PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a) **(0.7 puntos)** Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa

b) **(1 punto)** Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) **(0.8 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x-4y \le -19 \qquad 3x-4y \le -13 \qquad x \ge -7 \qquad -x-y \ge 2$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) **(0.5 puntos)** Responda de forma razonada si la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & si \;\; x<0 \\ x^2-2x & si \;\; x \ge 0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) **(0.7 puntos)** Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

EJERCICIO 4

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} -t^2+2t-0.3 & si \;\; 0.2\le t\le 1.8 \\ 0.1t-0.12 & si \;\; 1.8<t\le 5 \\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si \;\; 5<t\le 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.

b) **(1 punto)** ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una población, se sabe que el l5% de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos) mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4% de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

EJERCICIO 6

En una comunidad de vecinos, el 90% de sus miembros tiene vehículo propio, el 40% hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público" Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 99.5%, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de 1a UE, con un error inferior al 5%.

EJERCICIO 8

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

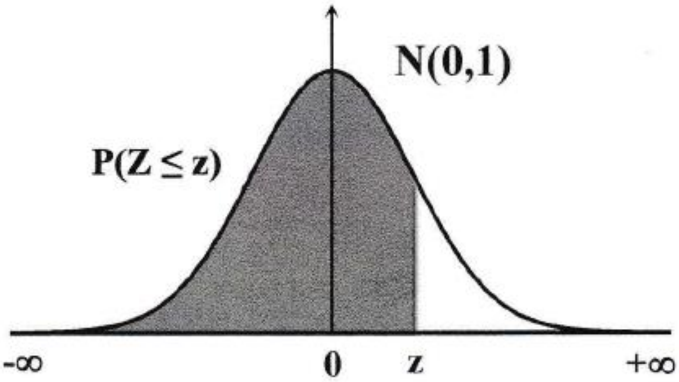
b) **(1 punto)** Para estimar la media poblacional de la variable X. se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

11.8 10 9.8 12 9.7 10.8 9.6 11.3 10.4 12.2 9.1 10.5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&a\end{pmatrix}$.

a) **(0.7 puntos)** Determine para qué valores del parámetro *a*, la matriz A tiene inversa

b) **(1 punto)** Para *a = 1*, calcule la inversa de A.

c) **(0.8 puntos)** Para *a = 1*, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=B^t$, siendo $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}$

a) Vemos cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&a\end{vmatrix}=-a-8$$

$$|A|=0\Rightarrow -a-8=0\Rightarrow a=-8$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *a* distinto de –8.

b) Si *a = 1* la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=-1-8=-9\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}}{-9}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&2\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&2&-4\\2&-4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/9&1/9&-2/9\\1/9&-2/9&4/9\\-2/9&4/9&1/9\end{pmatrix}}$$

c) Si *a = 1* la inversa de A es $A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&2&-4\\2&-4&-1\end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B^t\Rightarrow X=A^{-1}B^t$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 2+4 \\ -4+1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x-4y\le -19 \qquad 3x-4y\le -13 \qquad x\ge -7 \qquad -x-y\ge 2$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) **(0.5 puntos)** Responda de forma razonada si la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$5x-4y=-19$

x	$y=\frac{5x+19}{4}$
-3	1
1	6

$3x-4y=-13$

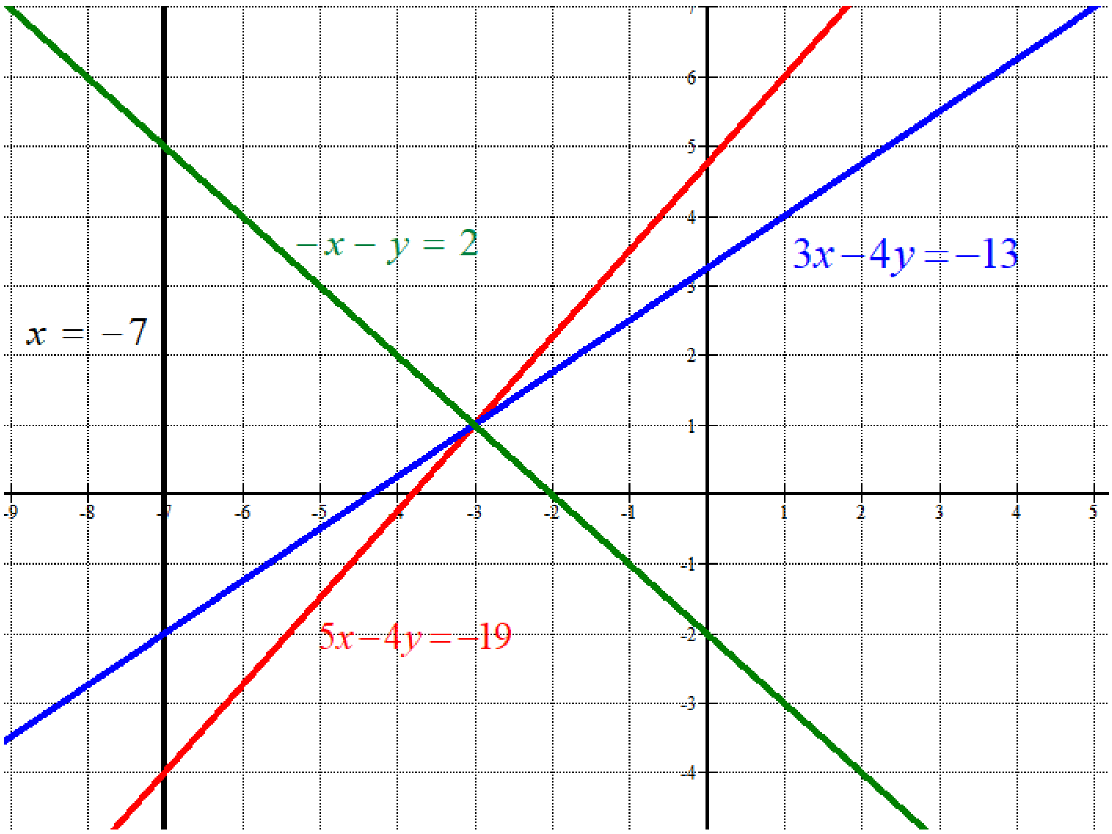
x	$y=\frac{3x+13}{4}$
-3	1
-7	-2

$x=-7$

$x=-7$	y
-7	-2
-7	5

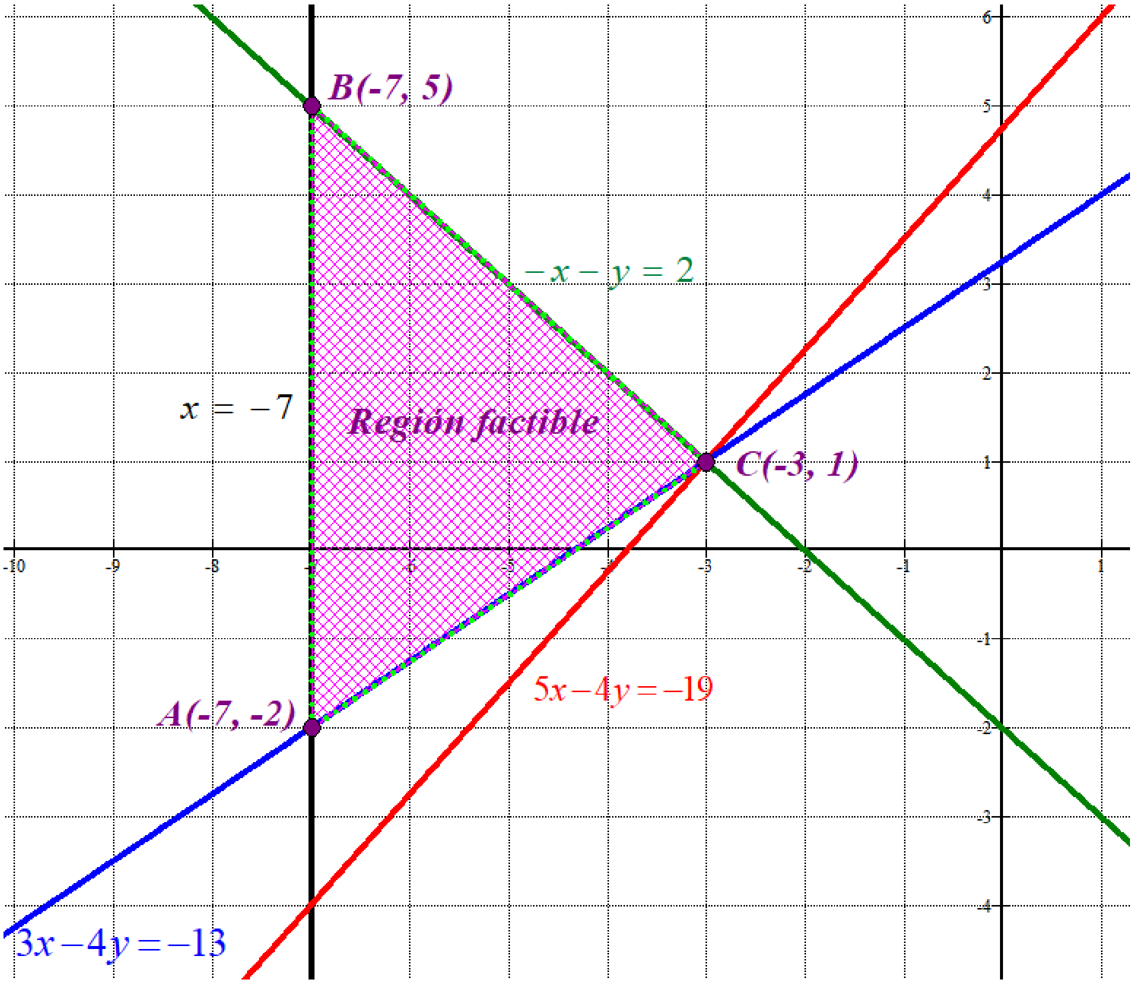
$-x-y=2$

x	$y=-x-2$
-3	1
-7	5



Como las restricciones son: $\begin{array}{ll} 5x-4y\le -19 \to 5x+19\le 4y & \to \textit{Por encima} \\ 3x-4y\le -13 \to 3x+13\le 4y & \to \textit{Por encima} \\ x\ge -7 & \to \textit{Por la derecha} \\ -x\ge 2+y & \to \textit{Por debajo} \end{array}$ la región factible es la región situada a la derecha de la recta vertical negra, por encima de las rectas azul y roja y por debajo de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices de dicha región.



Los vértices son A(–7, –2), B(–7, 5) y C(–3, 1).

b) Valoramos la función $G(x,y)=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{5}{2}y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(–7, –2) → $G(-7,-2)=\dfrac{7}{5}-\dfrac{10}{2}=-3.6$

B(–7, 5) → $G(-7,5)=\dfrac{7}{5}+\dfrac{25}{2}=13.9$

C(–3, 1) → $G(-3,1)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{2}=3.1$

El máximo valor de $G(x,y)$ es 13.9 y se alcanza en el vértice B(-7, 5).
El mínimo valor de $G(x,y)$ es –3.6 y se alcanza en el vértice A(–7, –2).

c) Tenemos que $\dfrac{47}{3}\simeq 15.66$ es mayor que el valor máximo (13.9) que puede alcanzar la función $G(x,y)$ en la región factible. Por lo que no es posible que se alcance ese valor.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & si \quad x<0 \\ x^2-2x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.
b) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía de la función *f* y calcule el mínimo.
c) **(0.7 puntos)** Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

a) En $(-\infty,0)$ la función es una exponencial que es continua y derivable, en $(0,+\infty)$ la función es una parábola que también es continua y derivable.

Falta ver la continuidad y derivabilidad de la función en *x = 0*.

¿*f(x)* es continua en *x =0*?

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2-2\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{x+1}=2^1=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\neq 2=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

La función no es continua en *x = 0,* por lo que tampoco es derivable en *x = 0.*

La función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) En $(-\infty,0)$ la función es $f(x)=2^{x+1}$ con derivada $f\,'(x)=2^{x+1}\ln 2$ que nunca se anula y siempre toma valor positivo $f\,'(-1)=2^0\ln 2=\ln 2=0.69>0$, por lo que la función siempre es creciente en $(-\infty,0)$.
En $(0,+\infty)$ la función es $f(x)=x^2-2x$. Derivamos y estudiamos el signo de la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=2x-2 \\ f\,'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

- En $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f\,'(0.5)=1-2=-1<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f\,'(2)=4-2=2>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(0,1)$.
La función tiene un mínimo relativo en *x = 1,* el vértice de la parábola. Como $f(1)=1^2-2=-1$ el mínimo tiene coordenadas (1, –1)

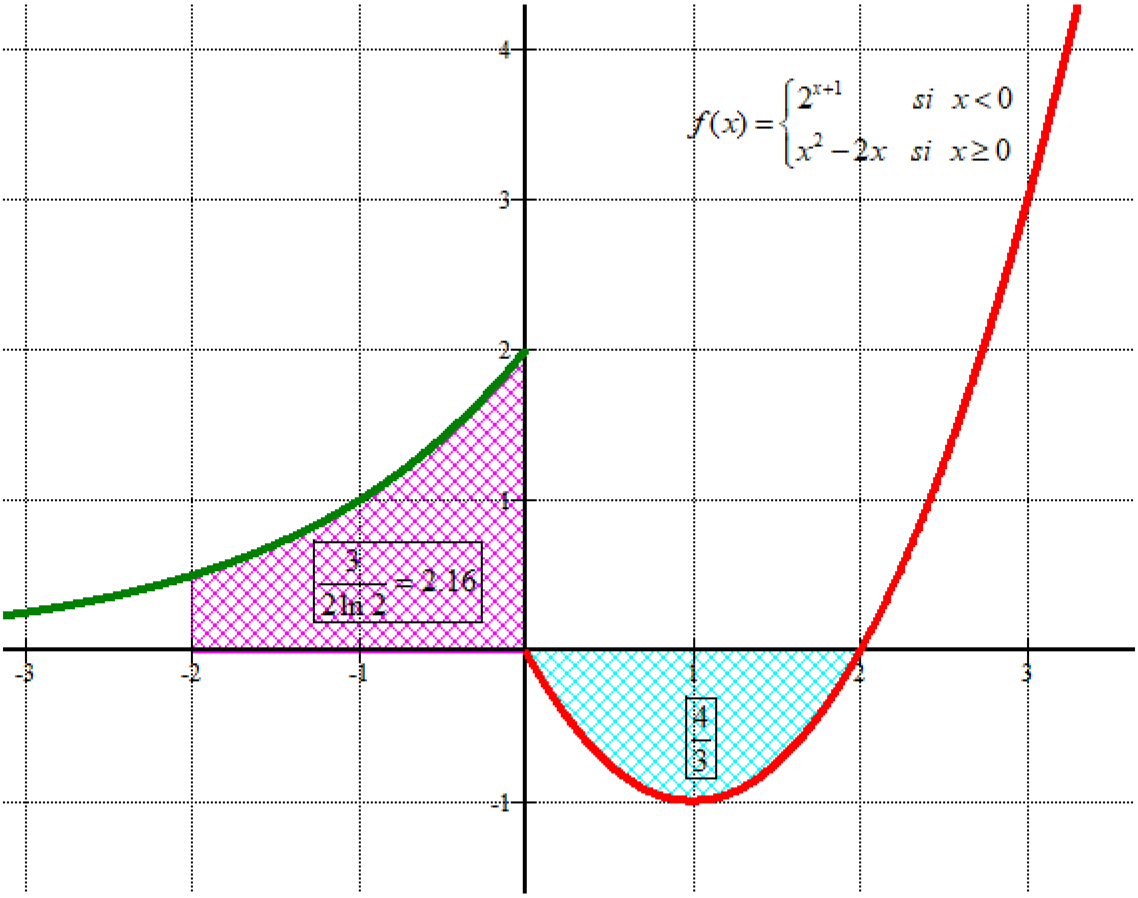
c) La integral definida debemos separarla en dos: una entre –2 y 0 y otra entre 0 y 2.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}dx + \int_{0}^{2} x^2 - 2xdx =$$

$$= \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[\frac{2^{0+1}}{\ln 2}\right] - \left[\frac{2^{-2+1}}{\ln 2}\right] + \left[\frac{2^3}{3} - 2^2\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{8}{3} - 4 = \boxed{\frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3} \simeq 0.8307}$$

Aunque no lo pide hacemos el dibujo de la región y comprobamos los valores obtenidos.



EJERCICIO 4

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} -t^2+2t-0.3 & si\ \ 0.2\le t\le 1.8 \\ 0.1t-0.12 & si\ \ 1.8<t\le 5 \\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si\ \ 5<t\le 10 \end{cases}$$

donde *t* es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.

b) **(1 punto)** ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

a) La función son trozos de funciones polinómicas que son continuas y derivables.
Hay que comprobar la continuidad y derivabilidad en $t = 1.8$ y en $t = 5$.

¿*f(t)* es continua en $t = 1.8$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1.8)=-1.8^2+3.6-0.3=0.06 \\ \lim\limits_{t\to 1.8^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} -t^2+2t-0.3=0.06 \\ \lim\limits_{t\to 1.8^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} 0.1t-0.12=0.18-0.12=0.06 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1.8)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} f(t)=0.06$$

La función es continua en $t = 1.8$.

¿*f(t)* es continua en $t = 5$?

$$\left.\begin{array}{l} f(5)=0.1\cdot 5-0.12=0.38 \\ \lim\limits_{t\to 5^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^-} 0.1t-0.12=0.38 \\ \lim\limits_{t\to 5^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} -0.5t^2+8.3t-28.62=0.38 \end{array}\right\}\Rightarrow f(5)=\lim\limits_{t\to 5^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} f(t)=0.38$$

La función es continua en $t = 5$.

La función es continua en todo su dominio.

La derivada de la función en $[0.2,1.8)\cup(1.8,5)\cup(5,10]$ tiene la expresión:

$$f(t)=\begin{cases} -t^2+2t-0.3 & si\ \ 0.2\le t\le 1.8 \\ 0.1t-0.12 & si\ \ 1.8<t\le 5 \\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si\ \ 5<t\le 10 \end{cases} \Rightarrow f'(t)=\begin{cases} -2t+2 & si\ \ 0.2\le t<1.8 \\ 0.1 & si\ \ 1.8<t<5 \\ -t+8.3 & si\ \ 5<t\le 10 \end{cases}$$

¿*f(t)* es derivable en $t = 1.8$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(1.8^-)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} f'(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} -2t+2=-1.6 \\ f'(1.8^+)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} f'(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} 0.1=0.1 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1.8^-)=-1.6\neq 0.1=f'(1.8^+)$$

La función no es derivable en $t = 1.8$.

¿*f(t)* es derivable en *t* = *5*?

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(5^-) = \lim\limits_{t\to 5^-} f\,'(t) = \lim\limits_{t\to 5^-} 0.1 = 0.1 \\ f\,'(5^+) = \lim\limits_{t\to 5^+} f\,'(t) = \lim\limits_{t\to 5^+} -t+8.3 = 3.3 \end{array}\right\} \Rightarrow f\,'(5^-) = 0.1 \neq 3.3 = f\,'(5^+)$$

La función no es derivable en *t* = *5*.

Resumiendo: La función es continua en todo su dominio = [0.2, 10] y es derivable en $[0.2,1.8)\cup(1.8,5)\cup(5,10]$.

b) La función tiene como derivada $f\,'(t) = \begin{cases} -2t+2 & si\ \ 0.2 \le t < 1.8 \\ 0.1 & si\ \ 1.8 < t < 5 \\ -t+8.3 & si\ \ 5 < t \le 10 \end{cases}$, la igualamos a cero en busca de puntos críticos.

$$f\,'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t+2=0 \to \boxed{t=1} & si\ \ 0.2 \le t < 1.8 \\ 0.1 = 0 \quad No\ es\ posible & si\ \ 1.8 < t < 5 \\ -t+8.3 = 0 \to \boxed{t=8.3} & si\ \ 5 < t \le 10 \end{cases}$$

Como la función es continua y son dos trozos de parábolas y un trozo de recta la valoramos en los puntos críticos y en los extremos de cada intervalo y obtendremos el valor máximo de la función en [0.2, 10] y su valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(0.2) = -0.2^2 + 0.4 - 0.3 = 0.060 \\ f(1) = -1^2 + 2 - 0.3 = 0.700 \\ f(1.8) = -1.8^2 + 3.6 - 0.3 = 0.060 \\ f(5) = 0.5 - 0.12 = 0.380 \\ f(8.3) = -0.5\cdot 8.3^2 + 8.3\cdot 8.3 - 28.62 = 5.825 \\ f(10) = -0.5\cdot 10^2 + 8.3\cdot 10 - 28.62 = 4.380 \end{array}\right\}$$

El valor máximo de diagnosticados se produce al cabo de 8.3 meses y es de 5825 personas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

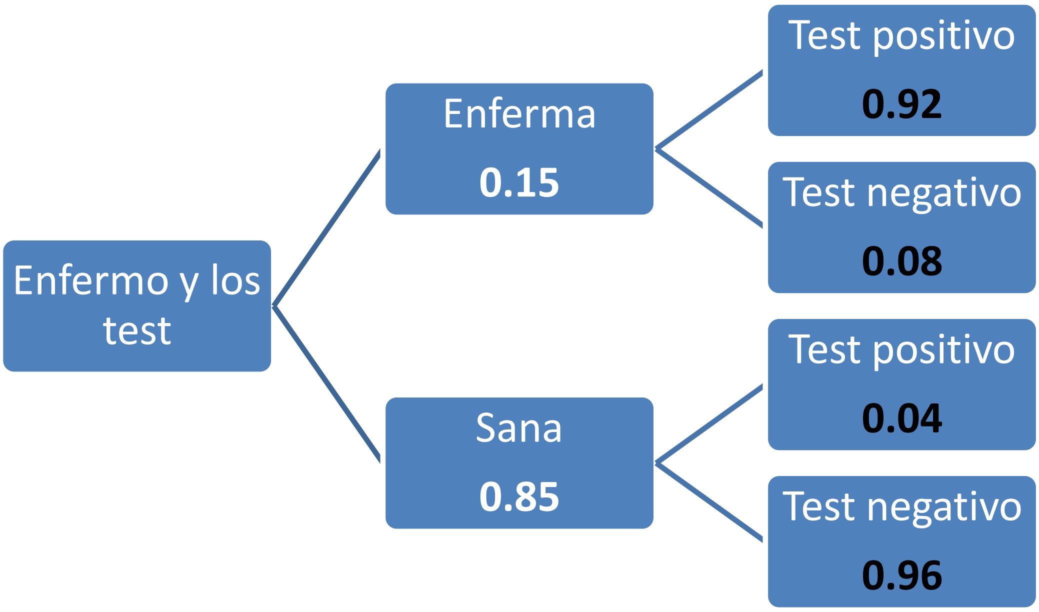
En una población, se sabe que el 15% de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos) mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4% de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

a) Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos S = Persona sana $\overline{S}$ = Persona enferma. T = Test positivo, $\overline{T}$ =Test negativo.

a) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos teorema de Bayes.

$$P\left(\overline{S}/T\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap T\right)}{P\left(T\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)P\left(T/\overline{S}\right)}{P\left(S\right)P\left(T/S\right)+P\left(\overline{S}\right)P\left(T/\overline{S}\right)}=$$

$$=\frac{0.15\cdot 0.92}{0.85\cdot 0.04+0.15\cdot 0.92}=\boxed{\frac{69}{86}\simeq 0.8023}$$

b) $P\left(\overline{S}\cap\overline{T}\right)=P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)=0.15\cdot 0.08=\boxed{\frac{3}{250}=0.012}$

c)

$$P\left(\overline{S}/\overline{T}\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)+P\left(S\right)P\left(\overline{T}/S\right)}=$$

$$=\frac{0.15\cdot 0.08}{0.15\cdot 0.08+0.85\cdot 0.96}=\boxed{\frac{1}{69}\simeq 0.0145}$$

EJERCICIO 6

En una comunidad de vecinos, el 90% de sus miembros tiene vehículo propio, el 40% hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público" Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener fácilmente las probabilidades.

	Usan el transporte público	No usan el transporte público	
Tienen vehículo propio			**90**
No tienen vehículo propio		**3**	
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Usan el transporte público	No usan el transporte público	
Tienen vehículo propio	**33**	**57**	**90**
No tienen vehículo propio	**7**	**3**	**10**
	40	**60**	**100**

Llamamos V = Tener vehículo propio y T = Usar el transporte público.

a) Mirando la tabla vemos que del 100 % de los miembros de una comunidad de vecinos hay un 90 % que tienen vehículo propio y otro 7 % que no tiene vehículo propio pero usa el transporte público.

$$P(V \cup T) = \frac{90+7}{100} = \boxed{0.97}$$

b) Mirando la tabla vemos que los que usan el transporte público y no tienen vehículo propio son el 7 %.

$$P\left(T \cap \overline{V}\right) = 7\,\% = \boxed{0.07}$$

c) Mirando la tabla vemos que hay un 10 % de personas sin vehículo propio y de esas el 7 % usan el transporte público.

$$P\left(T / \overline{V}\right) = \frac{7}{10} = \boxed{0.7}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

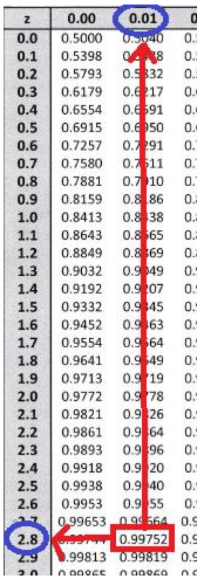
a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 99.5%, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de 1a UE, con un error inferior al 5%.

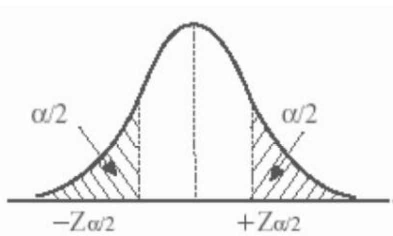
n = 250. $p = \frac{115}{250} = 0.46 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.46 = 0.54$

a) Con un nivel de confianza del 99.5 % tenemos

$1 - \propto = 0,995 \rightarrow \propto = 0,005 \rightarrow \propto/2 = 0'0025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,9975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.81}$



z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	[illegible]
0.2	0.5793	[illegible]
0.3	0.6179	[illegible]
0.4	0.6554	[illegible]
0.5	0.6915	[illegible]
0.6	0.7257	[illegible]
0.7	0.7580	[illegible]
0.8	0.7881	[illegible]
0.9	0.8159	[illegible]
1.0	0.8413	[illegible]
1.1	0.8643	[illegible]
1.2	0.8849	[illegible]
1.3	0.9032	[illegible]
1.4	0.9192	[illegible]
1.5	0.9332	[illegible]
1.6	0.9452	[illegible]
1.7	0.9554	[illegible]
1.8	0.9641	[illegible]
1.9	0.9713	[illegible]
2.0	0.9772	[illegible]
2.1	0.9821	[illegible]
2.2	0.9861	[illegible]
2.3	0.9893	[illegible]
2.4	0.9918	[illegible]
2.5	0.9938	[illegible]
2.6	0.9953	[illegible]
2.7	0.99653	[illegible]
2.8	[illegible]	0.99752
2.9	0.99813	0.99819
3.0	0.99865	0.99869



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.81 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}} \simeq 0.0886$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.46 - 0.0886,\quad 0.46 + 0.0886\right) = \left(0.3714, 0.5486\right)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 99.5 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{2.81}$

$$Error = 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.05 \Rightarrow 2.81 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{n}} = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{n}} = \frac{0.05}{2.81} \Rightarrow \frac{0.46 \cdot 0.54}{n} = \left(\frac{0.05}{2.81}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.46 \cdot 0.54}{\left(\frac{0.05}{2.81}\right)^2} = 784.56$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 785 individuos.

EJERCICIO 8

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) **(1 punto)** Para estimar la media poblacional de la variable X. se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

11.8 10 9.8 12 9.7 10.8 9.6 11.3 10.4 12.2 9.1 10.5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

a) X = N(μ, 4)

n = 12 → $\overline{X_{12}}$ es una distribución normal de la misma media que X y de desviación típica

$$\sigma = \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.\ \overline{X_{12}} = N\left(\mu, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

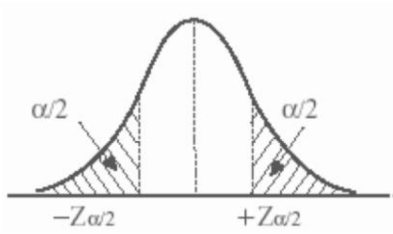
b) La media de la muestra es:

$$\bar{x} = \frac{11.8+10+9.8+12+9.7+10.8+9.6+11.3+10.4+12.2+9.1+10.5}{12} = 10.6$$

Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0'015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ = **2.17**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	[illegible]	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	[illegible]	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	[illegible]	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	[illegible]	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	[illegible]	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	[illegible]	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	[illegible]	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	[illegible]	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	[illegible]	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	[illegible]	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	[illegible]	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	[illegible]	0.9
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9850}$	0.9
[illegible]	[illegible]	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{12}} \simeq 2.5$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (10.6 - 2.5,\quad 10.6 + 2.5) = (8.1, 13.1)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 97 % tenemos $z_{\alpha/2}$ = **2.17**

$$Error = 1.2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.2 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 1.2 \Rightarrow \frac{1.2}{2.17} = \frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{4 \cdot 2.17}{1.2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{4 \cdot 2.17}{1.2} \right)^2 \simeq 52.32$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 53 elementos.