PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro *a* para los que tanto A como B admitan inversa.
b) **(1.5 puntos)** Para *a = 1*, halle una matriz X que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.
b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.
c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t)=t^2-5t+6,\ t\in[0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.
b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0)=10$, halle la función *v*.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.
d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.
b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.
c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.
d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra “lottery” ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra “lottery” sea spam.
b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra “lottery” no sea spam.
c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra “lottery” y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

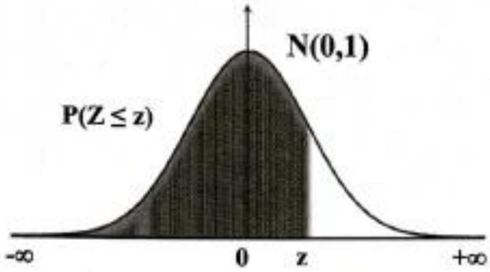
a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.
b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.
b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.
b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.
b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x-3y=1$

x	$y=\frac{1-2x}{-3}$
2	1
5	3

$4x+y=9$

x	$y=9-4x$
0	9
2	1

$x+y=5$

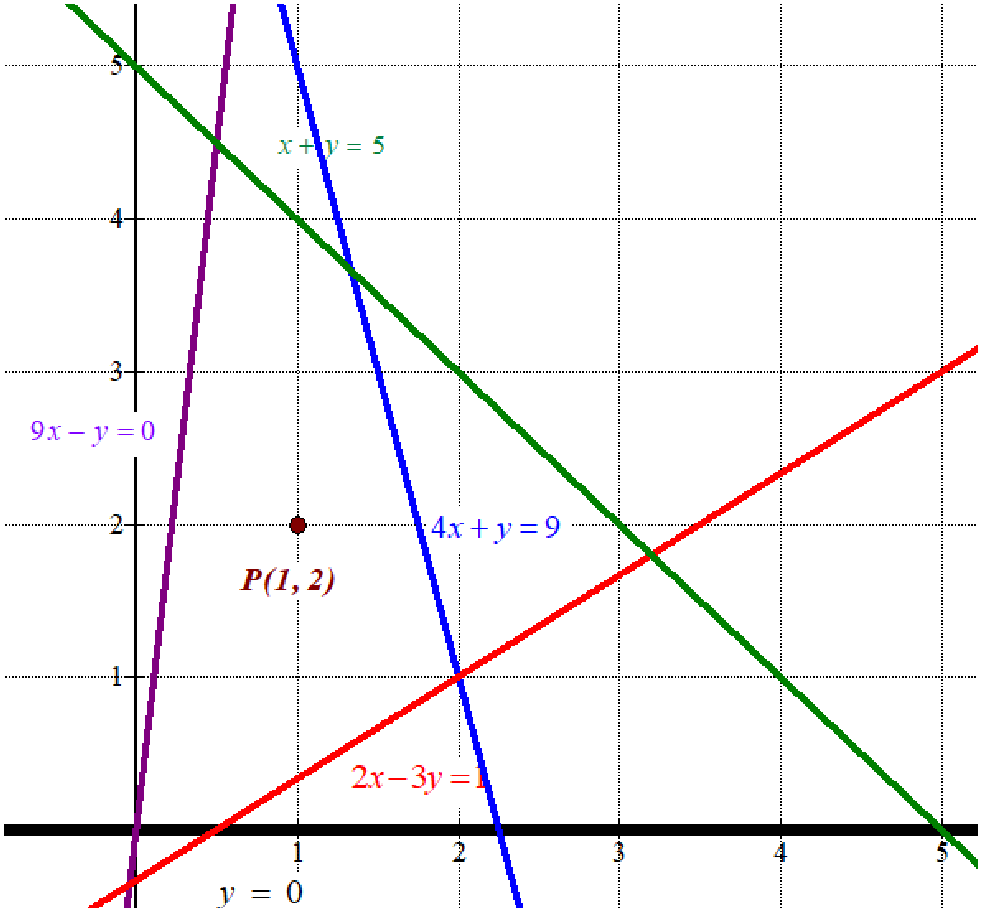
x	$y=5-x$
0	5
5	0

$9x-y=0$

x	$y=9x$
0	0
1	9

$y=0$

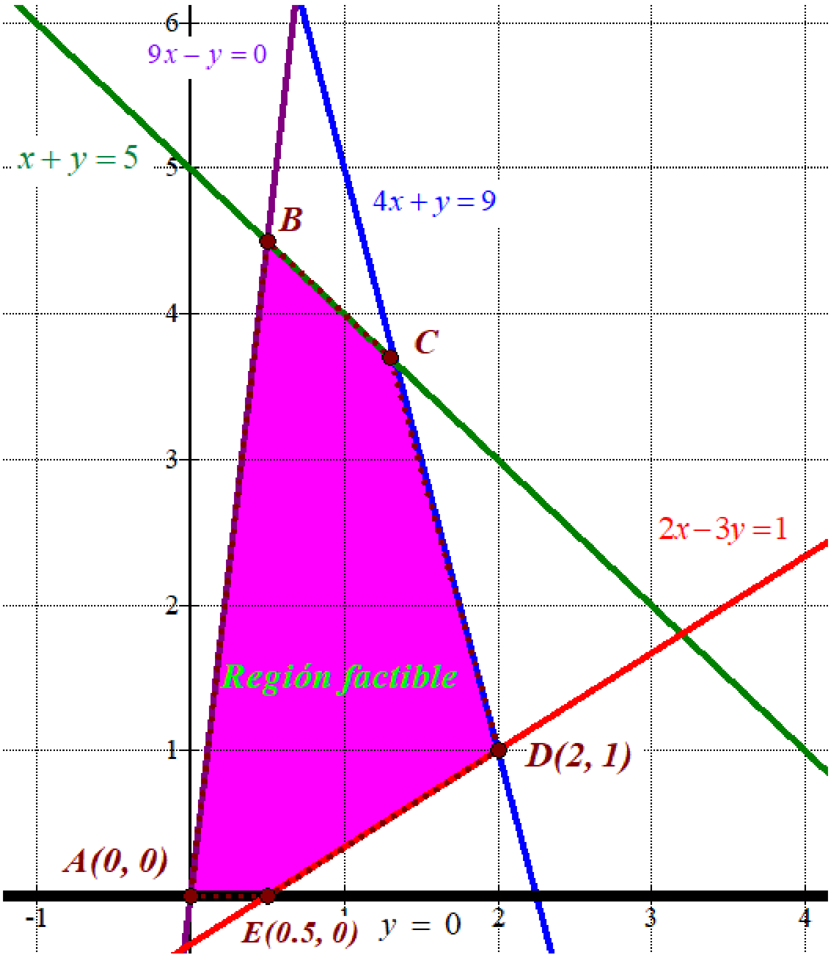
x	$y=0$
0	0
5	0



Como las restricciones son $2x-1\le 3y$; $4x+y\le 9$; $x+y\le 5$; $9x\ge y$; $y\ge 0$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja y el eje de abscisas y por debajo de la azul, verde y la violeta.
Comprobamos que el punto P(1, 2) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$2-3\cdot 2\le 1;\quad 4+2\le 9;\quad 1+2\le 5;\quad 9-2\ge 0;\quad 2\ge 0$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y C.

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 9x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=5-y \\ 9x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9(5-y)-y=0 \Rightarrow 45-9y-y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10y=-45 \Rightarrow y=\frac{45}{10}=4.5 \Rightarrow x=5-4.5=0.5 \Rightarrow \boxed{B(0.5,4.5)}$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 4x+y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=5-x \\ 4x+y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x+5-x=9 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)}$$

Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(0.5, 4.5), $C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$,y D(2,1) y E(0.5, 0).

b) Vemos si cumplen las restricciones.

$$A(2,2) \rightarrow 2\cdot 2-3\cdot 2 \le 1;\quad ¡¡¡4\cdot 2+2 \le 9!!!;\quad 2+2 \le 5;\quad 9\cdot 2-2 \ge 0;\ 2 \ge 0$$

El punto A(2, 2) no cumple todas las inecuaciones y no pertenece a la región R.

$$B(1,3.5) \rightarrow 2\cdot 1-3\cdot 3.5 \le 1;\quad 4\cdot 1+3.5 \le 9;\quad 1+3.5 \le 5;\quad 9\cdot 1-3.5 \ge 0;\ 3.5 \ge 0$$

El punto B(1, 3.5) cumple todas las inecuaciones y pertenece a la región R.

También se puede comprobar colocando cada uno de los puntos en el dibujo, viendo que el punto A(2, 2) está fuera de la región pintada de rosa y el B(2, 3.5) está dentro.

c) Valoramos la función objetivo $F(x,y)=5x-3y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $F(0,0)=0$

B(0.5, 4.5) → $F(0.5,4.5)=5\cdot 0.5-3\cdot 4.5=-11$ ¡Mínimo!

$C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$ → $F\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)=5\frac{4}{3}-3\frac{11}{3}=\frac{-13}{3}\simeq -4.33$

D(2, 1) → $F(2,1)=5\cdot 2-3\cdot 1=7$ ¡Máximo!

E(0.5, 0) → $F(0.5,0)=5\cdot 0.5-3\cdot 0=2.5$

El máximo valor de la función se alcanza en el punto D(2, 1) y el mínimo en B(0.5, 4.5).

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro *a* para los que tanto A como B admitan inversa.

b) **(1.5 puntos)** Para *a = 1*, halle una matriz X que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$

a) Para que tengan inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-2a$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-2a=0\Rightarrow a(a-2)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-2=0\Rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix}=-2+a$$

$$|B|=0\Rightarrow -2+a=0\Rightarrow \boxed{a=2}$$

Para que tengan inversa las dos matrices A y B debe ser *a* distinto de 0 y de 2.

b) Para *a = 1* las dos matrices tienen inversa.
Despejamos X de la ecuación.

$$A\cdot X\cdot B=C\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

Hallamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2+1-4 & -1-1 \\ -1+4 & 1 \\ 1-2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 1+4 \\ 3+1 & -3-2 \\ -1-1 & 1+2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.

c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

a) Puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+2x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0=0 \Rightarrow \boxed{P(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+2x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to \boxed{P(0,0)} \\ x^2-3x+2=0 \to x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=2 \to \boxed{Q(2,0)} \\ \dfrac{3-1}{2}=1 \to \boxed{R(1,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son P(0, 0), Q(2, 0) y R(1, 0).

Utilizamos la derivada para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-6x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(2)}}{2\cdot 3}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6+\sqrt{12}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\simeq 1.58 \\ \dfrac{6-\sqrt{12}}{6}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\simeq 0.42 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=2>0$. La función crece en $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=3-6+2=-1<0$. La función decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=12-12+2=2>0$.

La función crece en $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y un mínimo relativo en $x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para estudiar la curvatura utilizamos la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=6x-6 \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{6}=1$$

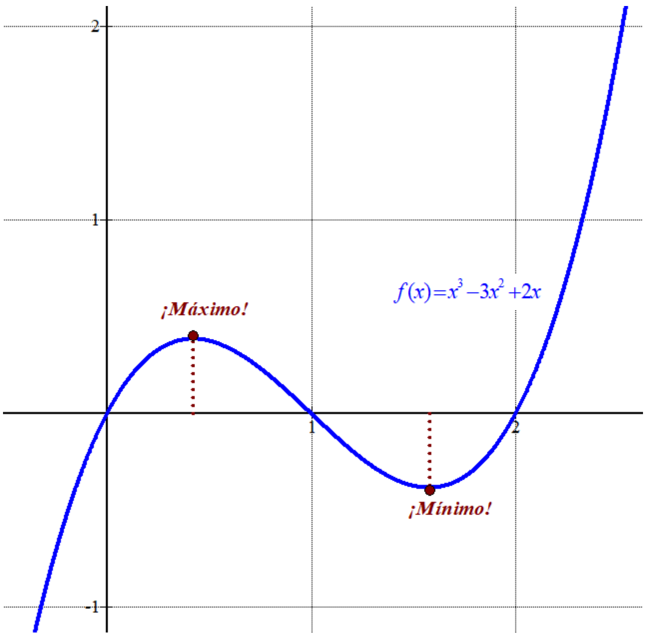
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada segunda vale $f''(0)=0-6=-6<0$.
La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$.
En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada segunda vale $f''(2)=12-6=6>0$.
La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

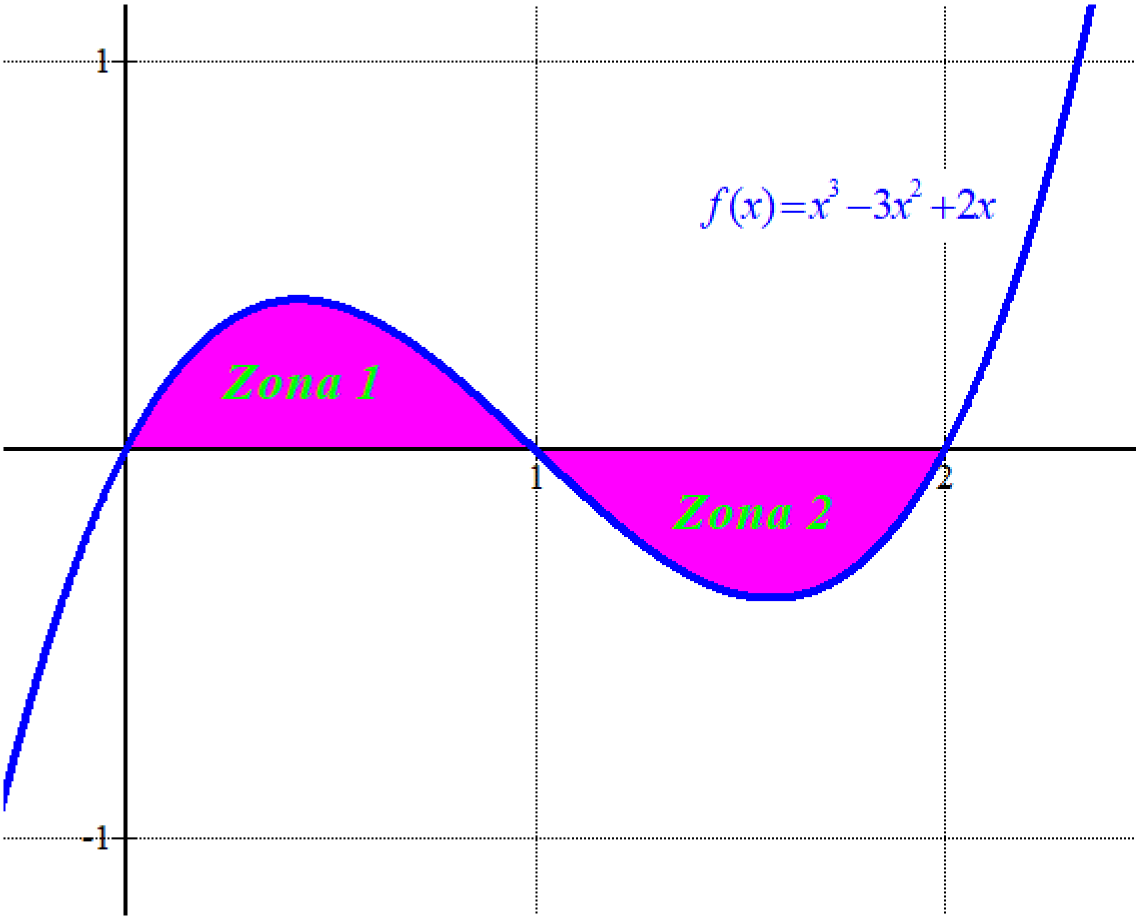
La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$ y convexa (∪) en $(1,+\infty)$.
La función presenta un punto de inflexión en *x* = *1*.

b)

x	$f(x)=x^3-3x^2+2x$
0	0
0.42	0.4
1	0
1.58	–0.4
2	0



c) El área de la región la dividimos en dos partes. Calculamos cada una de ellas y luego las sumamos.



$$\acute{A}rea\,1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3-3x^2+2xdx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-0^3+0^2\right]=\boxed{\frac{1}{4}\,u^2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^3-3x^2+2xdx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]=-\frac{1}{4}$$

$$\acute{A}rea\,2=\left|-\frac{1}{4}\right|=\boxed{\frac{1}{4}\,u^2}$$

El área total es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5u^2}$

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6,\ t \in [0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.

b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0) = 10$, halle la función *v*.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante *t = 2* y posteriormente las vendió en el instante *t = 4*, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

a) Estudiamos el signo de la función derivada.

$$\left.\begin{array}{l} v'(t) = t^2 - 5t + 6 \\ v'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{5+1}{2} = 3 = t \in [0,6] \\ \dfrac{5-1}{2} = 2 = t \in [0,6] \end{cases}$$

En el intervalo $[0,2)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $v'(1) = 1^2 - 5 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $[0,2)$.

En el intervalo $(2,3)$ tomamos *t = 2.5* y la derivada vale $v'(2.5) = 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + 6 = -0.25 < 0$. La función decrece en $(2,3)$.

En el intervalo $(3,6]$ tomamos *t = 4* y la derivada vale $v'(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $(3,6]$.

La función crece en $[0,2) \cup (3,6]$ y decrece en $(2,3)$.

b) La función es la integral de la función.

$$v(t) = \int v'(t)\,dt = \int t^2 - 5t + 6\,dt = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + K$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = \dfrac{t^3}{3} - 5\dfrac{t^2}{2} + 6t + K \\ v(0) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = \frac{0^3}{3} - 5\frac{0^2}{2} + 6 \cdot 0 + K \Rightarrow K = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 6t + 10}$$

c) Las ganancias en cada acción son la diferencia entre *v(4)* y *v(2)*.

$$\left.\begin{array}{l} v(4)=\frac{4^3}{3}-\frac{5}{2}4^2+6\cdot 4+10=\frac{46}{3} \\ v(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\frac{44}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow v(4)-v(2)=\frac{46}{3}-\frac{44}{3}=\frac{2}{3}\text{ € / } \mathit{acción}$$

Las ganancias son $3000\cdot\frac{2}{3}=2000$ €.

d) Buscamos el mínimo y máximo absoluto de la función. Para ello valoramos la función en 0, 2, 3 y 6.

$$\left.\begin{array}{l} v(0)=\frac{0^3}{3}-\frac{5}{2}0^2+6\cdot 0+10=10 \text{ ¡}\mathit{Mínimo}\text{!} \\ v(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\frac{44}{3} \\ v(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{5}{2}3^2+6\cdot 3+10=\frac{29}{2} \\ v(6)=\frac{6^3}{3}-\frac{5}{2}6^2+6\cdot 6+10=28 \text{ ¡}\mathit{Máximo}\text{!} \end{array}\right\}$$

Debería haber comprado en $t = 0$ y haber vendido en $t = 6$. Habría comprado al valor más bajo y hubiese vendido al valor más alto del intervalo [0,6]

BLOQUE C

EJERCICIO 5
Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.
a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.
b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.
c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.
d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

a) Si la probabilidad de sacar cara la llamamos p tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(Cara)=p \\ P(Cruz)=1-p \\ P(Cara)=2\cdot P(Cruz) \end{array}\right\} \Rightarrow p=2(1-p) \Rightarrow p=2-2p \Rightarrow 3p=2 \Rightarrow \boxed{p=\frac{2}{3}}$$

La probabilidad de sacar cara es 2/3.

b) Ocurre lo pedido si sale CARA y CRUZ o bien CRUZ y CARA.

$$P(\text{Cara y Cruz})=P(Cara1\,y\,Cruz2)+P(Cruz1\,y\,Cara2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

c) Calculamos la probabilidad del suceso contrario “No sale ninguna cara” = “Salen dos cruces”.

$$P(Cruz1\,y\,Cruz2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{Al menos una cara})=1-P(Cruz1\,y\,Cruz2)=1-\frac{1}{9}=\boxed{\frac{8}{9}}$$

d) Llamamos A al suceso “Ha salido al menos una cara” y B al suceso “Han salido dos caras”. Nos piden calcular $P(B/A)$.

Sabemos que el suceso $A\cap B$ = “Han salido al menos una cara” y “Han salido dos caras” es el suceso “Han salido dos caras”. $A\cap B=B$.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información.

	"Lottery"	No "lottery"	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$		20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$		80
			100

Completamos la tabla.

	"Lottery"	No "lottery"	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$	12	20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$	79.52	80
	8.48	91.52	100

a) Llamamos S al suceso "El correo es spam" y S al suceso "El correo tiene la palabra "lottery". Nos piden calcular $P(S/L)$.

$$P(S/L) = \frac{P(S \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{8.48}{100}} = \boxed{\frac{50}{53} \simeq 0.9434}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{S}/\overline{L})$.

$$P(\overline{S}/\overline{L}) = \frac{P(\overline{S} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{\frac{79.52}{100}}{\frac{91.52}{100}} = \boxed{\frac{497}{572} \simeq 0.8689}$$

c) Se etiqueta incorrectamente si tiene la palabra "lottery" y no es spam o bien si no aparece la palabra "lottery" y es spam. Calculamos la probabilidad de cada suceso y las sumamos.

$$P(L \cap \overline{S}) + P(\overline{L} \cap S) = \frac{0.48}{100} + \frac{12}{100} = \boxed{\frac{78}{625} = 0.1248}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

a) El tamaño de la población es 250 + 300 + 400 + 350 = 1300.

Si se eligen 20 de 250 por proporcionalidad se eligen $\frac{20\cdot 1300}{250}=104$ de toda la población.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 300}{250}=24$ del segundo estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 400}{250}=32$ del tercer estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 350}{250}=28$ del cuarto estrato.

b) b1) Si X es la distribución de la calificación es N(6.4, 0.7) entonces $\overline{X_{49}}$ es una distribución normal con la misma media pero con desviación típica $\frac{0.7}{\sqrt{49}}=0.1$.

$\overline{X_{49}}=N(6.4,0.1)$

b2) Nos piden calcular $P\left(6.3\le \overline{X_{49}}\le 6.8\right)$.

$$P\left(6.3\le \overline{X_{49}}\le 6.8\right)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{6.3-6.4}{0.1}\le Z\le \frac{6.8-6.4}{0.1}\right)=$$

$$=P(-1\le Z\le 4)=P(Z\le 4)-P(Z\le -1)=P(Z\le 4)-P(Z\ge 1)=$$

$$=P(Z\le 4)-\left[1-P(Z\le 1)\right]=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.99997-[1-0.8413]=\boxed{0.84127}$$

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

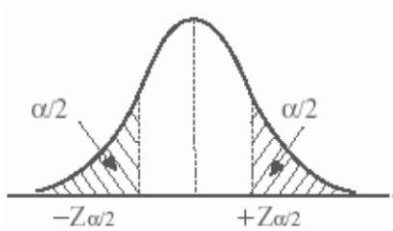
b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Tamaño de la muestra es *n = 400*. $pr = \frac{64}{400} = 0.16$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.16 = 0.84$

a) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0'01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}325}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	[illegible]	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	[illegible]	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	[illegible]	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	[illegible]	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	[illegible]	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	[illegible]	[illegible]
2,1	0,9821	0,9826	[illegible]	[illegible]
2,2	0,9861	0,9864	[illegible]	[illegible]
2,3	[illegible]	[illegible]	0,9898	0,9901
[illegible]	0,9918	0,9920	[illegible]	[illegible]



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} = 0.0426$$

El error máximo cometido es de 0.0426.

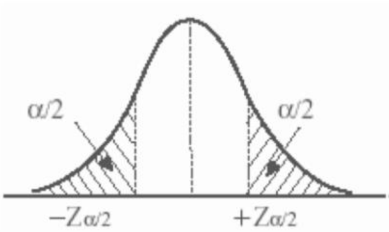
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.16 - 0.0426,\quad 0.16 + 0.0426) = (0.1174,\ 0.2026)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} \simeq 0.036$$

El error máximo cometido es de 0.036.
El error es menor pues utilizamos un nivel de confianza menor.