SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

<u>EJERCICIO 12</u> : Obtén, mediante el método de Gauss, la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+5y+z=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y-2z=-6 \\ 2x-y+3z=-8 \\ x+y-z=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x-y+z=-4 \\ 3x+y-2z=6 \\ 2x+y+z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y-2z=6 \\ x-3y+z=-7 \\ 2x-y+z=-3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-2y+3z=1 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=7 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x+y-3z=-5 \\ 2x-y+2z=9 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+y+2z=6 \\ x-3y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

Solución:

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=7 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+5y+z=-2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a-1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=7 \\ 5x=15 \\ -2x+3y=-9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=\dfrac{-9+2x}{3}=-1 \\ z=7-3x-2y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x+y-2z=6 \\ 2x-y+3z=-8 \\ x+y-z=4 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a-1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y-2z=6 \\ 5x+z=-2 \\ -2x+z=-2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y-2z=6 \\ 5x+z=-2 \\ -7x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ z=-2-5x=-2 \\ y=6-3x+2z=2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \\ z=-2 \end{array}}$$

c) $$\left.\begin{array}{r} -2x-y+z=-4 \\ 3x+y-2z=6 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a+1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+-y+z=-4 \\ x-z=2 \\ 2z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z=1 \\ x=2+z=3 \\ y=-2x+z+4=-1 \end{array}\right\} \textit{Solución: } x=3\ ,\ y=-1\ ,\ z=1$$

d) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=2 \\ x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=1 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=3 \\ 2x-y+2z=2 \\ 2x-y+3z=1 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ -5y+4z=-4 \\ -5y+5z=-5 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-3^a \\ 3^a:(-5) \end{array}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=3 \\ -z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} z=-1 \\ y=1+z=0 \\ x=3-2y+z=2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{array}}$$

e) $$\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=6 \\ x-3y+z=-7 \\ 2x-y+z=-3 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-2z=6 \\ -5y+3z=-13 \\ -5y+5z=-15 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-3^a \\ 3^a:(-5) \end{array}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-2z=6 \\ -2z=2 \\ y-z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} z=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ y=3+z=3-1=2 \\ x=6-2y+2z=6-4-2=0 \end{array}\right\} \textit{Solución: } x=0\ ,\ y=2\ ,\ z=-1$$

$$\text{f) }\left.\begin{array}{r} x+y-z=2\\ 2x-2y+3z=1\\ x+2y-z=4\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 1^a\\3^a-1^a\end{array}} \to \left.\begin{array}{r}x+y-z=2\\-4y+5z=-3\\y=2\end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y=2\\ z=\dfrac{-3+4y}{5}=\dfrac{-3+8}{5}=1\\ x=2-y+z=2-2+1=1\end{array}$$

Solución: $x=1\ ,\ y=2\ ,\ z=1$

$$\text{g) }\left.\begin{array}{r} x-2y+z=6\\ 3x+y-z=7\\ x-y+2z=6\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-3\cdot 1^a\\3^a-1^a\end{array}} \to \left.\begin{array}{r}x-2y+z=6\\7y-4z=-11\\y+z=0\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-7\cdot 3^a\\3^a\end{array}} \to$$

$$\text{h) }\left.\begin{array}{r} x-y+2z=7\\ x+y-3z=-5\\ 2x-y+2z=9\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-1^a\\3^a-2\cdot 1^a\end{array}} \to \left.\begin{array}{r}x-y+2z=7\\2y-5z=-12\\y-2z=-5\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 3^a\\3^a\end{array}} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x-y+2z=7\\ -z=-2\\ y-2z=-5\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} z=2\\ y=-5+2z=-5+4=-1\\ x=7+y-2z=7-1-4=2\end{array}\right\}\ \textit{Solución}:\ x=2\ ,\ y=-1\ ,\ z=2$$

$$\text{i) }\left.\begin{array}{r} x+y+2z=6\\ x-3y-z=1\\ x-y-z=-1\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-1^a\\3^a-1^a\end{array}} \to \left.\begin{array}{r}x+y+2z=6\\-4y-3z=-5\\-2y-3z=-7\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 3^a\\3^a\end{array}} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+2z=6\\ 3z=9\\ -2y-3z=-7\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} z=\dfrac{9}{3}=3\\ y=\dfrac{-7+3z}{-2}=\dfrac{-7+9}{-2}=-1\\ x=6-y-2z=6+1-6=1\end{array}\right\}\ \textit{Solución}:\ x=1\ ,\ y=-1\ ,\ z=3$$

INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

EJERCICIO 13 : Resuelve:

a) $\dfrac{2x-1}{3}-2<x-\dfrac{x+1}{2}$ **b)** $\dfrac{x-1}{3}\geq 2+\dfrac{3-x}{6}$ **c)** $\dfrac{x-4}{2}-\dfrac{x+1}{3}\leq\dfrac{1}{6}$

d) $x^2+3x\leq 0$ **e)** $\dfrac{2(x-3)}{3}-\dfrac{x+1}{3}>x-2$ **f)** $\dfrac{x+7}{3-x}\geq 0.$

g) $2x+5\leq x^2-2x-16$ **h)** $\dfrac{x+2}{x^2}\leq 0$ **i)** $x^2+3x-6>8-2x$

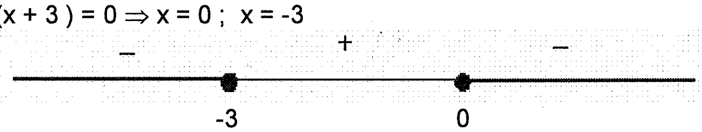
Solución:

a) $2(2x-1)-12<6x-3(x+1)\Rightarrow\ 4x-2-12<6x-3x-3\Rightarrow x<11\ \to$ intervalo $(-\infty,11)$

b) $2(x-1)\geq 12+3-x\Rightarrow 2x-2\ \geq 12+3-x\Rightarrow 3x\geq 17\Rightarrow x\geq\dfrac{17}{3}\ \to$ Intervalo $\left[\dfrac{17}{3},+\infty\right)$

c) $3(x-4)-2(x+1)\leq 1\Rightarrow\ 3x-12-2x-2\leq 1\Rightarrow x\leq 15\ \to$ Intervalo $(-\infty,15]$.

d) $x^2+3x=0\Rightarrow x(x+3)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-3$



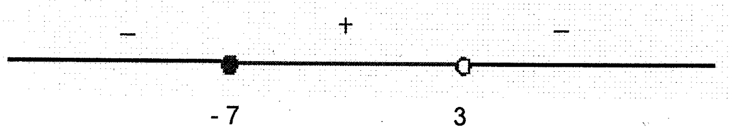
Solución: $x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

e) $2(x-3)-(x+1)>3(x-2) \Rightarrow 2x-6-x-1>3x-6 \Rightarrow -1>2x \Rightarrow x<\frac{-1}{2} \rightarrow$ Intervalo $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$

f) Igualamos por separado numerador y denominador a cero

$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$ (pintado)

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ (sin pintar)

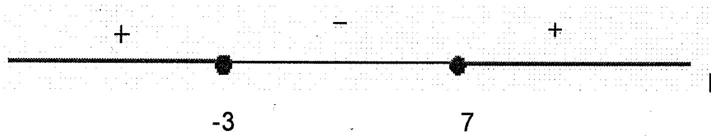


Solución: $x \in [-7, 3)$.

g) Reducimos a una ecuación de segundo grado y calculamos sus soluciones:

$0 \le x^2 - 2x - 16 - 2x - 5 \rightarrow x^2 - 4x - 21 \ge 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$

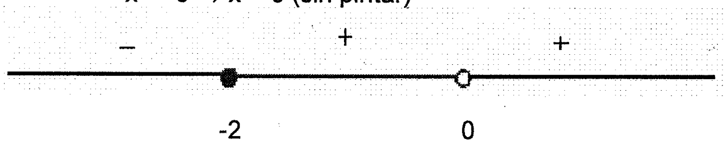


La solución es $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

h) Se igualan, por separado, numerador y denominador a cero:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ (pintado)

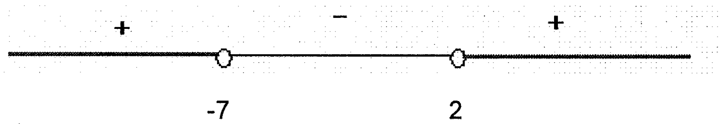
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (sin pintar)



Por tanto, la solución es $(-\infty, -2]$.

i) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x \rightarrow x^2 + 5x - 14 > 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$



Solución: $x \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$

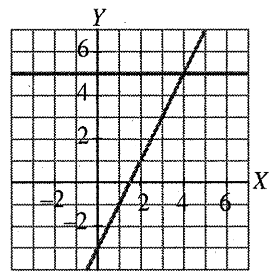
EJERCICIO 14 : Resuelve e interpreta gráficamente:

a) $2x - 3 < 5$ b) $x^2 - 4 \le 0$ c) $-3x + 1 > -5$ d) $x^2 + x - 6 \le 0$ e) $-2x + 4 \le -2$ f) $2x + 1 > -5$

Solución:

a)

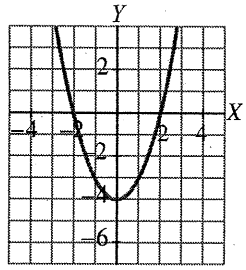
- Resolvemos la inecuación: $2x - 3 < 5 \rightarrow 2x < 8 \rightarrow x < 4 \Rightarrow$ Soluciones: $\{x / x < 4\} = (-\infty, 4)$
- La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x menores que 4, la recta $y = 2x - 3$ queda por debajo de la recta $y = 5$; es decir, $2x - 3 < 5$:



b) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

La parábola $y = x^2 - 4$ corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$.

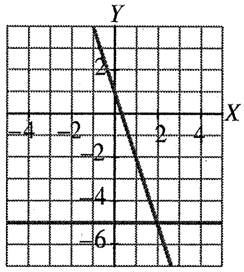
En el intervalo $[-2, 2]$ toma valores negativos o nulos. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$:



c)

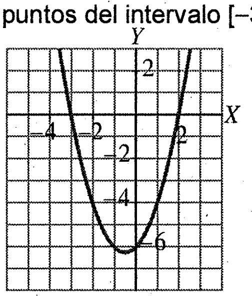
- Resolvemos la inecuación: $-3x+1>-5 \;\rightarrow\; -3x>-6 \;\rightarrow\; 3x<6 \;\rightarrow\; x<2$

  Soluciones: $\{x\,/\,x<2\}=(-\infty,\ 2)$
- La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x menores que 2, la recta $y=-3x+1$, va por encima de la recta $y=-5$; es decir, $-3x+1>-5$:



d) $x^2+x-6=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$

La parábola $y=x^2+x-6$ corta al eje X en -3 y en 2.
En el intervalo $[-3, 2]$, toma valores negativos o nulos.
Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-3, 2]$.

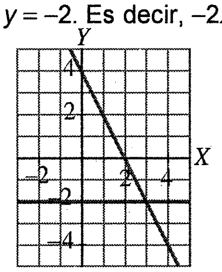


e)

- Resolvemos la inecuación: $-2x+4\le -2 \;\rightarrow\; -2x\le -6 \;\rightarrow 2x\ge 6 \;\rightarrow\; x\ge 3$

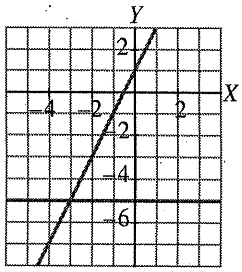
  Soluciones: $\{\,x\,/\,x\ge 3\,\}=[3,+\infty)$

  La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x mayores o iguales que 3, la recta $y=-2x+4$ va por debajo (coincide) con la recta $y=-2$. Es decir, $-2x+4\le -2$



f)

- Resolvemos la inecuación: $2x+1>-5 \;\rightarrow\; 2x>-6 \;\rightarrow\; x>-3 \Rightarrow$ Soluciones: $\{x\,/\,x>-3\}=(-3,+\infty)$
- Interpretación gráfica: para valores de x mayores que -3, la recta $y=2x+1$ va por encima de la recta $y=-5$. Es decir, $2x+1>-5$.



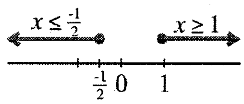
SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

EJERCICIO 15 : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} 4(x+1)-2\le 0 \\ 2x+4\ge 6 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} 3x-2<4 \\ 2x+6>x-1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l} 1-(2x-1)<0 \\ 3(x+1)-9\le 0 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l} 3(x-2)+7\le 4 \\ 2(x-1)<4 \end{array}\right\}$

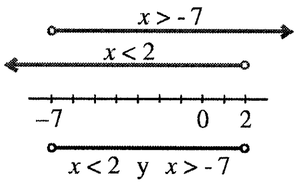
Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} 4(x+1)-2\le 0 \\ 2x+4\ge 6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4x+4-2\le 0 \\ 2x+4\ge 6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4x\le -2 \\ 2x\ge 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x\le \frac{-2}{4} \\ x\ge 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x\le \frac{-1}{2} \\ x\ge 1 \end{array}$



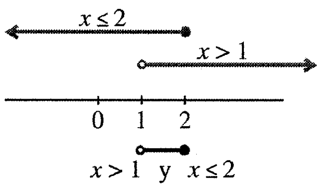
Como no hay ninguna solución común a las dos inecuaciones, el sistema no tiene solución.

b) $\left.\begin{array}{l} 3x-2<4 \\ 2x+6>x-1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x<6 \\ x>-7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x<2 \\ x>-7 \end{array}$



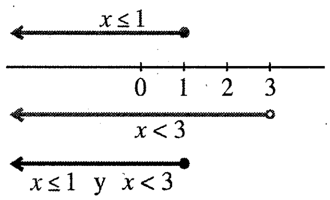
Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:
$\{x<2 \text{ y } x>-7\}=\{x/-7<x<2\}=(-7,2)$

c) $\left.\begin{array}{l} 1-(2x-1)<0 \\ 3(x+1)-9\le 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 1-2x+1<0 \\ 3x+3-9\le 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} -2x<-2 \\ 3x\le 6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x>1 \\ x\le 2 \end{array}$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:
$\{x>1 \text{ y } x\le 2\}=\{x/1<x\le 2\}=(1,2]$

d) $\left.\begin{array}{l} 3(x-2)+7\le 4 \\ 2(x-1)<4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x-6+7\le 4 \\ 2x-2<4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x\le 3 \\ 2x<6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x\le 1 \\ x<3 \end{array}$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:
$\{x\le 1 \text{ y } x<3\}=\{x/x\le 1\}=(-\infty,1]$

INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

EJERCICIO 16 : Resuelve gráficamente:

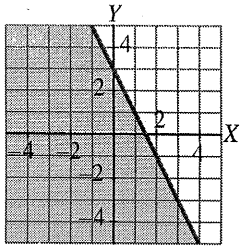
a) $2x+y\le 3$ **b)** $3x+2y\le 1$ **c)** $\left.\begin{array}{l} 3x+y\ge 2 \\ x\le 2 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l} x+y\le 1 \\ x-y\le 3 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} -x+y\ge -2 \\ y\le 4 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $2x+y\le 3$ es lo mismo que $2x+y-3\le 0$.

Representamos la recta $2x+y-3=0$ $(y=-2x+3)$ y vemos que divide el plano en dos mitades.

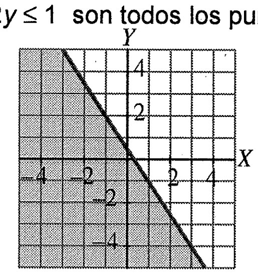
Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo (0, 0). En él, $2\cdot 0+0\le 3$, se cumple la desigualdad. Por tanto, las soluciones de la inecuación $2x+y-3\le 0$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:



b) $3x + 2y \leq 1$ es los mismo que $3x + 2y - 1 \leq 0$.

Representamos la recta $3x + 2y - 1 = 0$ $\left(y = \dfrac{-3x+1}{2}\right)$ y vemos que divide el plano en dos mitades.

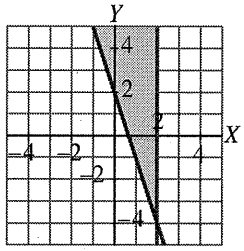
Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo, (0, 0). Vemos que cumple la desigualdad:$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 1$
Por tanto, las soluciones de la inecuación $3x + 2y \leq 1$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:



c) $3x + y \geq 2$ es lo mismo que $3x + y - 2 \geq 0$.

Representamos las rectas $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 & (y = -3x + 2) \\ x = 2 \end{cases}$

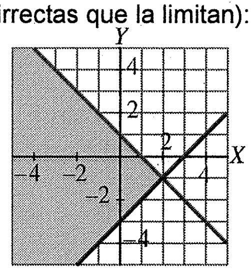
Sustituyendo (2, 1) en la desigualdad $3x + y \geq 2$, vemos que la cumple: $3 \cdot 2 + 1 \geq 2$.
Además, $x \leq 2$ corresponde a los puntos que se sitúan a la izquierda de la recta $x = 2$ (o sobre ella).
Tomando las soluciones comunes a las dos desigualdades, llegamos al recinto solución del sistema (la parte coloreada y las semirrectas que lo limitan):



d)
$x + y \leq 1$ es los mismo que $x + y - 1 \leq 0$
$x - y \leq 3$ es lo mismo que $x - y - 3 \leq 0$

Representamos las dos rectas: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 & (y = -x + 1) \\ x - y - 3 = 0 & (y = x - 3) \end{cases}$

Sustituyendo el punto (0, 0) en las desigualdades, vemos que se cumplen. Y si tenemos en cuenta que las soluciones del sistema son la soluciones comunes a ambas inecuaciones, obtenemos que las soluciones del sistemas son los puntos de la zona coloreada (incluyendo las semirrectas que la limitan):



e) $-x + y \geq -2$ es lo mismo que $-x + y + 2 \geq 0$.

Representamos las rectas: $\begin{cases} -x + y + 2 = 0 & (y = x - 2) \\ y = 4 \end{cases}$

Si sustituimos el punto (0, 0) en las dos desigualdades, vemos que se cumplen: $\begin{cases} 0 + 0 \geq -2 \\ 0 \leq 4 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones del sistema corresponden al recinto coloreado (incluyendo las dos semirrectas que lo limitan):