Cálculo de límites

Son indeterminaciones del cálculo de límites todas aquellas expresiones en las que, al sustituir en ellas x por el valor al que tiende, se obtiene alguna de las siguientes relaciones: $\frac{0}{0}\quad \infty-\infty \quad \frac{\infty}{\infty}\quad 0\cdot\infty \quad \infty^0 \quad 1^{\infty}\quad 0^0$

No representan indeterminación aquellas expresiones donde, siendo *k* una constante distinta de cero, la sustitución mencionada en el párrafo anterior rinde alguno de los siguientes valores propios o impropios:

$$\frac{0}{k}=0 \quad \frac{k}{0}=\pm\infty \quad \frac{\infty}{k}=\pm\infty \quad \frac{k}{\infty}=0$$

A) INDETERMINACIÓN: $\boxed{\infty-\infty}$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)^2-x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)=\frac{3}{0}$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)=-\infty\end{array}\right.$$

x = 1 es una asíntota vertical de ramas divergentes.

En otros casos, sobre todo en aquellos en que aparecen radicales, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

B) INDETERMINACIÓN: $\boxed{0\cdot\infty}$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$

C) INDETERMINACIÓN: $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta con descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

En aquellos casos en que aparecen funciones irracionales (radicales), basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=2$$

D) INDETERMINACIÓN: $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$

En la mayoría de los casos basta con dividir el numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=4$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}}{\dfrac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1}=1$$

E) INDETERMINACIONES: $\boxed{\infty^0 \quad 0^0 \quad 1^\infty}$

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$$

de donde resulta que:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln(f(x))}$$

pudiendo aparecer otras indeterminaciones, que resolveremos por los métodos anteriores o por métodos que aprenderemos en temas posteriores.

En el caso de la indeterminación 1^{∞} podemos aplicar con mayor facilidad la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1+3x^2}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{1+3x^2}{x^2}\right)} = e^{-6}$

NOTAS IMPORTANTES

1. INDETERMINACIONES DE ALGUNA DE LAS FORMAS 0/0, ∞/∞.

Se resuelven mediante aplicación de la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

2. INDETERMINACIÓN DE LA FORMA $0\cdot\infty$

Se convierten a la forma anterior, apta para aplicación de la regla de L´Hôpital, mediante la siguiente transformación:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{tgx}\cdot\cos x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{tgx}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}e^{tgx}}{\frac{senx}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{e^{tgx}}{senx}\right) = \infty$

3. INDETERMINACIONES DE LA FORMA $\infty - \infty$

Pueden convertirse a la forma $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ a través de las siguientes transformaciones:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))}{f(x)+g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-g^2(x)}{f(x)+g(x)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = 0$$

4. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES MEDIANTE EQUIVALENCIAS

En ocasiones resulta útil el empleo de sustituciones de infinitésimos o infinitos equivalentes para resolver distintas indeterminaciones. Así por ejemplo, cuando x tiende a cero se verifican las siguientes equivalencias:

$\operatorname{sen} x \to x$	$\operatorname{tg} x \to x$	$1-\cos x \to \frac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \to x$
$\operatorname{arcsen} x \to x$	$\operatorname{arctg} x \to x$	$a^x - 1 \to x\ln a$	

EJERCICIOS:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x+2}$ Sol: 4
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ Sol: 0
3. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$ Sol: $\sqrt{2}$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x+2}$ Sol: 4
5. $\lim_{x\to 0} x\sqrt[x]{e}$ Sol: ∞
6. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$ Sol: 1
7. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ Sol: 0
8. $\lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt[x]{a}\right)$ Sol: -ln a
9. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^x$ Sol: $\sqrt{ab}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$ Sol: 1/2
11. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+9}-\sqrt{x^2-6x+8}\right)$ Sol: 11/2

12. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2+x}{2x+4}\right)^{\frac{4-x}{2-\sqrt{x}}}$ Sol: 1/16

13. $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ Sol: e^2

14. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}}$ Sol: $e^{-13/9}$

15. $\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)^{x-1}$ Sol: 1

16. $\lim_{x\to \infty}\left(x^2-x\right)^{\frac{2}{x}}$ Sol: 1

17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ Sol: 1

18. $\lim_{x\to e}(1-\ln x)\cdot(x-e)^{-1}$ Sol: -1/e