PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- **a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
- **b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
- **c)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- **d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ $(\text{para } x\neq 1)$ tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene pendiente 2. Calcula *a* y *b*.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}(3x-6)e^x & si\ \ x\leq 0\\ \dfrac{36\left(sen(x)-ax\right)}{x^3} & si\ \ x>0\end{cases}$$

a) Calcula *a*. **(1.5 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = –1*. **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**
b) Esboza la gráfica de *f* y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\int_0^x\left(2t+\sqrt{t}\right)dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa *x = 1*.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**
Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx+2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \\ x+3my=m+\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(2 puntos)**
b) Resuelve el sistema para *m = 0.* ¿Hay alguna solución en la que *x = 0*? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**
En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.
El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.
¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**
Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta *s* que pasa por el punto *P(1, 0, –5)*. **(1.5 puntos)**
b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta *r* con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**
La recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ y la recta *s*, que pasa por los puntos *P(1, 0, 2)* y *A(a, 1, 0)*, se cortan en un punto. Calcula el valor de *a* y el punto de corte.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ $(\text{para } x\neq 1)$ tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene pendiente 2. Calcula *a* y *b*.

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=mx+n$. Si pasa por el punto (1, 1) entonces *1= m + n.* Además, la pendiente es 2, lo que significa que *m = 2*. Por lo que *1 = 2 + n* → *n = –1*.

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=2x-1$.
Aplicamos las fórmulas que nos permiten obtener la ecuación de la asíntota oblicua a *f(x)*.

$$m=2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+bx+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+2}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=a$$

Tenemos que *a = 2*. La función queda $f(x)=\dfrac{2x^2+bx+2}{x-1}$ $(\text{para } x\neq 1)$

Seguimos averiguando el valor de *b.*

$$n=-1=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}+bx+2-\cancel{2x^2}+2x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+b)x+2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2+b)x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+b+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+b+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=2+b$$

$$-1=2+b\Rightarrow \boxed{b=-3}$$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = –3*.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)
Considera la función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}(3x-6)e^x & si \;\; x\le 0\\ \dfrac{36\left(sen(x)-ax\right)}{x^3} & si \;\; x>0\end{cases}$$

a) Calcula *a*. **(1.5 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = –1*. **(1 punto)**

a) Como la función es continua debe serlo en *x = 0* y por tanto el valor de la función y los límites laterales deben coincidir.

$$f(0)=(0-6)e^0=-6$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(3x-6)e^x=-6$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{36\left(sen(x)-ax\right)}{x^3}=\frac{36\left(sen(0)-a\cdot 0\right)}{0^3}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{36\left(\cos(x)-a\right)}{3x^2}=\frac{36\left(\cos(0)-a\right)}{3\cdot 0^2}=\frac{36(1-a)}{0}=....$$

Debe ser $a=1$ para poder seguir obteniendo indeterminación y poder obtener finalmente el valor del límite -6. De ser $a\neq 1$ el limite daría ∞ y la función no sería continua.
Consideramos a = 1 y seguimos con el razonamiento iniciado.

$$...=\frac{36(1-1)}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{36\left(-sen(x)\right)}{6x}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-36sen(x)}{6x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-36\cos(x)}{6}=-6$$

Se cumple que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-6$

La función es continua si *a = 1*.

b) En las proximidades de *x = –1* la función es $f(x)=(3x-6)e^x$.
La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = –1* es:

$$y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)\Rightarrow y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$$

Como $f(-1)=(-3-6)e^{-1}=-\dfrac{9}{e}$

Y también $f(x)=(3x-6)e^x\Rightarrow f'(x)=3e^x+(3x-6)e^x=(3+3x-6)e^x=(3x-3)e^x\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(-1)=(-3-3)e^{-1}=-\dfrac{6}{e}$ la recta tangente nos quedaría:

$$y-\left(-\frac{9}{e}\right)=-\frac{6}{e}(x+1)\Rightarrow y+\frac{9}{e}=-\frac{6}{e}x-\frac{6}{e}\Rightarrow \boxed{y=-\frac{6}{e}x-\frac{15}{e}}$$

La ecuación de la recta tangente es $y=-\dfrac{6}{e}x-\dfrac{15}{e}$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**

b) Esboza la gráfica de *f* y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=4x^3-x^4 \Rightarrow f'(x)=12x^2-4x^3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-4x^3=0 \Rightarrow 4x^2(3-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

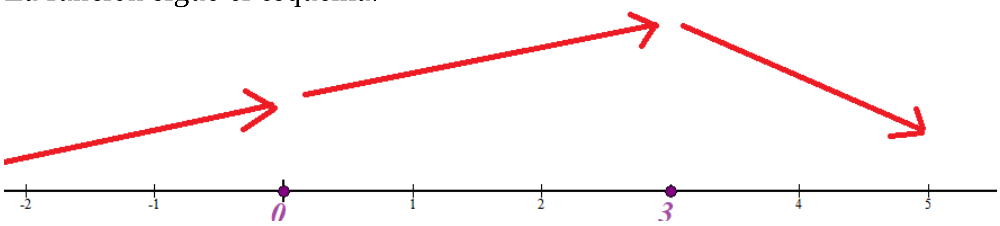
Vemos que ocurre antes, entre y después de estos valores.

En $(-\infty,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=12(-1)^2-4(-1)^3=16>0$. La función crece en $(-\infty,0)$

En $(0,3)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=12-4=8>0$. La función crece en $(0,3)$

En $(3,+\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=12\cdot 4^2-4\cdot 4^3=-64<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$

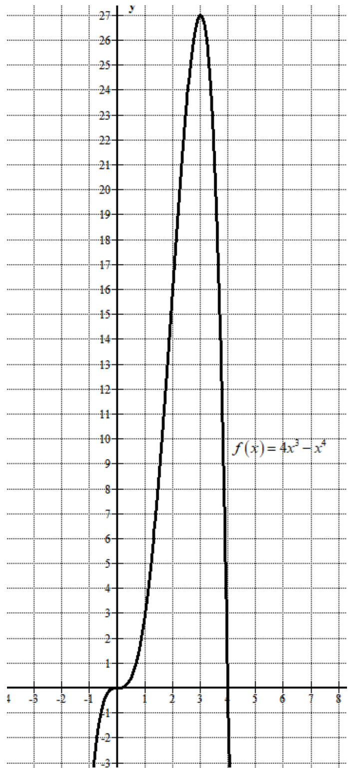
La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty,3)$ y decrece en $(3,+\infty)$.

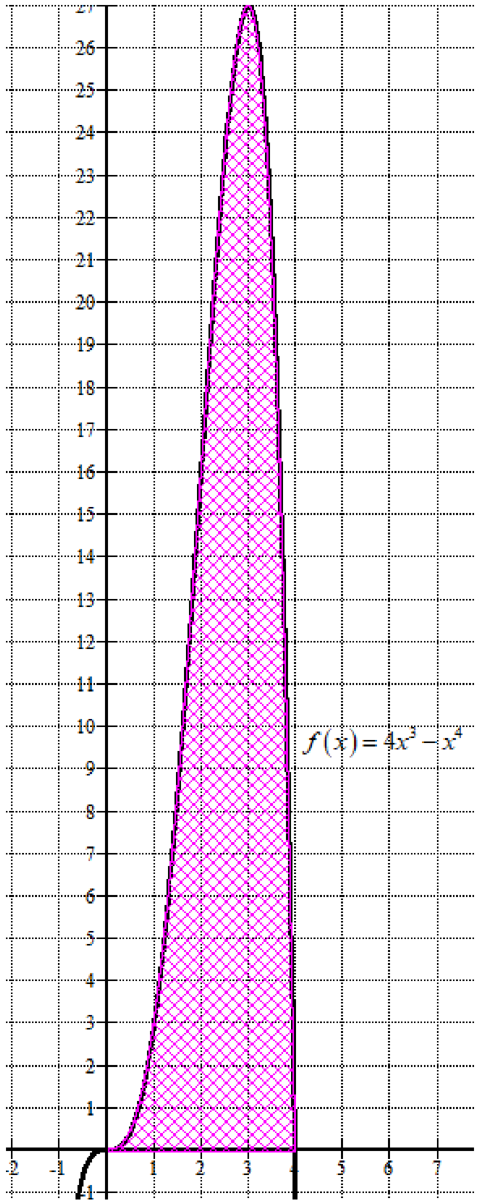
b) La función es continua, pues es polinómica. Añadimos una tabla de valores y que la función sigue el esquema anterior y por tanto tiene un máximo relativo en *x = 3*.

x	$y=4x^3-x^4$
-1	$-4-1=-5$
0	0
1	$4-1=3$
3	27
4	0



El área es grande, lo calculamos con la integral definida entre 0 y 4 de la función.

$$\acute{A}rea=\int_0^4 4x^3-x^4dx=\left[x^4-\frac{x^5}{5}\right]_o^4=\left[4^4-\frac{4^5}{5}\right]-\left[0^4-\frac{0^5}{5}\right]=\boxed{\frac{256}{5}=51.2\,u^2}$$



26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
-1
$f(x)=4x^3-x^4$

<u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Considera la función $F:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\int_0^x \left(2t+\sqrt{t}\right)dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Obtenemos la expresión de la función $F(x)$.

$$F(x)=\int_0^x \left(2t+\sqrt{t}\right)dt=\int_0^x \left(2t+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\left[t^2+\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^x=\left[t^2+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^x=\left[t^2+\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^x=$$

$$=\left[x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]-\left[0^2+\frac{2\sqrt{0^3}}{3}\right]=x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

$$F(x)=x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

Como nos piden la recta tangente a F en $x = 1$ la ecuación es $y-F(1)=F\,'(1)(x-1)$.

$$F(x)=x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Rightarrow F(1)=1^2+\frac{2\sqrt{1^3}}{3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$F(x)=x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}=x^2+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Rightarrow F\,'(x)=2x+\frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=2x+x^{\frac{1}{2}}=2x+\sqrt{x}$$

$$F\,'(1)=2+1=3$$

Sustituyendo en la ecuación queda:

$$\left.\begin{array}{l} y-F(1)=F\,'(1)(x-1) \\ F(1)=\frac{5}{3} \\ F\,'(1)=3 \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{5}{3}=3(x-1)\Rightarrow y-\frac{5}{3}=3x-3\Rightarrow \boxed{y=3x-\frac{4}{3}}$$

También se puede realizar sabiendo que si $F(x)=\int_0^x \left(2t+\sqrt{t}\right)dt$ entonces $F\,'(x)=2x+\sqrt{x}$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx+2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \\ x+3my=m+\frac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(2 puntos)**
b) Resuelve el sistema para *m = 0.* ¿Hay alguna solución en la que *x = 0*? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(0.5 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m+\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix}=4-15m-4-6m^2=-6m^2-15m$$

$$|A|=0 \Rightarrow -6m^2-15m=0 \Rightarrow -m(6m+15)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ 6m+15=0 \Rightarrow 2m+5=0 \Rightarrow m=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Estudiamos por separado 3 casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0 \text{ y } m \neq -\frac{5}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m=0$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{multiplicamos la fila 3ª por 5} \\ \text{Cambiamos fila 2ª por fila 1ª} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 1ª} \\ \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 4 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 4 & -2 & 2 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Fila 3ª} - 2 \cdot \text{Fila 2ª} \\ \begin{matrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=-\frac{5}{2}$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{multiplicamos la fila 3ª por 10} \\ \text{multiplicamos fila 1ª por 2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 10 & -75 & 0 & -21 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Fila 2ª + Fila 1ª} \\ \begin{matrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 2ª} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{Fila 3ª} + 2 \cdot \text{Fila 1ª} \\ \begin{matrix} 10 & -75 & 0 & -21 \\ -10 & 8 & -4 & 4 \\ \hline 0 & -67 & -4 & -17 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Cambio fila 3ª por fila 2ª}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Contando filas no nulas tenemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, por lo que son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $m = 0$ estamos en el caso 2 y el sistema tiene infinitas soluciones. Sustituimos y resolvemos.

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ \boxed{x = \frac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 1 \\ 2 - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 1 = z \\ -4y + 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2y - 1 = z}$$

Las soluciones son: $x = \frac{2}{5};\ y = t;\ z = -1 + 2t$

¿Hay alguna solución en la que $x = 0$?

Si nos preguntan tomando $m = 0$ la respuesta es: No, pues el valor de x es siempre igual a $\frac{2}{5}$

Si nos preguntan tomando m cualquier valor: Solo nos falta verlo en el caso 1 con $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$ y donde la solución es única. Si le añadimos $x = 0$ al sistema nos quedaría:

$$\left.\begin{array}{r} \begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my \qquad = m + \frac{2}{5} \end{cases} \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 1 \\ -4y + 2z = 0 \\ 3my \qquad = m + \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 3my \qquad = m + \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{¡}IMPOSIBLE\text{!}$$

En cualquier caso no existe ninguna solución con $x = 0$.

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Llamamos x = número de botellas producidas por hora, y = número de garrafas, z = número de bidones.

"*Se utiliza como materia prima 10000 gramos de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1000 gramos para cada bidón*" → $50x+100y+1000z=10000$

"*Se debe producir el doble de botellas que de garrafas*" → $x=2y$

"*Se producen en total 52 productos cada hora*" → $x+y+z=52$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l}50x+100y+1000z=10000\\x=2y\\x+y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y+20z=200\\x=2y\\x+y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2y+2y+20z=200\\2y+y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4y+20z=200\\3y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y+5z=50\\3y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=50-5z\\3y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow 3(50-5z)+z=52\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 150-15z+z=52\Rightarrow -14z=-98\Rightarrow \boxed{z=\frac{98}{14}=7}\Rightarrow \boxed{y=50-35=15}\Rightarrow \boxed{x=30}$$

Se producen cada hora 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta *s* que pasa por el punto *P(1, 0, –5)*. **(1.5 puntos)**

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta *r* con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$. **(1 punto)**

a) Si el plano π es perpendicular a la recta entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(-2,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{v_s}=(-2,1,2) \\ P(1,0,-5)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x+y+2z+D=0 \\ P(1,0,-5)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -2+0-10+D=0 \Rightarrow D=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -2x+y+2z+12=0}$$

b) El seno del ángulo que forma la recta *r* con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$ es el coseno del ángulo que forma el vector director de la recta y el vector normal del plano.
Este coseno lo puedo calcular usando el producto escalar de dichos vectores.

Hallamos primero el vector director de la recta *r* como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(2,-3,1)\times(-3,2,2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-8i-7j-5k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(-8,-7,-5)$$

Tomamos como vector director de la recta *r* el mismo vector con las coordenadas positivas: $\overrightarrow{u_r}=(8,7,5)$

$$\pi \equiv -2x+y+2z=0 \Rightarrow \vec{n}=(-2,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(8,7,5) \\ \vec{n}=(-2,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow sen(r,\pi)=\cos\left(\overrightarrow{u_r},\vec{n}\right)=\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{(8,7,5)(-2,1,2)}{\sqrt{8^2+7^2+5^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}$$

$$\boxed{sen(r,\pi)=\frac{-16+7+10}{\sqrt{138}\sqrt{9}}=\frac{1}{3\sqrt{138}}}$$

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta *s*, que pasa por los puntos *P(1, 0, 2)* y *A(a, 1, 0)*, se cortan en un punto. Calcula el valor de *a* y el punto de corte.

Hallamos un vector director y un punto de la recta *r*.

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(-3,-4,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,2,3) \end{cases}$$

Hallamos un punto y un vector director de la recta *s*.

$$\left.\begin{matrix} P(1,0,2) \in s \\ A(a,1,0) \in s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(1,0,2) \in s \\ \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AP} = (1,0,2)-(a,1,0) = (1-a,-1,2) \end{matrix}\right\}$$

Si las rectas son secantes entonces el producto mixto de los vectores directores de las rectas y el vector que une un punto de *r* con otro punto de *s* debe ser nulo.

$$\left.\begin{matrix} r \equiv \begin{cases} P_r(-3,-4,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,2,3) \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} P_s(1,0,2) \in s \\ \overrightarrow{v_s} = (1-a,-1,2) \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,2,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (1-a,-1,2) \\ \overrightarrow{P_sP_r} = (-3,-4,3)-(1,0,2) = (-4,-4,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_sP_r}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1-a & -1 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2-16-12+12a-12-2+2a+16 = 0 \Rightarrow 14a-28 = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

El valor buscado es *a = 2*.

Comprobamos que para este valor las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$a = 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,2,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,-1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-1} = \frac{2}{-1} \neq \frac{3}{2}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

El punto de corte lo averiguamos resolviendo el sistema formado por ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=-4+2\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \left.\begin{array}{l} P(1,0,2)\in s \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=-t \\ z=2+2t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -3+2\lambda=1-t \\ -4+2\lambda=-t \\ 3+3\lambda=2+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+2\lambda=-t \\ 4-2\lambda=t \\ 1+3\lambda=2t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+3\lambda=2(4-2\lambda) \Rightarrow 1+3\lambda=8-4\lambda \Rightarrow 7\lambda=7 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-3+2=-1 \\ y=-4+2=-2 \\ z=3+3=6 \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es $P(-1,-2,6)$