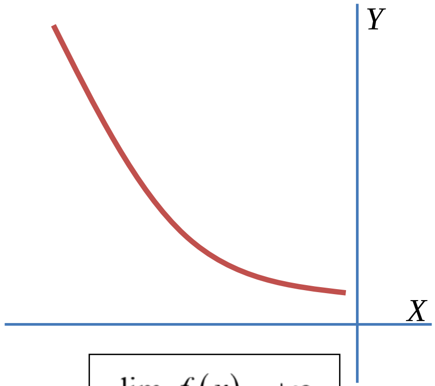


4) $\text{grado}\,P(x)-\text{grado}\,Q(x)\geq 2$. En este caso hay una **rama parabólica**, hacia arriba o hacia abajo según que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sea $+\infty$ o $-\infty$. Un ejemplo es la función $y=\dfrac{x^3}{-x-1}$, en la que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{-x-1}=-\infty$ (la rama parabólica va hacia abajo cuando $x\to+\infty$)

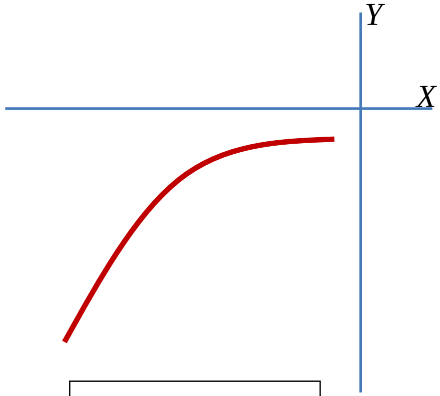


Comportamiento de una función en "menos infinito"

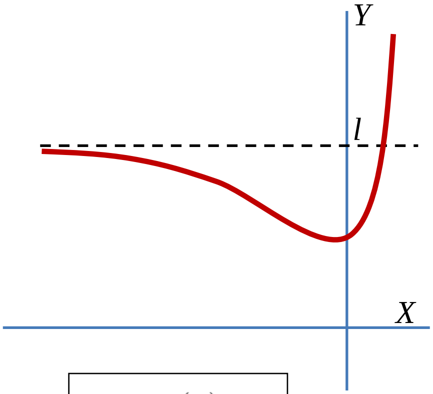
Hasta ahora hemos trabajado el comportamiento de las funciones cuando $x \to +\infty$. Si, por el contrario, hemos de estudiar el comportamiento de una función cuando $x \to -\infty$, las definiciones, razonamientos y procedimientos sobre el cálculo de límites son similares a los que se han hecho para los límites cuando $x \to +\infty$. Un resumen gráfico de las tres situaciones más comunes sería el siguiente:



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales, basta razonar sobre las potencias de números negativos. Si n es par, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, y si n es impar, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

Teniendo esto en cuenta y manejando correctamente la regla de los signos, los procedimientos para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales son idénticos a los ya vistos para el caso de que $x \to +\infty$. Otro tanto ocurre con las asíntotas y demás ramas infinitas. Así pues:

- En general, todos los límites cuando $x \to -\infty$ se resuelven de forma similar a los $x \to +\infty$, teniendo en cuenta la regla de los signos.
- La obtención de las asíntotas horizontales y oblicuas para $x \to -\infty$ y la posición de la curva respecto a ellas, es similar a lo ya visto.
- Si la función es cociente de dos polinomios y tiene asíntota horizontal u oblicua para $x \to +\infty$, tiene la misma asíntota para $x \to -\infty$.

Ejemplo

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$ se obtiene la asíntota horizontal $y = 1$ (la misma que se obtendría si $x \to +\infty$). Además, si tomamos un valor muy grande pero negativo se tiene que $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x} - 1 < 0$, con lo que la curva se acerca a la asíntota por debajo cuando $x \to -\infty$ (cuando $x \to +\infty$ la curva se acerca por arriba). Recordemos además (ver página 7) que $x = 0$ y $x = 2$ eran asíntotas verticales y se vio la posición de la curva respecto de las mismas. Con esta información podemos hacer una representación gráfica más o menos aproximada de la función (ver figura de la derecha).