PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
c) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
d) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.

Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores del parámetro *a* para que la matriz A tenga in inversa.
b) **(0.75 puntos)** Para *a* = *2*, calcule la matriz inversa de A.
c) **(0.75 puntos)** Para *a* = *2*, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con *a*, *b* y *c* números reales. Calcule los valores *a*, *b* y *c*, sabiendo que la gráfica de *f* posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto P(0, 18) es –3.
b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$ y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 6x-3 & x\le 1 \\ ax^2+bx+2 & x>1 \end{cases}$$

Con *a* y *b* números reales. Determine los valores de *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en todo su dominio.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En un estudio realizado en una sucursal se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200 000 €. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200 000 €. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** El crédito no sea hipotecario y no supere los 200 000€

b) **(0.75 puntos)** Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200 000 €

c) **(0.75 puntos)** Si su crédito supera los 200 000€, que este no sea hipotecario.

EJERCICIO 6

En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Juegue con video juegos o lea libros.

b) **(0.75 puntos)** Juegue con video juegos y no lea libros.

c) **(0.75 puntos)** Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800 MPa.

a) **(1.25 puntos)** Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92%, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

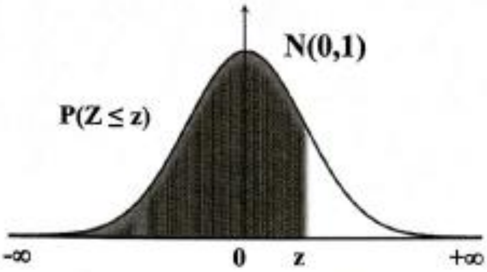
EJERCICIO 8

Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92% para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

b) **(1 punto)** En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0.02?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.

Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

Llamamos x = número de cajas del primer tipo, y = número de cajas del segundo tipo.

La función a maximizar es el número de regalos que viene dado como $f(x,y)=x+y$

Realizamos una tabla con los datos.

	Piononos	Pestiños
Nº cajas primer tipo (x)	3x	2x
Nº cajas segundo tipo (y)	4y	6y
TOTAL	$3x+4y$	$2x+6y$

Las restricciones son:

"*Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo*" → $y \geq 9$

"*En total dispone de 120 piononos*" → $3x+4y \leq 120$

"*En total dispone de 150 pestiños*" → $2x+6y \leq 150$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 9 \\ 3x+4y \leq 120 \\ 2x+6y \leq 150 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \geq 9 \\ 3x+4y \leq 120 \\ x+3y \leq 75 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+4y=120$

x	$y=\frac{120-3x}{4}$
0	30
40	0

$x+3y=75$

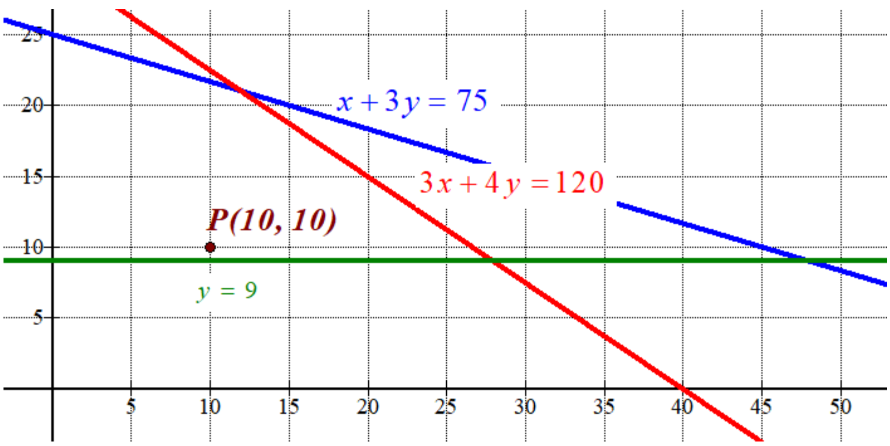
x	$y=\frac{75-x}{3}$
0	25
75	0

$y=9$

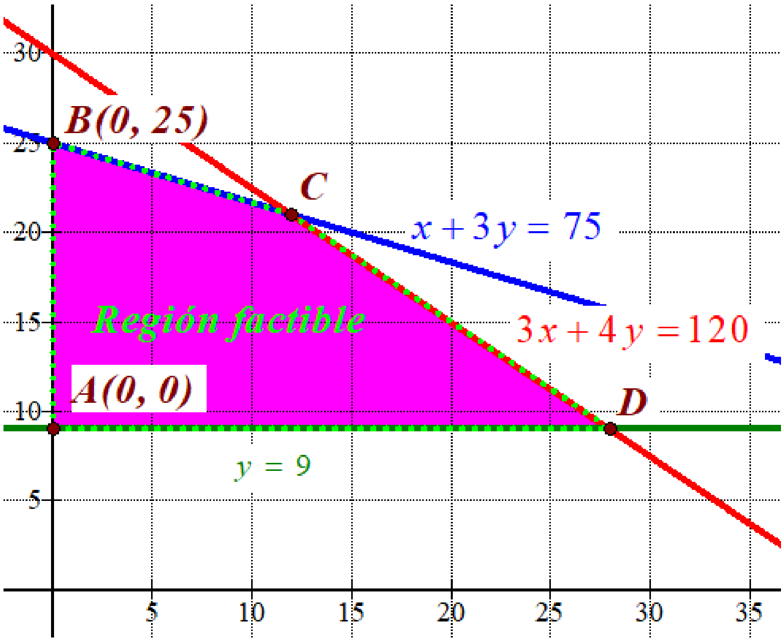
x	$y=9$
0	9
50	9

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} y\geq 9 \\ 3x+4y\leq 120 \\ x+3y\leq 75 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta horizontal verde y por debajo de la azul y la roja.
La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ x=75-3y \end{array}\right\} \Rightarrow 3(75-3y)+4y=120 \Rightarrow 225-9y+4y=120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-105 \Rightarrow y=\frac{105}{5}=21 \Rightarrow x=75-63=12 \Rightarrow \boxed{C(12,21)}$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+36=120 \Rightarrow 3x=84 \Rightarrow x=\frac{84}{3}=28 \Rightarrow \boxed{D(28,9)}$$

Valoramos la función objetivo $f(x,y)=x+y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$
B(0, 25) → $f(0,25)=25$
C(12, 21) → $f(12,21)=32$
D(28, 9) → $f(28,9)=37$ ¡Máximo!

El número máximo de cajas es de 37 que se consigue con 28 del primer tipo y 9 del segundo.
Con este número de cajas usamos $3\cdot 28+4\cdot 9=120$ piononos y $2\cdot 28+6\cdot 9=110$ pestiños.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores del parámetro *a* para que la matriz A tenga in inversa.

b) **(0.75 puntos)** Para *a = 2*, calcule la matriz inversa de A.

c) **(0.75 puntos)** Para *a = 2*, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

a) Para tener inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3 - 4a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = a \\ \frac{4-2}{2} = 1 = a \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *a* distinto de 3 y de 1.

b) Para *a = 2* la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 8 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C \Rightarrow X \cdot A = B^t \cdot C - I_3 \Rightarrow X = \left(B^t \cdot C - I_3\right) A^{-1}$$

Realizamos las operaciones indicadas.

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot C-I_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-2\\-1&-3&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&-2\\-1&-4&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$X=\left(B^t\cdot C-I_3\right)A^{-1}=\begin{pmatrix}1&6&-2\\-1&-4&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&-2&2\\6&5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-18-12 & 1-12-10 & -1+12+8\\-2+12+6 & -1+8+5 & 1-8-4\\-6 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-28&-21&19\\16&12&-11\\-6&-5&4\end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con *a*, *b* y *c* números reales. Calcule los valores *a*, *b* y *c*, sabiendo que la gráfica de *f* posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto P(0, 18) es –3.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$ y el eje de abscisas.

a) Si la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ se cumple que la derivada se anula en $x=3$.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow 3\cdot 3^2+2a\cdot 3+b=0 \Rightarrow \boxed{27+6a+b=0}$$

Que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto P(0, 18) es –3 implica dos cosas: la función vale 18 en *x = 0* y que la derivada en *x = 0* es –3.

$$f(0)=18 \Rightarrow 0^3+a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=18 \Rightarrow \boxed{c=18}$$

$$f'(0)=-3 \Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-3 \Rightarrow \boxed{b=-3}$$

Sustituimos el valor obtenido de *b* en la primera ecuación y obtendremos el valor de *a*.

$$\left.\begin{array}{l} 27+6a+b=0 \\ b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 27+6a-3=0 \Rightarrow 6a=-24 \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

Los valores buscados son *a = –4; b = –3; c = 18.*

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^3-4x^2-3x+18 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-4x^2-3x+18=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -3 & 18 \\ 3 & & 3 & -3 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \lfloor 0 \\ -2 & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & \lfloor 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)$$

$$\Rightarrow x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x+2)(x-3)$$

La gráfica de la función corta el eje de abscisas en *x = 3* y en *x = –2.*

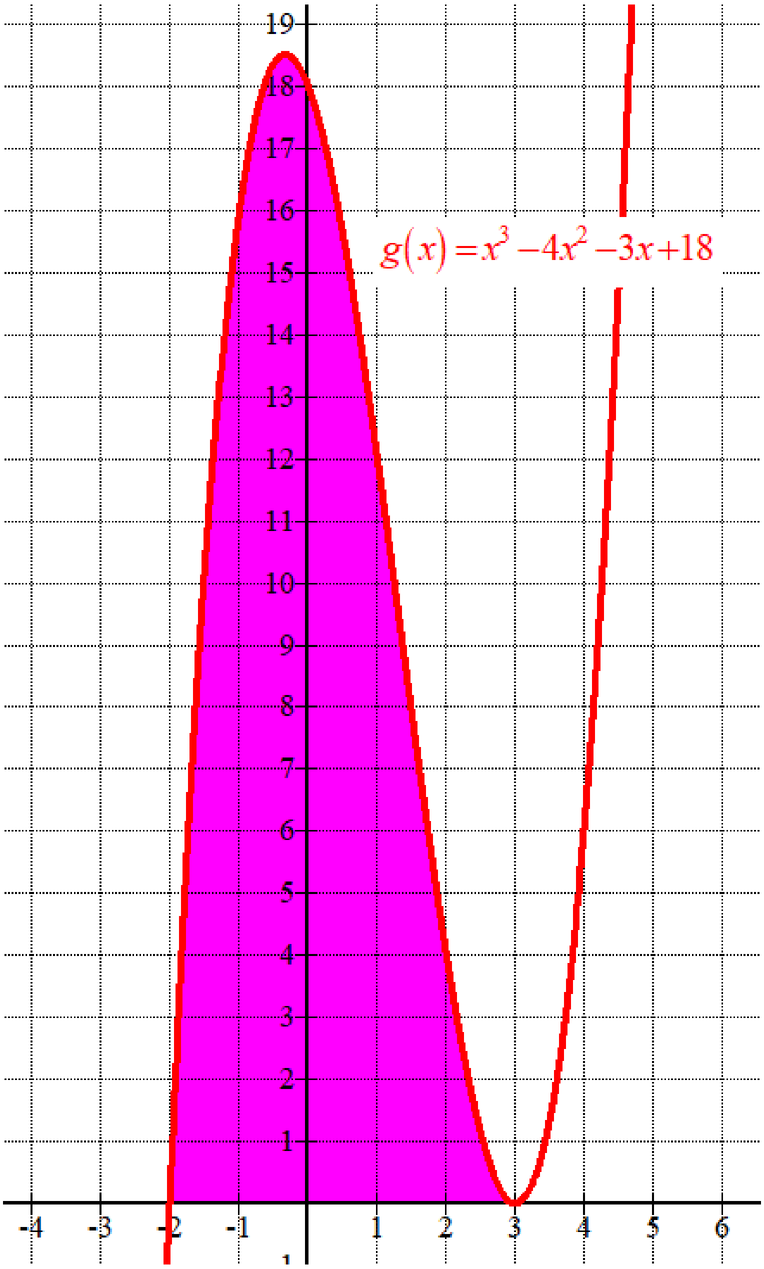
El área es el valor absoluto de la integral definida de $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$ entre *x = 3* y *x = –2.*

$$Área = \left|\int_{-2}^{3} g(x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{3} x^3-4x^2-3x+18dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+18x\right]_{-2}^{3}\right| =$$

$$= \left[\frac{3^4}{4}-4\frac{3^3}{3}-3\frac{3^2}{2}+18\cdot 3\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-4\frac{(-2)^3}{3}-3\frac{(-2)^2}{2}+18(-2)\right] =$$

$$= \frac{81}{4}-\cancel{36}-\frac{27}{2}+54-4-\frac{32}{3}+6+\cancel{36} = \boxed{\frac{625}{12} \simeq 52.08u^2}$$

No pide dibujar la gráfica, pero lo hacemos para comprobar la solución.



EJERCICIO 4

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}6x-3 & x\le 1\\ ax^2+bx+2 & x>1\end{cases}$$

Con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x)=-2x^2+8x-6$.

a) Continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 6x-3=6-3=3\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+2=a+b+2\\ f(1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow 3=a+b+2\Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

La función derivada en $\mathbb{R}-\{1\}$ tiene la expresión:

$$f'(x)=\begin{cases}6 & x<1\\ 2ax+b & x>1\end{cases}$$

Derivable en $x = 1$. Esto implica que las derivadas laterales coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=6\\ f'(1^+)=2a+b\\ f'(1^-)=f'(1^+)\end{array}\right\}\Rightarrow 2a+b=6\Rightarrow \boxed{b=6-2a}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=1\\ b=6-2a\end{array}\right\}\Rightarrow a+6-2a=1\Rightarrow -a=-5\Rightarrow \boxed{a=5}\Rightarrow \boxed{b=6-2\cdot 5=-4}$$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = -4$.

b) Averiguamos donde corta la parábola el eje OX.

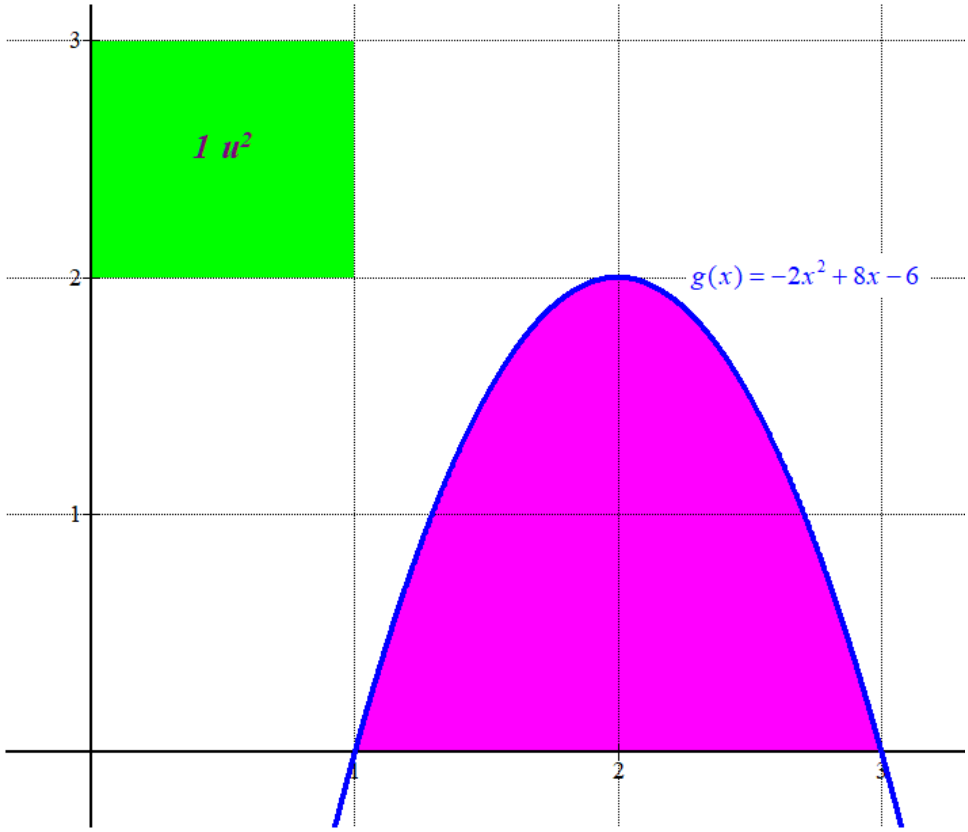
$$\left.\begin{array}{l}g(x)=-2x^2+8x-6\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2x^2+8x-6=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3=x\\ \frac{4-2}{2}=1=x\end{cases}$$

El recinto empieza en $x = 1$ y termina en $x = 3$ por lo que su área es el valor absoluto de la integral definida de $g(x)=-2x^2+8x-6$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

$$Área = \left| \int_1^3 g(x)dx \right| = \left| \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6dx \right| = \left| \left[-2\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right]_1^3 \right| =$$

$$= \left| \left[-2\frac{3^3}{3} + 4\cdot 3^2 - 6\cdot 3 \right] - \left[-2\frac{1^3}{3} + 4\cdot 1^2 - 6\cdot 1 \right] \right| = \left| \cancel{-18+36-18} + \frac{2}{3} - 4 + 6 \right| = \frac{2}{3} + 2 = \boxed{\frac{8}{3} \simeq 2.66u^2}$$



BLOQUE C

EJERCICIO 5

En un estudio realizado en una sucursal se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200 000 €. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200 000 €. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** El crédito no sea hipotecario y no supere los 200 000€

b) **(0.75 puntos)** Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200 000 €

c) **(0.75 puntos)** Si su crédito supera los 200 000€, que este no sea hipotecario.

Realizamos una tabla de contingencia para poder establecer el resto de porcentajes.

	Préstamos de más de 200 000 €	Préstamos de 200 000 € o menos	
Préstamos hipotecarios	**20**		**70**
Préstamos no hipotecarios			
	25		**100**

Terminamos de completar la tabla.

	Préstamos de más de 200 000 €	Préstamos de 200 000 € o menos	
Préstamos hipotecarios	**20**	**50**	**70**
Préstamos no hipotecarios	**5**	**25**	**30**
	25	**75**	**100**

Llamamos H al suceso "Ser préstamo hipotecario" y M al suceso "Ser un préstamo de más de 200 000 €"

Con estos datos y aplicando la regla de Laplace tenemos las respuestas a las preguntas de los tres apartados.

a) $P\left(\overline{H} \cap \overline{M}\right) = \frac{25}{100} = \boxed{0.25}$

b) $P\left(\overline{M} / \overline{H}\right) = \frac{25}{30} = \boxed{\frac{5}{6} \simeq 0.83}$

c) $P\left(\overline{H} / M\right) = \frac{5}{25} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$

EJERCICIO 6

En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Juegue con video juegos o lea libros.

b) **(0.75 puntos)** Juegue con video juegos y no lea libros.

c) **(0.75 puntos)** Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

Realizamos una tabla de contingencia para poder establecer el resto de porcentajes.

	Lee libros	No lee libros	
Juega con videojuegos			**65**
No juega con videojuegos		**15**	
	45		**100**

Terminamos de completar la tabla.

	Lee libros	No lee libros	
Juega con videojuegos	**25**	**40**	**65**
No juega con videojuegos	**20**	**15**	**35**
	45	**55**	**100**

Llamamos V al suceso "Jugar a videojuegos" y L al suceso "Leer libros"
Con estos datos y aplicando la regla de Laplace tenemos las respuestas a las preguntas de los tres apartados.

a) $P\left(L \cup V\right) = \frac{25+40+20}{100} = \boxed{0.85}$

b) $P\left(V \cap \overline{L}\right) = \frac{40}{100} = \boxed{0.40}$

c) $P\left(L / \overline{V}\right) = \frac{20}{35} = \boxed{\frac{4}{7} \simeq 0.57}$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800 MPa.

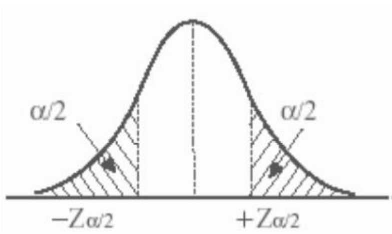
a) **(1.25 puntos)** Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92%, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

a) X = Resistencia de una herramienta (en MPa)
X = N(μ,15)

Con un nivel de confianza del 92%

$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$



Tamaño de muestra n = 100. Media muestral $\bar{x} = 800$

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 2.625\,MPa$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(800 - 2.625,\ 800 + 2.625\right) = \left(797.375,\ 802.625\right)$$

b) Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 2.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 1.75 \cdot 15 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75 \cdot 15}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.75 \cdot 15}{2}\right)^2 \simeq 172.265$$

El tamaño mínimo es de 173 herramientas.

EJERCICIO 8

Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92% para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

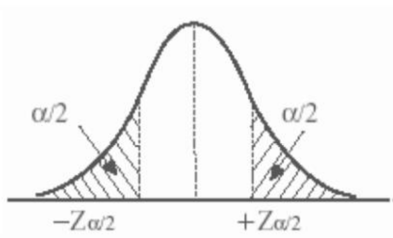
b) **(1 punto)** En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0.02?

Tamaño de la muestra es $n = 400$. $pr = \dfrac{320}{400} = 0.8$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.8 = 0.2$

a) Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}} = 0.035$$

El error máximo cometido es de 0.035.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.8 - 0.035,\quad 0.8 + 0.035) = (0.765,\ 0.835)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 92% tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.02}{1.75} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n = \frac{0.16}{\left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2} = 1225$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 1226 perros.