PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. <u>En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.</u>

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

<u>EJERCICIO 1</u> (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\left(1-\cos(x)\right)+bsen(x)-2\left(e^x-1\right)}{x^2}=7$.

<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Halla $a>0$ y $b>0$ sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto (1, 2) un punto crítico.

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=1+\int_0^x te^t\,dt .$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan).

<u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x\neq -1$, $x\neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (2, 4)

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

<u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2=-A^{-1}$. **(1.25 puntos)**

b) Dadas las matrices

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4X+B=AC$. **(1.25 puntos)**

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada rula? **(1.25 puntos)**

<u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto A(1,1,0) a un cierto plano π corta a éste en el punto $B=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

a) Calcula la ecuación del plano π. **(1.5 puntos)**

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π. **(1 punto)**

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1 \\ z=-3-\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s\equiv\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s. **(1.25 puntos)**

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 **(2.5 puntos)**

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos(x))+bsen(x)-2(e^x-1)}{x^2}=7$.

Calculamos el límite y luego lo igualamos a 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos(x))+bsen(x)-2(e^x-1)}{x^2}=\frac{a(1-\cos(0))+bsen(0)-2(e^0-1)}{0^2}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{a(0+sen(x))+b\cos(x)-2(e^x-0)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot sen(x)+b\cos(x)-2e^x}{2x}=\frac{a\cdot sen(0)+b\cos(0)-2e^0}{2\cdot 0}=\frac{b-2}{0}=....$$

Como el límite debe valer 7 no puede ser $b-2$ distinto de cero pues entonces valdría ∞. Entonces $b=2$ y seguimos calculando el límite.

$$...=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot sen(x)+2\cos(x)-2e^x}{2x}=\frac{a\cdot sen(0)+2\cos(0)-2e^0}{2\cdot 0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos(x)-2sen(x)-2e^x}{2}=$$

$$=\frac{a\cdot\cos(0)-2sen(0)-2e^0}{2}=\frac{a-2}{2}$$

Como el límite debe dar 7 entonces $\frac{a-2}{2}=7\Rightarrow a-2=14\Rightarrow\boxed{a=16}$

Los valores buscados son $a=16$ y $b=2$.

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto (1, 2) un punto crítico.

Un punto crítico en el punto (1, 2) significa dos cosas: una que la función pasa por dicho punto, es decir, *f(1) = 2* y otra que la derivada se anula en *x = 1*, es decir *f ´(1) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{bx^2}{1+ax^4} \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = \frac{b \cdot 1^2}{1+a \cdot 1^4} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow 2(1+a) = b \Rightarrow \boxed{b = 2+2a}$$

$$f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2bx\left(1+ax^4\right) - 4ax^3\left(bx^2\right)}{\left(1+ax^4\right)^2} = \frac{2bx + 2abx^5 - 4abx^5}{\left(1+ax^4\right)^2} = \frac{2bx - 2abx^5}{\left(1+ax^4\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{2bx - 2abx^5}{\left(1+ax^4\right)^2} \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2b-2ab}{(1+a)^2} = 0 \Rightarrow 2b - 2ab = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 0} \\ o \\ 1-a = 0 \to \boxed{a = 1} \end{cases}$$

Hay dos formas de conseguir lo pedido:

1ª forma.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2+2a \\ b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2a = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}}$$ Esta opción no es válida pues a > 0.

2ª forma.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2+2a \\ a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 2+2 = 4 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}}$$

Se consigue lo pedido en el ejercicio con *a = 1* y *b = 4*.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=1+\int_0^x te^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan)).

Calculamos la expresión de la función *f(x)* hallando la integral definida.

$$\int te^t dt=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=t\rightarrow du=dt\\ dv=e^t dt\rightarrow v=\int e^t dt=e^t\end{array}\right\}=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+K$$

$$\int_0^x te^t dt=\left[te^t-e^t\right]_0^x=\left[xe^x-e^x\right]-\left[0e^0-e^0\right]=xe^x-e^x+1$$

$$f(x)=1+\int_0^x te^t dt=1+xe^x-e^x+1=xe^x-e^x+2$$

Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero para obtener los posibles puntos de inflexión.

$$f(x)=xe^x-e^x+2\Rightarrow f'(x)=\cancel{e^x}+xe^x-\cancel{e^x}=xe^x\Rightarrow f''(x)=e^x+xe^x$$

$$f''(x)=0\Rightarrow e^x+xe^x=0\Rightarrow e^x(1+x)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x=0,\ \text{¡Imposible!}\\ o\\ 1+x=0\rightarrow\boxed{x=-1}\end{array}\right.$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x=-1$.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada segunda vale $f''(-2)=e^{-2}-2e^{-2}<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=e^0+0\cdot e^0=1>0$. La función es convexa (∪) en $(-1,+\infty)$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-1)$ y convexa (∪) en $(-1,+\infty)$.

Y tiene un punto de inflexión en $x=-1$. Como $f(-1)=-e^{-1}-e^{-1}+2=2-2e^{-1}=2-\frac{2}{e}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(-1,\,2-\frac{2}{e}\right)$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1$, $x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (2, 4)

Calculamos la integral de la función *f(x).*

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx=\ldots$$

$$\boxed{\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}}$$

$$\ldots=\int 1+\frac{2}{x^2-1}dx=\int 1dx+\int\frac{2}{x^2-1}dx=x+\int\frac{2}{x^2-1}dx=\ldots$$

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow 2=A(x+1)+B(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-1\rightarrow 2=A(0)+B(-2)\rightarrow 2=-2B\rightarrow B=-1\\ x=1\rightarrow 2=A(2)+B(0)\rightarrow 2=2A\rightarrow A=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$\ldots=x+\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+K$$

Las primitivas de *f(x)* son $F(x)=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+K$.

La primitiva que pasa por (2, 4) debe cumplir que *F(2) = 4.*

$$F(2)=4\Rightarrow 2+\ln|2-1|-\ln|2+1|+K=4\Rightarrow 2+0-\ln 3+K=4\Rightarrow K=2+\ln 3$$

La primitiva pedida tiene la expresión $F(x)=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+2+\ln 3$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2=-A^{-1}$. **(1.25 puntos)**

b) Dadas las matrices

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\\ -4 & 5\end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4X+B=AC$. **(1.25 puntos)**

a) Calculamos A^2 y $-A^{-1}$ y vemos si son iguales.

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16\\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20\\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=0+15+\cancel{12}-16-\cancel{12}-0=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 3\\ 4 & -5 & 4\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -5 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

Como se observa se cumple que $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}=-A^{-1}$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^4X+B=AC\Rightarrow A^4X=AC-B\Rightarrow A^2A^2X=AC-B\Rightarrow\left(-A^{-1}\right)\left(-A^{-1}\right)X=AC-B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)X = AC - B \Rightarrow A\left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)X = AAC - AB \Rightarrow A^{-1}X = A^2C - AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}X = -A^{-1}C - AB \Rightarrow AA^{-1}X = -AA^{-1}C - AAB \Rightarrow X = -C - A^2B \Rightarrow \boxed{X = -C + A^{-1}B}$$

Sustituyo cada matriz por su valor y determino la expresión de la matriz X.

$$X = -C + A^{-1}B = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+0+4 & -1+0-5 \\ -1-12+16 & 1+0-20 \\ 1+9-12 & -1+0+15 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -19 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**
Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada rula? **(1.25 puntos)**

a) Llamamos a = número de viajes semanales en la ruta A, b = número de viajes semanales en la ruta B. c = número de viajes semanales en la ruta C.

"*Semanalmente hace un total de 70 viajes*" → $a+b+c=70$
"*El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C*" → $b=a+c$
"*El doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70*" → $2(a+c)=70$

Planteamos el sistema de ecuaciones y averiguamos si tiene solución.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=70\\ b=a+c\\ 2(a+c)=70\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=70\\ -a+b-c=0\\ a+c=\dfrac{70}{2}=35\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=70\\ -a+b-c=0\\ a \qquad +c=35\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} + \text{Ecuación 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{rrrr} -a & +b & -c & =0\\ a & +b & +c & =70\\ \hline 0 & 2b & 0 & =70\end{array}\\ \text{Nueva Ecuación 2}^{\text{a}}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{rrrr} a & & +c & =35\\ -a & -b & -c & =-70\\ \hline 0 & -b & 0 & =-35\end{array}\\ \text{Nueva Ecuación 3}^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=70\\ 2b \quad =70\\ -b \quad =-35\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=70\\ b \quad =35\\ -b \quad =-35\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} + \text{Ecuación 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{rr} -b & =35\\ b & =-35\\ \hline 0 & =0\end{array}\\ \text{Nueva Ecuación 3}^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=70\\ b \quad =35\\ 0=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a+b+c=70\\ \boxed{b=35}\end{array}\right\} \Rightarrow a+35+c=70 \Rightarrow a+c=35 \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} b=35\\ a+c=35\end{array}\right.}$$

Se pueden encontrar muchas soluciones, pero no existe una solución única.
Habrían 35 viajes en la ruta B y otros 35 entre las rutas A y C.
Podría ser una solución a = 0, b = 35 y c = 35, pero también valdría como solución a = 10, b = 35 y c = 25 y aun podríamos dar muchas soluciones más.

b) Si añadimos la condición "*el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5*" → $2c = b - 5$ y añadimos esta nueva ecuación al sistema tendremos que:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=70 \\ \boxed{b=35} \\ 2c=b-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+35+c=70 \\ 2c=35-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+c=35 \\ \boxed{c=15} \end{array}\right\} \Rightarrow a+15=35 \Rightarrow \boxed{a=20}$$

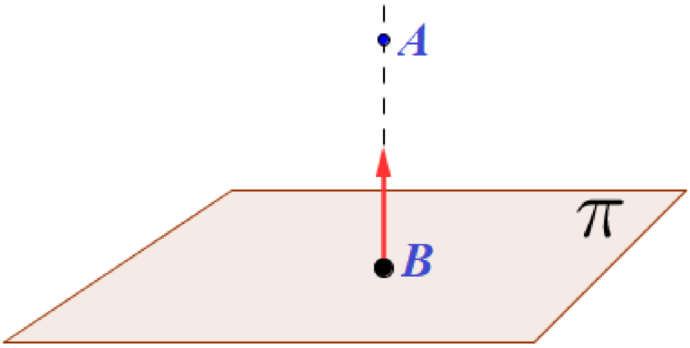
En este caso la solución si es única y vale *a = 20*, *b = 35* y *c = 15.*

La solución es 20 viajes en la ruta A, 35 en la ruta B y 15 en la ruta C.

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**
La recta perpendicular desde el punto A(1,1,0) a un cierto plano π corta a éste en el punto $B=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

a) Calcula la ecuación del plano π. **(1.5 puntos)**
b) Halla la distancia del punto *A* a su simétrico respecto a π. **(1 punto)**

a)
La situación planteada es la del dibujo.

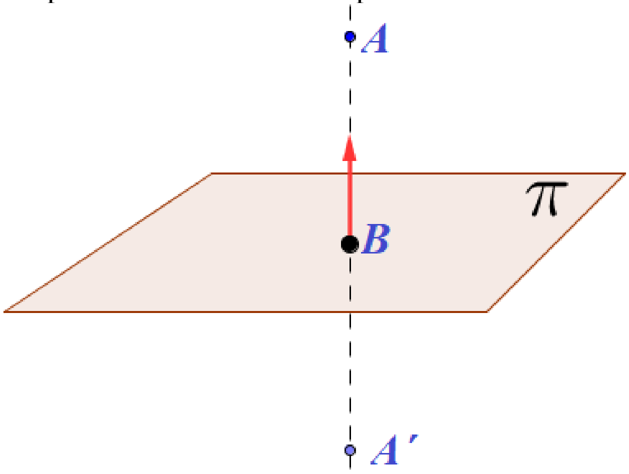


El vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano, por lo que podemos considerarlo como vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-(1,1,0)=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ B=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+D=0\\ B=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow\pi\equiv-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv-y+z=0}$$

b) Dibujamos la situación planteada. Siendo A´ al punto simétrico de A respecto del plano π.



La distancia entre A y su simétrico A´ es el doble de la distancia entre A y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}A(1,1,0)\\ \pi\equiv-y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(A,A')=2d(A,\pi)=2\frac{|-1+0|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}\,u}$$

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)
Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. **(1.25 puntos)**
b) Halla la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*. **(1.25 puntos)**

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,0,-1) \\ P_r(3,1,-3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1-\beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (-1,1,0) \\ Q_s(1,0,0) \end{cases}$$

¿Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales?

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

¿El producto mixto de $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$ es cero o distinto de cero?

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,0,0)-(3,1,-3) = (-2,-1,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1+3-2 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas *r* y *s* se cortan en un punto.

b) La recta *t* que nos piden hallar tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto C de corte de ambas rectas.

Hallamos el punto C de corte de *r* y *s*.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1-\beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3+\lambda = 1-\beta \\ 1 = \beta \\ -3-\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -2-\beta \\ \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ y = \beta = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(0,1,0)}$$

Hallamos el vector director de la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,0,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,1)$$

Hallamos la ecuación de la recta *t* con vector director $\overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}$ y que pasa por C(0, 1, 0).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_t}=(1,1,1)\\ C(0,1,0)\in t\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{t\equiv\begin{cases} x=\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=\alpha\end{cases}}$$