Conceptos básicos. Suma, resta y producto de polinomios

Un **monomio** en una variable o indeterminada x es una expresión de la forma ax^n, en la que a es un número real llamado **coeficiente**, y n es un número natural al que llamamos **grado**.

Dos monomios del mismo grado reciben el nombre de **monomios semejantes**. Solamente se pueden sumar o restar monomios semejantes. Sin embargo, dos monomios cualesquiera se pueden multiplicar o dividir, aplicando para ello las propiedades de las potencias.

Monomio: $-6x^5$; **Coeficiente**: -6 ; **Grado**: 5

Monomio: $\dfrac{7x^3}{5}=\dfrac{7}{5}x^3$; **Coeficiente**: $\dfrac{7}{5}$; **Grado**: 3

Suma: $-5x^3+2x^3=\left(-5+2\right)x^3=-3x^3$

Producto: $\left(2x^4\right)\cdot\left(-6x^3\right)=-12x^7$; **División**: $\dfrac{18x^6}{-3x^5}=-6x$

Un **polinomio** en una variable o indeterminada x es una suma de monomios de la forma:

$$P\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

El **grado** de un polinomio es el mayor exponente al que está elevado la variable x. El **coeficiente principal** o **coeficiente líder** del polinomio es aquel que acompaña al término de exponente más alto. **Término independiente** es el que no está acompañado de variable x.

Polinomio: $5x^3-4x^5-3x^6+2x^2-x+1$

Grado: 6 ; **Coeficiente líder**: -3 ; **Término independiente**: 1

Polinomio: $-x^4-\dfrac{1}{2}x^3+5x^2-\dfrac{2}{3}x$

Grado: 4 ; **Coeficiente líder**: -1 ; **Término independiente**: 0

Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico**, como su nombre indica, es el valor que resulta de sustituir en el polinomio $P\left(x\right)$ el valor de la variable por un número real dado, $x=a$.

El valor numérico para $x=a$ se designa por $P\left(a\right)$.

Un número real a se dice que es una **raíz** de un polinomio $P\left(x\right)$ si su valor numérico es 0, es decir:

$$a \text{ raíz de } P\left(x\right) \iff P\left(a\right)=0$$

El valor numérico de $P\left(x\right)=-3x^4-2x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x+3$ para $x=-2$ es:

$$P\left(-2\right)=-3\left(-2\right)^4-2\left(-2\right)^3-\frac{1}{2}\left(-2\right)^2-\left(-2\right)+3=$$

$$=-3\cdot16-2\cdot\left(-8\right)-\frac{1}{2}\cdot4+2+3=-48+16-2+2+3=-29$$

Suma, resta y producto de polinomios

Suma. Para sumar polinomios se suman los monomios o términos semejantes.

Polinomio opuesto. El opuesto de un polinomio $P\left(x\right)$ es el polinomio $-P\left(x\right)$ que resulta de cambiar el signo a todos los términos de $P\left(x\right)$

Resta. Para restar dos polinomios se suma al primero el opuesto del segundo.

Multiplicación o producto. Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva respecto de la suma ("todos por todos") y se simplifican términos aplicando las propiedades de las potencias.

Dados $P\left(x\right)=2x^3-x^2+x-1$ y $Q\left(x\right)=-3x^2+6$, hagamos la suma, la resta y el producto:

Suma: $P\left(x\right)+Q\left(x\right)=\left(2x^3-x^2+x-1\right)+\left(-3x^2+6\right)=$

$=2x^3-x^2+x-1-3x^2+6=2x^3-4x^2+x+5$

Resta: $P\left(x\right)-Q\left(x\right)=\left(2x^3-x^2+x-1\right)-\left(-3x^2+6\right)=$

$=2x^3-x^2+x-1+3x^2-6=2x^3+2x^2+x-7$

Producto: $P\left(x\right)\cdot Q\left(x\right)=\left(2x^3-x^2+x-1\right)\cdot\left(-3x^2+6\right)=$

$=2x^3\cdot\left(-3x^2\right)-x^2\cdot\left(-3x^2\right)+x\cdot\left(-3x^2\right)-1\cdot\left(-3x^2\right)+$

$+2x^3\cdot6-x^2\cdot6+x\cdot6-1\cdot6=$

$=-6x^5+3x^4-3x^3+3x^2+12x^3-6x^2+6x-6=$

$=-6x^5+3x^4+9x^3-3x^2+6x-6$

División de polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del resto

División de polinomios

Al dividir un polinomio $P(x)$ (dividendo) de grado m entre un polinomio $Q(x)$ (divisor) de grado n, con $m > n$, se obtiene un cociente $C(x)$ de grado $m-n$, y un resto $R(x)$, de tal manera que

$$P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x)$$

El procedimiento para dividir es el siguiente:

1. Colocamos el dividendo y el divisor ordenados de mayor a menor grado. Si falta algún término del dividiendo dejamos un espacio.
2. Empezamos dividiendo los términos de mayor grado del dividendo y del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este término por cada uno de los términos del divisor y los colocamos, con signo contrario (pues hemos de restar) bajo los términos correspondientes del dividendo.
4. Continuamos el proceso hasta que el grado del polinomio obtenido es menor que el grado del divisor (éste último será el resto de la división).

Dados $P(x) = 2x^2 - x^4 - x + 3$ y $Q(x) = -x^2 + 2x - 2$, efectuar la división $P(x):Q(x)$.

Colocamos adecuadamente el dividendo y el divisor y procedemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-x^4 & & +2x^2 & -x & +3 & -x^2+2x-2 \\ \cline{6-6}
x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +4x^2 & -x & +3 & \\
 & +2x^3 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-5}
 & & & 3x & +3 &
\end{array}$$

De este modo, el cociente es el polinomio $C(x) = x^2 + 2x$ y el resto es el polinomio $R(x) = 3x + 3$.

Además, puedes comprobar que se cumple la siguiente igualdad ("dividendo igual a divisor por cociente más el resto"):

$$-x^4 + 2x^2 - x + 3 = \left(-x^2 + 2x - 2\right)\cdot\left(x^2 + 2x\right) + \left(4x + 3\right)$$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $x-a$ o $x+a$. El procedimiento es el siguiente:

1. Colocamos en horizontal los coeficientes del dividendo ordenado de mayor a menor grado y, **si falta alguno, ponemos un cero**.
2. A la izquierda y más abajo colocamos el valor de la variable que anula el cociente, es decir, a si el divisor es $x-a$; o bien $-a$ si el divisor es $x+a$.
3. Bajamos directamente el primer coeficiente del dividendo. Éste será el primer coeficiente del cociente.
4. Multiplicamos sucesivamente a o $-a$ por cada término del cociente, y sumamos el resultado con el coeficiente siguiente del dividendo.
5. El cociente $C(x)$ es un polinomio de **un grado menor** que el divisor, cuyos coeficientes están ordenados.
6. El resto R de la división es el último número.

Dividir $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x + 2$ entre $x + 2$.

Colocamos en horizontal los coeficientes del dividendo y ponemos un cero en el lugar del término de grado dos, que no aparece. Colocamos debajo, a la izquierda el valor que anula el cociente, en este caso -2, y procedemos:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -2 & 0 & -5 & 2 \\
-2 & & -2 & 8 & -16 & 42 \\ \hline
 & 1 & -4 & 8 & -21 & 44
\end{array}$$

El cociente de la división es el polinomio de grado 3 cuyos coeficientes son los números de la última fila, salvo el último, que es el resto:

$$C(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 21 \;\;;\;\; R = 44$$

Teorema del resto

El resto R que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio del tipo $x-a$ ($x+a$), es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$ ($x = -a$). Es decir:

$$R = P(a) \quad \text{o bien} \quad R = P(-a)$$

Si se divide $P(x)$ entre $x-a$, obtenemos un cociente $Q(x)$ y un resto R de tal manera que $P(x) = (x-a)\cdot C(x) + R$

Sustituyendo x por a tenemos:

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + R = 0\cdot C(a) + R = 0 + R = R$$

Por ejemplo, el resto R de la división $\left(x^3 - 2x + 1\right):\left(x+2\right)$ es

$$R = P(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1 = -8 + 4 + 1 = -3$$

Factorización de polinomios

Concepto de factor de un polinomio. Polinomios irreducibles

Un polinomio $Q(x)$ es un **factor** de otro polinomio $P(x)$ si al realizar la división $P(x):Q(x)$ el resto es cero.

En este caso $P(x)=Q(x)\cdot C(x)$ donde $C(x)$ es el cociente de la división.

Un polinomio que no tiene factores se denomina **polinomio irreducible**. Por ejemplo, todos los polinomios de grado uno de la forma $x+a$ o $x-a$, son irreducibles.

Hemos visto que a es una raíz de un polinomio $P(x)$ si $P(a)=0$. Por el teorema del resto, esto quiere decir que al dividir $P(x)$ entre $x-a$ el resto es cero, es decir que $P(x)=(x-a)\cdot C(x)$.

Por tanto, decir que a es una raíz de un polinomio $P(x)$ es lo mismo que decir $x-a$ es un factor de $P(x)$. También diremos que a es una solución de la ecuación $P(x)=0$.

Factorización de polinomios. Procedimiento

Si un polinomio $P(x)$ tiene coeficientes enteros, para que a sea una raíz del mismo, es necesario que su término independiente sea múltiplo de a.

Por tanto, para buscar factores de $P(x)$ del tipo $x-a$, probaremos con los valores de a que sean divisores (positivos y negativos) del término independiente.

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de factores irreducibles. Si el polinomio tiene coeficientes enteros, el procedimiento a seguir para factorizarlo será pues el siguiente:

1. Encontramos los divisores del término independiente.
2. Comprobamos si son raíces del polinomio, comenzando por el más pequeño.
3. Con el primero que encontremos aplicamos la regla de Ruffini.
4. Tomamos el cociente que hayamos obtenido y repetimos el proceso empezando a probar con la misma raíz obtenida anteriormente.
5. Si un divisor del término independiente no es raíz en un paso, tampoco lo será en el siguiente. Puede que haya raíces repetidas (dobles, triples, etc.); por lo tanto, si una raíz lo es en un paso, también lo puede ser en el siguiente.
6. Cuando tengamos un cociente de grado 2, podemos resolver la ecuación correspondiente de 2º grado. Es la única opción que tenemos si el polinomio tiene raíces reales no enteras (racionales o irracionales).
7. Finalmente escribimos la descomposición en producto de factores del polinomio.

Factorizar el polinomio $x^5-12x^3-2x^2+27x+18$.

1. Divisores del término independiente:
   $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm18$
2. Probamos si los divisores son raíces del polinomio:
   - $P(1)=1^5-12\cdot1^3-2\cdot1^2+27\cdot1+18=$
     $=1-12-2+27+18=32\neq0\Rightarrow1$ **no es raíz**.
   - $P(-1)=(-1)^5-12\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+27\cdot(-1)+18=$
     $-1+12-2-27+18=0\Rightarrow-1$ **sí es raíz**.
3. Aplicamos la regla de Ruffini con $x=-1$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -12 & -2 & 27 & 18 \\
-1 & & -1 & 1 & 11 & -9 & -18 \\
\hline
 & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 & \boxed{0}
\end{array}$$

   El cociente resultante es $x^4-x^3-11x^2+9x+18$
4. Tomamos el cociente resultante y repetimos el proceso probando de nuevo la misma raíz:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 \\
-1 & & -1 & 2 & 9 & -18 \\
\hline
 & 1 & -2 & -9 & 18 & \boxed{0}
\end{array}$$

Y así sucesivamente repetimos el proceso hasta que terminemos con un polinomio irreducible. Podemos continuar de una manera más compactada aplicando Ruffini repetidamente:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -9 & 18 \\
2 & & 2 & 0 & -18 \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Por tanto $P(x)=(x+1)^2(x-2)(x-3)(x+3)$

Fracciones algebraicas

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x)\neq 0$ una **fracción algebraica** es una expresión algebraica del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Si $P(x)$ es un número real, es decir si $P(x)=k$, entonces la expresión $\dfrac{k}{Q(x)}$, también se considera una fracción algebraica.

Por poner algunos ejemplos, son fracciones algebraicas las siguientes:

$$\frac{2x^3-3x^2+6x-5}{4x^4-3x^2+x-1}\ ;\ \frac{x+1}{x^2-1}\ ;\ \frac{2x-3}{x-2}\ ;\ \frac{2}{x}\ ;\ \frac{1}{x^3-x^2+x-1}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

En general, para simplificar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se factorizan $P(x)$ y $Q(x)$. Si existen factores comunes se eliminan y queda otra fracción algebraica equivalente donde los grados del numerador y del denominador son menores que los de la fracción algebraica original.

Para simplificar la fracción algebraica $\dfrac{2x^3-7x^2-5x+4}{x^3-6x^2+5x+12}$ factorizamos los polinomios y eliminamos factores comunes:

$$\frac{2x^3-7x^2-5x+4}{x^3-6x^2+5x+12}=\frac{(x+1)(x-4)(2x-1)}{(x+1)(x-3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-3}$$

A veces se descompone la fracción en dos sumandos. Si $\text{grado}\,P(x)\geq\text{grado}\,Q(x)$ efectuamos la división y hallamos el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$. Entonces tenemos que $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$.

Dividiendo todos los términos entre $Q(x)$ tenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

De la fracción $\dfrac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+4x-1}$ se obtiene, realizando la división, que el cociente es $C(x)=x-7$ y el resto es $R(x)=30x-9$ (¡compruébalo!). Entonces:

$$x^3-3x^2+x-2=\left(x^2+4x-1\right)(x-7)+(30x-9)$$

Y de aquí:

$$\frac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+4x-1}=x-7+\frac{30x-9}{x^2+4x-1}$$

Suma, resta, producto y división de fracciones algebraicas

Suma y resta. Para sumar o restar fracciones algebraicas se procede exactamente igual que al sumar o restar fracciones numéricas. Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores (para ello debemos factorizar los denominadores) y procedemos a efectuar las sumas y restas correspondientes. Al final, si es posible, se simplifica la fracción algebraica resultante, tal y como se ha mostrado en la sección anterior.

$$\frac{2x^3-x^2+x-1}{x^3+2x^2-x-2}-\frac{x^2-x+2}{x^2-1}=\frac{2x^3-x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x^3-x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{\left(x^2-x+2\right)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{2x^3-x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{x^3+x^2+4}{(x+1)(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{x^3-2x^2+x-5}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+2x^2-x-2}$$

Producto y división. El producto y la división de fracciones algebraicas se realiza exactamente igual que el producto y división de fracciones numéricas. Al final, si es posible, se simplifica la fracción algebraica resultante, tal y como se ha mostrado en la sección anterior. Por eso es mejor factorizar todos los polinomios antes de efectuar los productos correspondientes.

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x-1}{x^2-x-2}=\frac{\left(x^2-4\right)(x-1)}{\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2-x-2\right)}=$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x+1)(x-2)}=\frac{x+2}{(x+3)(x+1)}=\frac{x+2}{x^2+4x+3}$$

Ecuaciones de primer grado y de segundo grado

Ecuaciones de primer grado

La forma reducida de una ***ecuación de primer grado*** con una incógnita es una igualdad del tipo $ax+b=0$, donde a y b son números reales con $a\neq 0$.
Para resolverla despejamos la ***incógnita***:

$$ax+b=0\Rightarrow ax=-b\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

Por regla general la ecuación hay que reducirla, para ello se siguen los siguientes pasos:

1. ***Eliminar corchetes y paréntesis***.
2. ***Eliminar denominadores***.
3. ***Trasponer términos***, es decir, presentar los términos en los que aparece la incógnita en uno de los miembros de la igualdad, y los términos que no tienen incógnita en el otro.
4. ***Reducir términos semejantes.***
5. ***Despejar la incógnita.***

Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}\right)-5\frac{2x-3}{3}=x\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{x-1}{4}$$

Eliminamos paréntesis:

$$\frac{2x-2}{6}-\frac{2}{12}-\frac{10x-15}{3}=x-\frac{2x}{3}+\frac{x-1}{4}$$

Eliminamos denominadores multiplicando todos los términos por el mcm de los denominares, que es 12:

$$2(2x-2)-1\cdot 2-4(10x-15)=12x-4\cdot 2x+3(x-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x-4-2-40x+60=12x-8x+3x-3$$

Trasponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$4x-40x-12x+8x-3x=-3+4+2-60\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -43x=-57\Rightarrow x=\frac{-57}{-43}\Rightarrow x=\frac{57}{43}$$

Ecuaciones de segundo grado

La forma reducida de una ***ecuación de segundo grado*** con una incógnita es una igualdad del tipo

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a, b y c son números reales con $a\neq 0$ (llamados coeficientes). Para su resolución distinguiremos tres casos.

Caso 1: $b=0$. En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma $ax^2+c=0$.

Para resolverlas se despeja x^2 y luego se extrae la raíz cuadrada para despejar finalmente la incógnita.

$$3x^2-24=0\Rightarrow 3x^2=24\Rightarrow x^2=8\Rightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{8}\\ x_2=-\sqrt{8}\end{cases};$$

$6x^2+12=0\Rightarrow 6x^2=-12\Rightarrow x^2=-2$ (que no tiene solución ya que no se puede extraer la raíz cuadrada de un número negativo).

Caso 2: $c=0$. En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma $ax^2+bx=0$.

El proceso de resolución consiste en extraer factor común la incógnita x pues ésta aparece en ambos términos. Una de las soluciones siempre es $x=0$. La otra solución se obtiene de igualar a cero el otro factor y de resolver la correspondiente ecuación de primer grado.

$$3x^2-18x=0\Rightarrow x(3x-18)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ 3x-18=0\Rightarrow 3x=18\Rightarrow x=\dfrac{18}{3}\Rightarrow x_2=6\end{cases}$$

Caso 3 o caso general: En este caso vamos a suponer que los tres coeficientes a, b y c son todos distintos de cero. Este caso es el más general y la ecuación de segundo grado queda, en su forma reducida, así:

$$ax^2+bx+c=0$$

La solución se obtiene de sustituir los coeficientes a, b y c en la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para resolver $2(3x^2+5x)=2-x$ eliminamos el paréntesis y pasamos todos los términos al primer miembro. Luego aplicamos la fórmula: $2(3x^2+5x)=2-x\Rightarrow 6x^2+10x=2-x\Rightarrow$

$$\Rightarrow 6x^2+10x-2+x=0\Rightarrow 6x^2+11x-2=0\Rightarrow$$
$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{12}=$$
$$=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{12}=\frac{-11\pm 13}{12}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-11+13}{12}\Rightarrow x_1=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}\\ x_2=\dfrac{-11-13}{12}\Rightarrow x_2=-2\end{cases}$$

En general, las ecuaciones de segundo grado hay que reducirlas a uno de los tres casos anteriores, dando los pasos que se han descrito para las de primer grado.

Ecuaciones bicuadradas y de grado superior a dos

Ecuaciones bicuadradas

La forma reducida de una ***ecuación bicuadrada*** con una incógnita es de la forma

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Para resolverla se aplica el cambio de variable $x^2=z$, con lo que se convierte en una de segundo grado:

$$ax^4+bx^2+c=0 \Rightarrow a\left(x^2\right)^2+bx^2+c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow az^2+bz+c=0$$

Ahora se resuelve esta última. Una vez despejada la incógnita z se sustituyen sus valores en el cambio $x^2=z$ para obtener los valores de la incógnita x.

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$x^4-10x^2+9=0$$

aplicamos el cambio $x^2=z$: $z^2-10z+9=0$. Resolvemos esta última y, una vez obtenidos los valores de z, sustituimos en el cambio para obtener los de x:

$$x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=$$

$$=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases} z_1=\dfrac{18}{2}=9 \\ z_2=\dfrac{2}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=9\Rightarrow x=\pm 3 \\ x^2=1\Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

Ecuaciones de grado superior a dos

Una ***ecuación de grado superior a dos*** con una incógnita, se expresa de manera reducida de la forma

$$p(x)=0$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado mayor que dos.

El procedimiento para resolverlas consiste en extraer las raíces del $p(x)$:

$$x \text{ es raíz de } p(x) \Leftrightarrow x \text{ es solución de } p(x)=0$$

Por tanto debemos factorizar el polinomio $p(x)$ utilizando la regla de Ruffini.

Las raíces del polinomio serán las soluciones de la ecuación.

En el caso de que al factorizar el polinomio aparezca algún factor de segundo grado, tendremos que hallar las últimas soluciones de la ecuación resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación:

$$6x^5-19x^4-14x^3+67x^2-52x+12=0$$

Aplicamos Ruffini probando con los divisores del término independiente:

	6	−19	−14	67	−52	12
1		6	−13	−27	40	−12
	6	−13	−27	40	−12	0
−2		−12	50	−46	12	
	6	−25	23	−6	0	
3		18	−21	6		
	6	−7	2	0		

Puedes comprobar que ya no existen más raíces enteras. Por tanto la ecuación queda de la forma:

$$(x-1)(x+2)(x-3)\left(6x^2-7x+2\right)=0$$

Resolviendo la ecuación $6x^2-7x+2=0$ se obtiene las dos últimas raíces y soluciones de la ecuación original.

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6\cdot 2}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{1}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}=\begin{cases} x_1=\dfrac{7+1}{12}\Rightarrow x_1=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{7-1}{12}\Rightarrow x_2=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x=1,\ x=-2,\ x=3,\ x=\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{2}$$

Ecuaciones irracionales y con la incógnita en el denominador

Ecuaciones irracionales

Una ***ecuación irracional*** es aquella que presenta la incógnita bajo el signo de una raíz.

Habitualmente, a este nivel, la incógnita aparecerá bajo una raíz cuadrada.

El procedimiento para resolver una ecuación irracional es el siguiente:

1. Aislamos el radical (aislar significa "dejarlo solo" en uno de los dos miembros de la igualdad).
2. Elevamos los dos miembros al cuadrado.
3. Se resuelve la ecuación resultante.
4. Se comprueban los valores obtenidos para la incógnita en la ecuación inicial. Aquellos valores que no la cumplan no serán soluciones.

Resolver: $\sqrt{3x-5}+\dfrac{x}{2}=2$

Aislamos el radical: $\sqrt{3x-5}=2-\dfrac{x}{2}$

Elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{3x-5}\right)^2=\left(2-\frac{x}{2}\right)^2\Rightarrow 3x-5=2^2-2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-5=4-2x+\frac{x^2}{4}\Rightarrow 12x-20=16-8x+x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-20x+36=0$$

Ahora resolvemos la ecuación resultante, en este caso de 2º grado:

$$x=\frac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}=\frac{20\pm\sqrt{400-144}}{2}=$$

$$=\frac{20\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{20\pm 16}{2}=\begin{cases}x_1=18\\ x_2=2\end{cases}$$

Comprobamos los valores obtenidos para x en la ecuación original:

Para $x=18$: $\sqrt{3\cdot 18-5}+\dfrac{18}{2}=\sqrt{49}+9=7+9=16\neq 2$

Para $x=2$: $\sqrt{3\cdot 2-5}+\dfrac{2}{2}=\sqrt{1}+1=1+1=2$

Por tanto, solo $x=2$ es solución válida, ya que cumple la ecuación. Debemos descartar la solución $x=18$.

Ecuaciones con la incógnita en el denominador

En este caso la ecuación puede tomar aspectos muy distintos, pero, como su nombre indica, la incógnita siempre aparece en el denominador.

El procedimiento para resolverlas es el mismo que se utiliza en las de primer o segundo grado para conseguir su expresión reducida.

Normalmente se multiplican todos los términos por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores para eliminar los mismos y se resuelve la ecuación resultante, que ha de adoptar alguna de las formas vistas aquí hasta ahora.

Resolver: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{9}{2}$

El mcm de los denominadores es $2(x+1)(x+2)$. Multiplicando por el mismo todos los términos de la ecuación se eliminan los denominadores y tenemos:

$$2(x+2)+2\cdot 2(x+1)=9(x+1)(x+2)$$

Desarrollamos y resolvemos la ecuación resultante:

$$2x+4+4x+4=9\left(x^2+3x+2\right)\Rightarrow 6x+8=9x^2+27x+18$$

$$\Rightarrow 9x^2+21x+10=0$$

$$x=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4\cdot 9\cdot 10}}{2\cdot 9}=\frac{-21\pm\sqrt{441-360}}{18}=$$

$$=\frac{-21\pm\sqrt{81}}{18}=\frac{-21\pm 9}{18}=\begin{cases}x_1=-\dfrac{12}{18}=-\dfrac{2}{3}\\[2ex] x_2=-\dfrac{30}{18}=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

Sistemas de dos ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un ***sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*** se puede transforma a la forma reducida siguiente:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 son números reales y x, y son las incógnitas que hemos de despejar.

Es de sobra conocido que existen tres métodos para resolver este tipo de sistemas: ***sustitución, igualación*** y ***reducción***.

Se puede optar por resolver el sistema por el método que se crea más adecuado en cada caso. Eso sí, es conveniente expresar previamente el sistema en su forma reducida eliminando paréntesis y denominadores de ambas ecuaciones.

Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{3}+4y=\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{2(-2y+x)}{3}-\dfrac{3x}{2}=-\dfrac{13}{6} \end{cases}$

Eliminamos paréntesis y denominadores, y expresamos el sistema en su forma reducida:

$$\begin{cases} 3x-2y+12y=13 \\ 4(-2y+x)-9x=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-10y=13 \\ -8y+4x-9x=-13 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-10y=13 \\ -5x-8y=-13 \end{cases}$$

Lo resolveremos por **reducción**. Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 15x-50y=65 \\ -15x-24y=-39 \end{cases}$$

Sumando ambas tenemos: $-74y=26 \Rightarrow y=-\dfrac{26}{74}=-\dfrac{13}{37}$

Si multiplicamos la primera por -8 y la segunda por 10 podemos despejar la incógnita x:

$$\begin{cases} -24x+80y=-104 \\ -50x-80y=-130 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-74x=-234 \Rightarrow x=\dfrac{234}{74}=\dfrac{117}{37}$

Sistemas de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas

En este caso alguna de las ecuaciones no es lineal, es decir, la o las incógnitas pueden ir elevadas a un exponente mayor o igual que dos, aparecer bajo el signo radical o encontrarse en el denominador de una fracción.

Este tipo de sistemas se resuelven con mucha frecuencia aplicando el método de sustitución, aunque hay ocasiones en que se pueden aplicar cualquiera de los otros dos métodos.

Si se opta por el método de sustitución el procedimiento más habitual es el siguiente:

1. Despejamos la incógnita que consideremos más fácil de aislar en la ecuación más sencilla.
2. Sustituimos esta incógnita en la otra ecuación.
3. Resolvemos la ecuación que nos quede, encontrando el valor o valores de una de las incógnitas.
4. Encontramos la otra incógnita a partir de la expresión que hemos hallado en el primer paso.

Resolver el sistema $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x^2+y^2-4x-2y-20=0 \end{cases}$

En este caso es muy fácil despejar x en la primera ecuación:

$$x=2y-5$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación, desarrollamos y resolvemos la ecuación que nos quede:

$$(2y-5)^2+y^2-4(2y-5)-2y-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2-20y+25+y^2-8y+20-2y-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y^2-30y+25=0 \Rightarrow y^2-6y+5=0$$

Las soluciones de esta última ecuación de 2º grado son:

$$y_1=5,\ y_2=1$$

Encontramos ahora las soluciones para x sustituyendo en la expresión $x=2y-5$:

$$\begin{cases} y_1=5 \Rightarrow x_1=2\cdot 5-5 \Rightarrow x_1=5 \\ y_2=1 \Rightarrow x_2=2\cdot 1-5 \Rightarrow x_2=-3 \end{cases}$$

Inecuaciones de primer grado y de segundo grado

Inecuaciones de primer grado

La forma reducida de una ***inecuación de primer grado*** con una incógnita es una desigualdad de uno de los siguientes cuatro tipos:

$$ax > b \ ; \ ax \geq b \ ; \ ax < b ; \ \ ax \leq b$$

donde a y b son números reales con $a \neq 0$.

Para resolver la inecuación despejamos la ***incógnita***, tal y como se hace al resolver una ecuación de primer grado, teniendo en cuenta, al despejar finalmente la incógnita, (y esto es muy importante), que si $a < 0$ **cambia el sentido de la desigualdad**.

Por ejemplo, si al reducir la inecuación inicial nos queda

$$ax \leq b \text{ con } a < 0$$

entonces la solución de la inecuación es $x \geq \dfrac{b}{a}$.

A veces se pide que se dé la solución de la inecuación en forma gráfica o de intervalo.

Resolver la inecuación:

$$\frac{x-1}{3} - \frac{x-4}{2} < \frac{x+4}{2} - 3$$

Eliminamos denominadores multiplicando todos los términos por el mcm de los mismos, que es 6:

$$2(x-1) - 3(x-4) < 3(x+4) - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - 3x + 12 < 3x + 12 - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3x - 3x < 12 - 18 + 2 - 12 \Rightarrow -4x < -6$$

Ahora, para despejar x, hemos de dividir los dos miembros de la desigualdad entre 4, que es menor que cero, con lo que cambiará el sentido de la desigualdad:

$$x > \frac{-6}{-4} \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

La solución, en forma de intervalo, es $\left[\dfrac{2}{3} \ , \ +\infty\right)$

Inecuaciones de segundo grado

La forma reducida de una ***inecuación de segundo grado*** con una incógnita es una desigualdad de uno de los siguientes cuatro tipos:

$$ax^2 + bx + c > 0 \ ; \ ax^2 + bx + c \geq 0 \ ;$$

$$ax^2 + bx + c < 0 ; \ \ ax^2 + bx + c \leq 0$$

La resolución de inecuaciones de segundo grado está relacionada con el número de raíces del polinomio

$$ax^2 + bx + c$$

Si el polinomio tiene dos raíces, digamos r_1 y r_2, entonces factorizará de la forma

$$a(x - r_1)(x - r_2)$$

Ahora es necesario estudiar el signo de cada uno de los factores (incluido el coeficiente a) y del producto de ellos. Si, por ejemplo, $r_1 < r_2$, entonces la recta real la podemos dividir en tres trozos:

$$(-\infty \ , \ r_1) \ ; \ (r_1 \ , \ r_2) \ ; \ (r_2 \ , \ +\infty)$$

Tomando un valor x fijo, pero arbitrario, de cada intervalo podemos estudiar el signo del producto y decidir si se cumple la desigualdad dada o no. Si se cumple, el intervalo correspondiente será solución, si no se cumple no lo será.

Si el polinomio no tiene raíces reales no se podrá factorizar, con lo que las solución será todo $\mathbb{R}$, si un número real cualquiera cumple la desigualdad; o la inecuación no tendrá solución, en caso contrario.

Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2-9}{5} - \frac{x^2-4}{15} \leq \frac{1-2x}{3}$$

En primer lugar eliminamos lo denominadores multiplicando todos los términos por 15, que es el mcm de los mismos:

$$3(x^2-9) - (x^2-4) \leq 5(1-2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 27 - x^2 + 4 \leq 5 - 10x$$

Ahora pasamos todos los términos al primer miembro y escribimos la inecuación en su forma reducida:

$$2x^2 + 10x - 28 \leq 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 \leq 0$$

Las raíces del polinomio $x^2 + 5x - 14$ son -7 y 2 (¡compruébese!)

Por tanto la inecuación $x^2 + 5x - 14 \leq 0$ se puede escribir de forma equivalente así:

$$(x+7)(x-2) \leq 0$$

Las raíces dividen a la recta real en tres trozos:

$$(-\infty \ , \ -7) \ ; \ (-7 \ , \ 2) \ ; \ (2 \ , \ +\infty)$$

Si sustituimos un valor cualquiera k_1 del primer intervalo se puede apreciar que $(k_1+7)(k_1-2) > 0$. Del mismo modo si k_2 y k_3 son valores del segundo y tercer intervalo respectivamente se tiene que $(k_2+7)(k_2-2) < 0$ y que $(k_3+7)(k_3-2) > 0$. Así pues la solución de la inecuación es el intervalo $[-7 \ , \ 2]$. Se cierra porque la desigualdad no es estricta y las soluciones de la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$ también son soluciones de la inecuación.

Inecuaciones de grado superior a dos. Inecuaciones racionales

Inecuaciones de grado superior a dos

Una ***inecuación de grado superior a dos*** con una incógnita se ajusta a una desigualdad de uno de los siguientes cuatro tipos:

$$p(x)>0\ ;\ p(x)\geq 0\ ;\ p(x)<0\ ;\ p(x)\leq 0$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado mayor que dos.

El procedimiento para resolver inecuaciones de grado superior a dos es exactamente el mismo que para resolver inecuaciones de segundo grado, solamente que hemos de añadir tantos factores como raíces del polinomio encontremos.

La idea vuelve a consistir en el estudio del signo de los intervalos en los que se divide la recta real y cuyos extremos son las raíces del polinomio. El producto de los signos nos dará la clave para conocer si se satisface o no la desigualdad.

Resolver la inecuación $-2x^3+4x^2+10x-12<0$

Aplicando la regla de Ruffini, encontramos que las raíces del polinomio $-2x^3+4x^2+10x-12$ son, de menor a mayor, -2, 1, y 3 con lo que la inecuación se puede expresar así:

$$-2(x+2)(x-1)(x-3)<0$$

Las raíces determinan los siguientes intervalos de la recta real:

$$(-\infty\ ,\ -2)\ ,\ (-2\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 3)\ ,(3\ ,\ +\infty)$$

Ahora basta tomar un valor de cada intervalo y estudiar el signo de cada factor y del producto $-2(x+2)(x-1)(x-3)$:

- Si $k_1\in(-\infty\ ,\ -2)\Rightarrow -2(x+2)(x-1)(x-3)>0$
- Si $k_2\in(-2\ ,\ 1)\Rightarrow -2(x+2)(x-1)(x-3)<0$
- Si $k_3\in(1\ ,\ 3)\Rightarrow -2(x+2)(x-1)(x-3)>0$
- Si $k_4\in(3\ ,\ +\infty)\Rightarrow -2(x+2)(x-1)(x-3)<0$

Por tanto, la solución de la inecuación es $(-2\ ,\ 1)\cup(3\ ,\ +\infty)$.

Obsérvese como, en este caso, no se cierran los extremos, pues la desigualdad es estricta y, por tanto, no se incluyen las raíces, o lo que es lo mismo, las soluciones de la ecuación $p(x)=0$.

Inecuaciones racionales

La forma reducida de una ***inecuación racional*** con una incógnita ha de ajustarse a uno de los cuatro tipos siguientes:

$$\frac{p(x)}{q(x)}>0\ ;\ \frac{p(x)}{q(x)}\geq 0\ ;\ \frac{p(x)}{q(x)}<0\ ;\ \frac{p(x)}{q(x)}\leq 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, es decir, $\frac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción algebraica.

Para resolver una inecuación racional se pasan todos los términos al primer miembro y se realiza la operación con las fracciones algebraicas que aparezcan para, de este, modo, obtener la forma reducida de la inecuación.

Una vez hecho esto se factorizan los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, y se procede como en el caso de las inecuaciones de segundo grado y de grado superior a dos.

Resolver la inecuación $\frac{2}{x^2+x}\geq\frac{2}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}$

Pasamos todos los términos al primer miembro y realizamos la operación con las fracciones algebraicas.

$$\frac{2}{x^2+x}-\frac{2}{x^2-x}-\frac{3}{x^2-1}\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{x(x+1)}-\frac{2}{x(x-1)}-\frac{3}{(x+1)(x-1)}>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2(x-1)-2(x+1)-3x}{x(x+1)(x-1)}\geq 0\Rightarrow\frac{2x-2-2x-2-3x}{x(x+1)(x-1)}\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-3x-4}{x(x+1)(x-1)}\geq 0\Rightarrow\frac{-3\left(x+\frac{4}{3}\right)}{x(x+1)(x-1)}\geq 0$$

Las raíces son: $-\frac{4}{3}$, 0, -1, 1. Los intervalos en que queda dividida la recta real son, en este caso:

$$\left(-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right),\left(-\frac{4}{3}\ ,\ -1\right),(-1\ ,\ 0),(0\ ,\ 1),(1\ ,\ +\infty)$$

Estudiando, como en el caso anterior, los signos para un valor de cada intervalo, es muy fácil concluir que la solución es:

$$\left[-\frac{4}{3}\ ,\ -1\right)\cup(0\ ,\ 1)$$

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Un ***sistema de inecuaciones con una incógnita*** está formado por dos o más inecuaciones, ya sean de primer grado, de segundo grado, de grado mayor que dos o incluso racionales.

El procedimiento para resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita consiste en calcular las soluciones de cada inecuación por separado y representarlas en la recta real. La solución del sistema es la solución común a todas ellas.

Resolver el sistema de inecuaciones siguiente: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{3}>x+\dfrac{3x-x^2}{3} \\ \dfrac{2x+9}{x+2}<3 \end{cases}$

Resolvamos la primera inecuación: $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{3}>x+\dfrac{3x-x^2}{3} \Rightarrow 3x-3-2>6x+6x-2x^2 \Rightarrow 2x^2-9x-5>0$. Las raíces de $2x^2-9x-5$ son $-\dfrac{1}{2}$ y 5. Por tanto la inecuación se puede escribir así: $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-5)>0$.

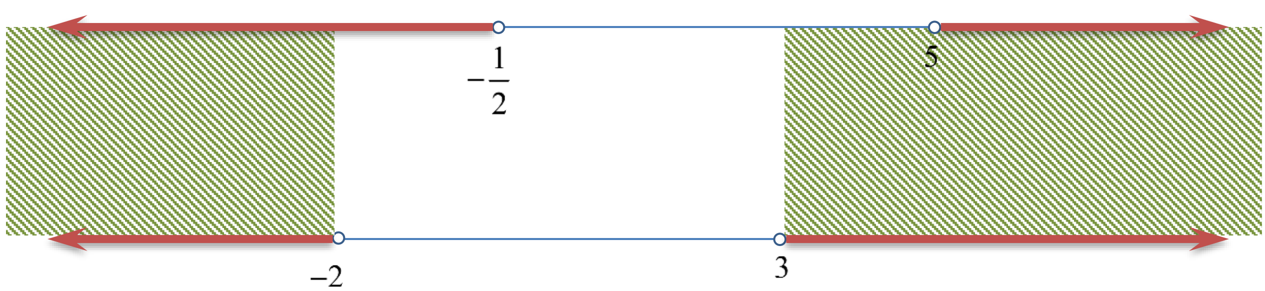
Como las raíces determinan los intervalos de la recta real $\left(-\infty\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 5\right)$, $(5\ ,\ +\infty)$, estudiamos el signo de la expresión $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-5)$ en cada uno de ellos. Obsérvese el siguiente gráfico:

En el gráfico se detalla el signo que toma la expresión anterior en cada intervalo. El signo $+$ quiere decir que la expresión es mayor que cero y el signo $-$ quiere decir que la expresión es menor que cero Los "circulitos huecos" indican que los correspondientes valores no son soluciones (en este caso no los son porque la desigualdad es estricta, no incluye el igual). Se ha indicado con un trazo más grueso la solución de la inecuación, que en este caso es $\left(-\infty\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup(5\ ,\ +\infty)$.

Resolvamos ahora la segunda inecuación: $\dfrac{2x+9}{x+2}<3 \Rightarrow \dfrac{2x+9}{x+2}-3<0 \Rightarrow \dfrac{2x+9-3x-6}{x+2}<0 \Rightarrow \dfrac{-x+3}{x+2}<0$. Tanto el numerador como el denominador son polinomios de grado uno y por tanto no hay que proceder a realizar ninguna factorización: claramente las raíces del numerador y del denominador son, respectivamente, 3 y -2. Procedemos ahora a realizar un gráfico similar al realizado anteriormente:

En este caso la solución es $(-\infty\ ,\ -2)\cup(3\ ,\ +\infty)$.

Para conocer la solución del sistema "superponemos" ambas soluciones gráficas y nos quedamos con la parte común, que en la siguiente figura se ha sombreado.



De aquí se deduce que la solución del sistema es $\left(-\infty\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup(5\ ,\ +\infty)$.

Ecuaciones exponenciales

En una ***ecuación exponencial*** la incógnita se encuentra en el exponente. No hay un procedimiento concreto para resolverlas, pero sí que es importante conocer y aplicar las propiedades de las potencias, de las raíces y, en su caso, de los logaritmos.

Normalmente nos podemos encontrar con cuatro casos.

- Conseguir que los dos miembros de la ecuación tengan la misma base.
- Aplicar un cambio de variable.
- Extraer factor común.
- Aplicar logaritmos.

Veamos algunos ejemplos que aclaren cada uno de los casos que se puedan presentar.

Resolver la ecuación $2^x \cdot 4^{2x-1} = 16$

En este caso expresar todos los factores en base 2. Luego aplicamos las propiedades de las potencias para simplificar:

$$2^x \cdot \left(2^2\right)^{2x-1} = 2^4 \Rightarrow 2^x \cdot 2^{4x-2} = 2^4 \Rightarrow 2^{5x-2} = 2^4$$

Ahora usamos que si $a^m = a^n \Rightarrow m = n$:

$$5x - 2 = 4 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

Resolver la ecuación $\dfrac{2^x\sqrt{4^x}}{8^{x+1}} = \sqrt{\dfrac{16^{x-1}}{2^{1-x}}}$

Esta ecuación es más complicada, pero se procede como en el ejemplo anterior, utilizando las propiedades de las potencias:

$$\frac{2^x\sqrt{2^{2x}}}{2^{3x+3}} = \sqrt{\frac{2^{4x-4}}{2^{1-x}}} \Rightarrow \frac{2^x \cdot \left(2^{2x}\right)^{1/2}}{2^{3x+3}} = \left(\frac{2^{4x-4}}{2^{1-x}}\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^x \cdot 2^x}{2^{3x+3}} = \left(2^{5x-5}\right)^{1/2} \Rightarrow 2^{-x-3} = 2^{\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 3 = \frac{5}{2}x - \frac{5}{x} \Rightarrow -2x - 6 = 5x - 5 \Rightarrow -7x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{7}$$

Resolver la ecuación $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

En este caso no podemos recurrir al método empleado anteriormente. Proponemos pues un cambio de variable. Para ello llamaremos $3^x = t$, con lo que $9^x = \left(3^2\right)^x = \left(3^x\right)^2 \Rightarrow 9^x = t^2$. Aplicando el cambio tenemos:

$$t^2 - 10t + 9 = 16 \Rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos dos soluciones para t: $t_1 = 1$, $t_2 = 9$. Deshaciendo el cambio obtenemos las soluciones para x:

$$t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 = 3^0 \Rightarrow x = 1 \quad ; \quad t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

Resolver la ecuación $3 \cdot 2^{x+1} - 2^x = 10$

En este caso vamos a extraer factor común (aunque con un cambio de variable también se podría resolver):

$$3 \cdot 2^{x+1} - 2^x = 10 \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 2^x - 2^x = 10 \Rightarrow 6 \cdot 2^x - 2^x = 10 \Rightarrow (6-1) \cdot 2^x = 10 \Rightarrow 5 \cdot 2^x = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Como último ejemplo resolveremos la ecuación exponencial $5^{2x-1} - 3^{x+1} = 0$

Ahora no podemos aplicar ninguno de los métodos anteriores. Aplicamos logaritmos teniendo en cuenta sus propiedades.

$$5^{2x-1} - 3^{x+1} = 0 \Rightarrow 5^{2x-1} = 3^{x+1} \Rightarrow \log 5^{2x-1} = \log 3^{x+1} \Rightarrow (2x-1)\log 5 = (x+1)\log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \log 5 - \log 5 = x \cdot \log 3 + \log 3 \Rightarrow 2x\log 5 - x \cdot \log 3 = \log 5 + \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (2\log 5 - \log 3) = \log 5 + \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 5 + \log 3}{2\log 5 - \log 3} \cong 1,277$$

Ecuaciones logarítmicas

En una ***ecuación logarítmica*** la incógnita está afectada por un logaritmo. Al igual que ocurría con las ecuaciones exponenciales, no hay un procedimiento concreto para resolver una ecuación logarítmica, pero debemos conocer y aplicar con criterio las propiedades de los logaritmos.

En general la estrategia para resolver ecuaciones logarítmicas consiste en transformar la ecuación hasta que los dos miembros de la igualdad estén expresados mediante el mismo logaritmo y luego aplicar que si $\log_a m = \log_a n$, entonces $m = n$. Para ello se aplican las propiedades de los logaritmos y, si algún término es un número se expresa mediante un logaritmo utilizando que $k = \log_a a^k$.

Finalmente, una vez resuelta, **se deberá comprobar** que la solución no provoque la existencia de un logaritmo de un número negativo o de 0.

Resolver la ecuación $2\log x + 1 = \log 4 + \log 5x$

En primer lugar, transformamos los números en logaritmos:

$$2\log x + \log 10 = \log 4 + \log 5x$$

Ahora usamos las propiedades de los logaritmos:

$$\log x^2 + \log 10 = \log 4 + \log 5x \Rightarrow \log 10x^2 = \log 20x$$

Ya tenemos los dos términos igualados a un mismo logaritmo, por tanto:

$$10x^2 = 20x \Rightarrow 10x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 10x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ahora comprobamos las soluciones sustituyéndolas en la ecuación original. Recuérdese que un logaritmo, o bien de 0, o bien de un número negativo no existe.

$$x = 0 \Rightarrow 2\log 0 + 1 = \log 4 + \log 0$$

$$x = 2 \Rightarrow 2\log 2 + 1 = \log 4 + \log 10$$

Esto indica que solamente $x = 2$ es solución (con la calculadora se puede comprobar que primer y segundo miembro son iguales).

Resolver la ecuación $(x^2 - 5x + 9)\log 2 + \log 125 = 3$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$(x^2 - 5x + 9)\log 2 + \log 125 = 3 \Rightarrow \log 2^{x^2-5x+9} + \log 125 = \log 10^3 \Rightarrow \log\left(2^{x^2-5x+9} \cdot 125\right) = \log 1000$$

Ya tenemos los dos términos igualados a un mismo logaritmo, entonces:

$$2^{x^2-5x+9} \cdot 125 = 1000 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9} = 8 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9} = 2^3 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que las soluciones son $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Ambas son también soluciones de la ecuación logarítmica inicial pues, evidentemente, al no se obtiene ningún logaritmo de cero o de un número negativo.

Resolver la ecuación logarítmica $\log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$

Aplicando de nuevo las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$\log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = 1 - \log 5 \Rightarrow \log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = \log 10 - \log 5 \Rightarrow \log\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}} = \log\frac{10}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}} = \frac{10}{5} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}}\right)^2 = \left(\frac{10}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{3x+1}{2x-3} = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 8x - 12 \Rightarrow -5x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

Esta solución es solución de la ecuación logarítmica inicial pues, sustituyendo en la misma, se obtiene:

$$\log\sqrt{\frac{39}{5}+1} - \log\sqrt{\frac{26}{5}-1} = 1 - \log 5 \Rightarrow \log\sqrt{\frac{44}{5}} - \log\sqrt{\frac{21}{5}} = 1 - \log 5$$

Expresión esta última que tiene sentido pues se trata de realizar logaritmos de números positivos.

Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Son sistemas con dos incógnitas formados por ecuaciones exponenciales o logarítmicas o ambas.

Para resolver este tipo de sistemas se utilizan los conocimientos anteriores de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, con el objetivo de reducirlos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, habitualmente no lineal. Normalmente el método que se aplica es el de sustitución.

Veamos un par de ejemplos.

Resuelve el sistema $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2\log x = \log\left(y^2+21\right) \end{cases}$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para obtener ecuaciones no logarítmicas en el sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2\log x = \log\left(y^2+21\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + \log y = \log 10 \\ \log x^2 = \log\left(y^2+21\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log xy = \log 10 \\ \log x^2 = \log\left(y^2+21\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x^2 = y^2+21 \end{cases}$$

Observa que ya hemos reducido el sistema original a un sistema no lineal con dos incógnitas. Despejamos, por ejemplo, de la primera ecuación, la incógnita y: $y = \dfrac{10}{x}$, y la sustituimos en la segunda ecuación.

$$x^2 = \left(\frac{10}{x}\right)^2 + 21 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{x^2} + 21 \Rightarrow x^4 = 100 + 21x^2 \Rightarrow x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

Esta última es una ecuación bicuadrada. Efectuando el cambio de variable $x^2 = z$, resulta la ecuación de segundo grado: $z^2 - 21z - 100 = 0$, cuyas soluciones son $z_1 = 25$, $z_2 = -4$. La segunda de las soluciones no proporciona soluciones para x. Si $z = 25$, entonces tenemos dos soluciones para x: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$. Hemos de descartar la última de ellas pues da lugar a logaritmos negativos, que no tienen sentido.

Finalmente, si $x = 5$, obtenemos $y = \dfrac{10}{5} \Rightarrow y = 2$, que es la solución del sistema planteado inicialmente.

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2\cdot 2^x + 3^y = 7 \\ 2^x + 2\cdot 3^y = 8 \end{cases}$

En este caso se trata de un sistema de ecuaciones exponenciales. Si aplicamos los cambios $2^x = a$ y $2^y = b$ nos queda en este caso un sistema lineal:

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + 2b = 8 \end{cases}$$

De la segunda ecuación

$$a = 8 - 2b$$

Sustituyendo en la primera:

$$2\left(8-2b\right) + b = 7 \Rightarrow 16 - 4b + b = 7 \Rightarrow -3b = -9 \Rightarrow b = 3$$

Por tanto:

$$a = 8 - 2\cdot 3 = 8 - 6 \Rightarrow a = 2$$

Ahora deshacemos los cambios de variable realizados al principio:

$$2^x = a \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$3^y = b \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1$$