PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua *f* definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x<-1 \\ ax+b & si \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<0 \\ (x-2)^2 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x\neq 1$. Halla una primitiva de *f* que pase por el punto (2, 6).

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1,75 puntos)**
b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para que valores de *m* tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**
b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto A(−4, 4, 7).

a) Calcula *a* y *b* para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**
b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)
Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ así como la recta *s* determinada por el punto P(1, 2, 3) y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

a) Calcula *a* para que las rectas *r* y *s* se corten. **(1,5 puntos)**
b) Calcula *a* para que las rectas *r* y *s* sean perpendiculares. **(1 punto)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua *f* definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x<-1 \\ ax+b & si \quad -1\leq x<1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1,5 puntos)**

a) Continua en *x = –1*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} ax+b=-a+b \\ f(-1)=-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b=-1$$

Continua en *x = 1*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2} \\ f(1)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2}$$

Junto las dos ecuaciones y resuelvo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -a+b=-1 \\ a+b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+b=-1 \\ b=\dfrac{1}{2}-a \end{array}\right\} \Rightarrow -a+\dfrac{1}{2}-a=-1 \Rightarrow -2a=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{3}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}}$$

b)

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene. Pues su dominio es $\mathbb{R}$.

x = 0 y *x = –1* anulan los denominadores, pero las funciones no están definidas en dichos valores.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Una asíntota horizontal en –∞ es *y = 0*.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal en +∞.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

En –∞ no hay pues existe horizontal.

Hacemos el estudio en +∞

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1$$

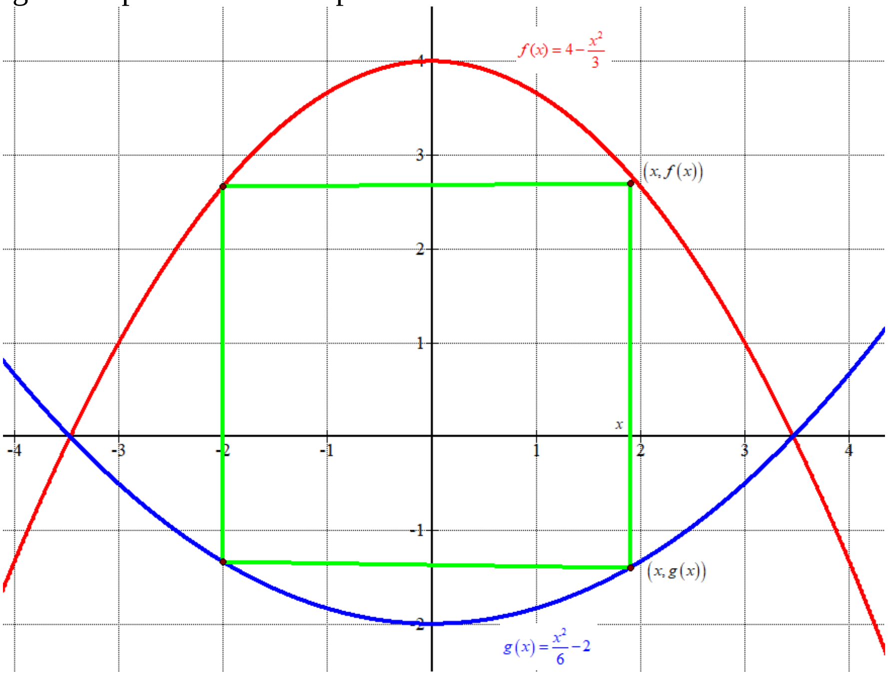
$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cancel{x^2 - x^2} - x}{x+1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

En +∞ la asíntota oblicua tiene ecuación $y = x - 1$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=4-\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=\frac{x^2}{6}-2$.

Dibujamos las gráficas para entender lo planteado.



Averiguamos donde se cortan las gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 4-\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{6}-2\Rightarrow 24-2x^2=x^2-12\Rightarrow -3x^2=-36\Rightarrow x^2=12\Rightarrow x=\pm\sqrt{12}$$

Por la simetría de las funciones podemos decir que la base del rectángulo es variable dependiendo de la coordenada *x* del punto de la gráfica elegido (2*x*) estando *x* comprendida entre 0 y $\sqrt{12}$.

Y la altura del rectángulo es la suma de los valores absolutos de las funciones o simplemente el valor positivo (*f(x)*) menos el valor negativo (*g*(*x*)).

$$Altura=f(x)-g(x)=4-\frac{x^2}{3}-\left(\frac{x^2}{6}-2\right)=4-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{6}+2=6-\frac{3x^2}{6}=6-\frac{x^2}{2}$$

Y como el área del rectángulo es el producto de la base por la altura:

$$A(x)=2x\left(6-\frac{x^2}{2}\right)=12x-x^3$$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de un máximo.

$$A(x)=12x-x^3\Rightarrow A'(x)=12-3x^2$$

$$A'(x)=0\Rightarrow 12-3x^2=0\Rightarrow -3x^2=-12\Rightarrow x^2=\frac{-12}{-3}=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=2$$

Como $A''(x)=-6x\Rightarrow A''(2)=-12<0$

La función presenta un máximo relativo en *x = 2.*

Las dimensiones del rectángulo son 2 · 2 = 4 de base y altura $6-\frac{2^2}{2}=6-2=4$. Es un cuadrado de lado 4.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<0 \\ (x-2)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

a) Igualamos a cero la función.

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \quad (si \quad x<0) \\ (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 (\ si \quad x\geq 0) \end{cases}$$

La gráfica corta el eje de abscisas en (–2, 0) y (2, 0).

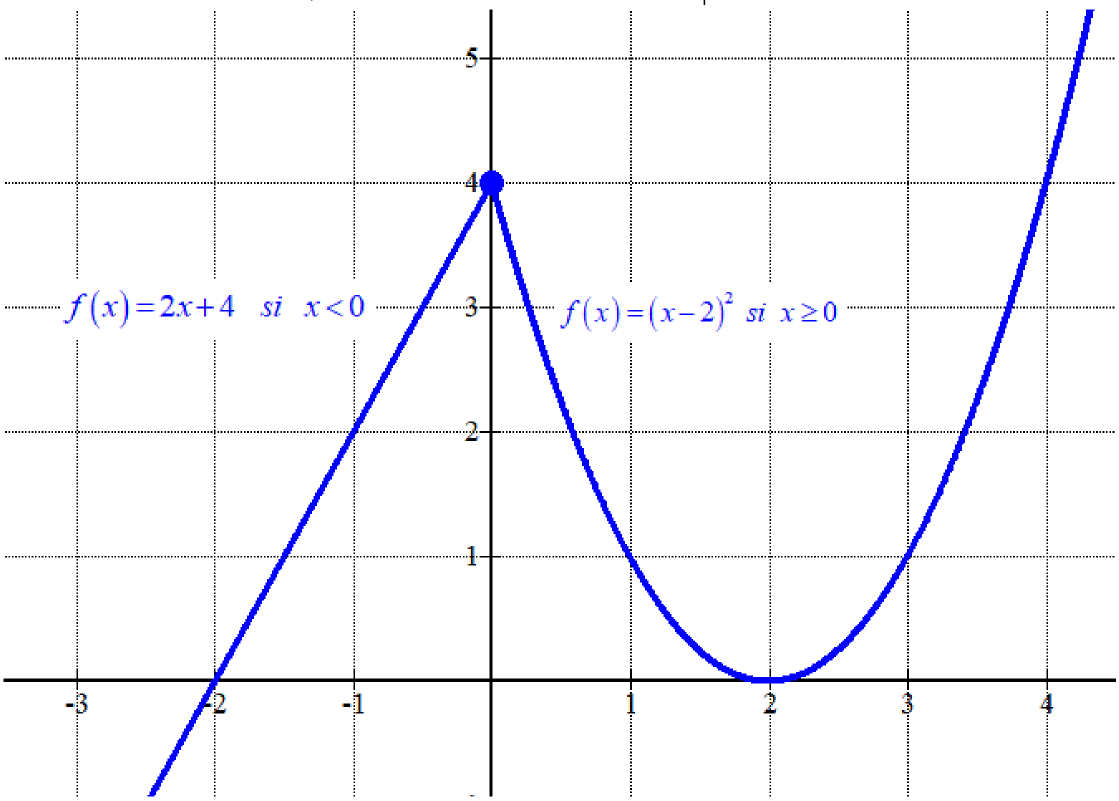
La gráfica es un trozo de recta y un trozo de parábola. Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

$f(x)=2x+4 \quad si \quad x<0$

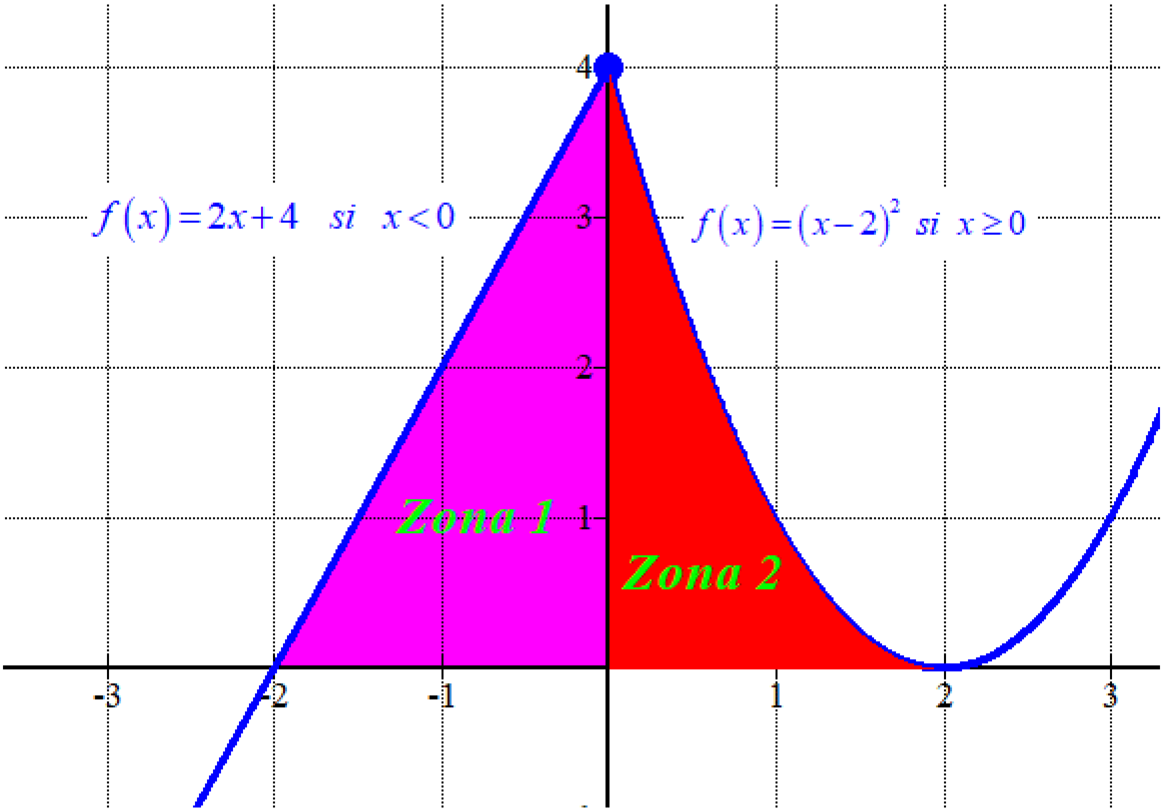
x	$y=2x+4$
-3	-2
-2	0
-1	2
0	4 No incluido

$f(x)=(x-2)^2 \quad si \quad x\geq 0$

x	$y=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1



b) Nos piden hallar el área del recinto coloreado de rosa y rojo.



Contando cuadraditos el área está entre 6 y 7 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto con el cálculo integral.

$$Área\,1=\int_{-2}^{0}2x+4dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}=\left[0^2+4\cdot 0\right]-\left[(-2)^2+4(-2)\right]=0-(4-8)=4u^2$$

$$Área\,2=\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx=\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{(2-2)^3}{3}-\frac{(0-2)^3}{3}=0-\frac{-8}{3}=\frac{8}{3}u^2$$

$$\boxed{Área\,total=Área\,1+Área\,2=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}\simeq 6.66u^2}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x\neq 1$. Halla una primitiva de *f* que pase por el punto (2, 6).

$$F(x)=\int\frac{x^3}{x^2-2x+1}dx=\boxed{\begin{array}{rrrrl} x^3 & & & & \underline{|x^2-2x+1} \\ \underline{-x^3} & \underline{+2x^2} & \underline{-x} & & \quad x+2 \\ & +2x^2 & -x & & \\ & \underline{-2x^2} & \underline{+4x} & \underline{-2} & \\ & & 3x & -2 & \end{array}}=\int x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=$$

$$=\int x+2dx+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=\ldots$$

$$x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=1 \quad \text{raiz doble}$$

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=\frac{3x-2}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2=Ax-A+B\Rightarrow\begin{cases}A=3\\-2=-A+B\end{cases}\Rightarrow -2=-3+B\Rightarrow B=1$$

$$\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=3\ln|x-1|+\int(x-1)^{-2}dx=$$

$$=3\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}$$

$$\ldots=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+K$$

La primitiva de *f(x)* es $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+K$

Como pasa por el punto (2, 6) debe cumplirse *F(2) = 6.*

$$F(2)=6=\frac{2^2}{2}+2\cdot 2+3\ln|2-1|-\frac{1}{2-1}+K\Rightarrow 2+4+0-1+K=6\Rightarrow\boxed{K=1}$$

La primitiva de *f(x)* que pasa por el punto (2, 6) es $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+1$

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**
Considera el sistema:

$$\begin{cases} x-y+mz=-3 \\ -mx+3y-z=1 \\ x-4y+mz=-6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1,75 puntos)**
b) Para *m* = *2* resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$ y la ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix}=3m+1+4m^2-3m-m^2-4=3m^2-3$$

$$|A|=0\Rightarrow 3m^2-3=0\Rightarrow 3m^2=3\Rightarrow m^2=1\Rightarrow \boxed{m=\sqrt{1}=\pm 1}$$

CASO 1. $m\neq 1$ y $m\neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\ 2^a + Fila\ 1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 2 & 0 & -2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\ 3^a - Fila\ 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ \hline 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot Fila\ 3^a + 3 \cdot Fila\ 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $m=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\ 2^a - Fila\ 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\ 3^a - Fila\ 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & -4 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot Fila\ 3^a + 3 \cdot Fila\ 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -12 & 0 & -12 \\ 0 & 12 & 0 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para *m* = *2* el sistema es compatible determinado. Utilizamos el método de Gauss para encontrar su solución.

$$\begin{cases} x-y+2z=-3 \\ -2x+3y-z=1 \\ x-4y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{ccccc} -2x & +3y & -z & = & 1 \\ 2x & -2y & +4z & = & -6 \\ \hline 0 & y & +3z & = & -5 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{ccccc} x & -4y & +2z & = & -6 \\ -x & +y & -2z & = & 3 \\ \hline 0 & -3y & & = & -3 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-3 \\ y+3z=-5 \\ -3y \quad =-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-3 \\ y+3z=-5 \\ \boxed{y \quad =1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1+2z=-3 \\ 1+3z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=-2 \\ 3z=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=-2 \\ \boxed{z=-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2(-2)=-2 \Rightarrow x-4=-2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

La solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = -2$.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de *m* tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**

b) Para *m = 4* resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX=12I$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sqrt{m}\sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común } \sqrt{m} \\ \text{en columna 1}^{a}\end{matrix}\right\}=\sqrt{m}\begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común } \sqrt{m} \\ \text{en fila 1}^{a}\end{matrix}\right\}=\sqrt{m}\sqrt{m}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=$$

$$=m\left(m^2+1+1-m-m-1\right)=m\left(m^2-2m+1\right)$$

$$|A|=0 \Rightarrow m\left(m^2-2m+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m^2-2m+1=0 \Rightarrow \boxed{m=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=1} \end{cases}$$

La inversa de la matriz A existe para cualquier valor de *m* distinto de 0 y 1.

b) Para *m = 4* existe la inversa de A.
Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX=12I \Rightarrow X=12A^{-1}I=12A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=64+4+4-16-16-4=36$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&1\\2&1&4\end{pmatrix}}{36}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&1\\1&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&4\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}}$$

Terminamos de resolver la ecuación matricial.

$$X=12A^{-1}=12\frac{1}{36}\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&4\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, así como el punto A(−4, 4, 7).

a) Calcula *a* y *b* para que el vector $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

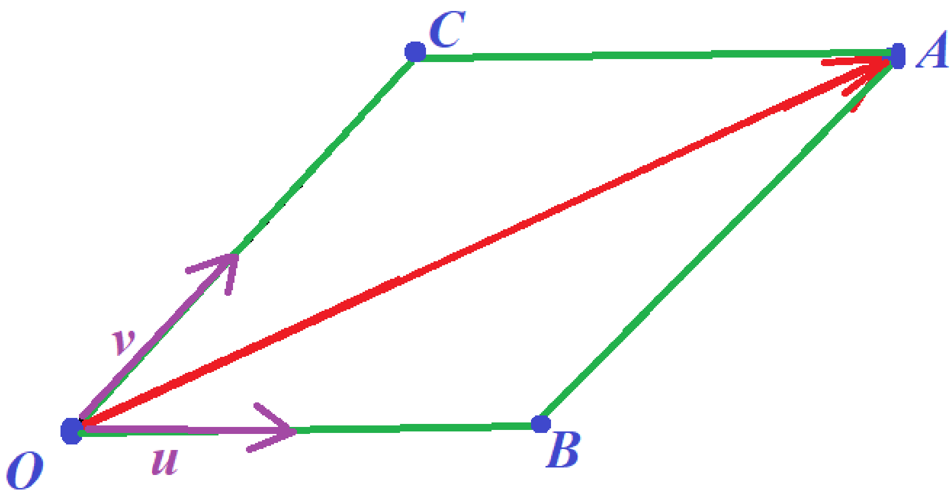
b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

a) Para que $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$ el producto escalar debe ser cero.

$$\vec{w}\cdot\vec{v}=(1,a,b)(2,0,-1)=0 \Rightarrow 2-b=0 \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow \vec{w}=(1,a,2)$$

$$\vec{w}\cdot\vec{u}=(1,a,2)(-1,2,3)=0 \Rightarrow -1+2a+6=0 \Rightarrow 2a=-5 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-5}{2}=-2.5}$$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Tenemos que hallar los puntos B y C tales que se forme un paralelogramo.

Como los puntos B y C están en la dirección de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u}=(-1,2,3) \Rightarrow B=a(-1,2,3)=(-a,2a,3a)$$
$$\vec{v}=(2,0,-1) \Rightarrow C=b(2,0,-1)=(2b,0,-b)$$

Como es un paralelogramo $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow (2b,0,-b)=(-4,4,7)-(-a,2a,3a)=(-4+a,4-2a,7-3a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b=-4+a \\ 0=4-2a \\ -b=7-3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=-4+a \\ 2a=4 \\ -b=7-3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=-4+a \\ \boxed{a=2} \\ -b=7-3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=-4+2 \\ -b=7-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=-2 \\ -b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{-2}{2}=-1 \\ \boxed{b=-1} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow (-a, 2a, 3a) = (-4, 4, 7) - (2b, 0, -b)$$ Igual que el anterior.

Sustituyendo en las coordenadas de los vértices:

$$\begin{array}{l} B = (-a, 2a, 3a) = (-2, 4, 6) \\ C = (2b, 0, -b) = (-2, 0, 1) \end{array}.$$

Los cuatro vértices del paralelogramo son *O(0, 0, 0); A(–4, 4, 7); B(–2, 4, 6)* y *C(–2, 0, 1)*.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto P(1, 2, 3) y el vector director $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

a)

$$r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow r:\begin{cases} Q_r(2,0,1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} P(1,2,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(1+a,-a,3a) \end{cases}$$

Para que las rectas se corten deben pertenecer al mismo plano. Para ello el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{Q_rP}$ debe ser nulo.

$$\overrightarrow{Q_rP}=(1,2,3)-(2,0,1)=(-1,2,2)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{Q_rP}\right]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-\cancel{2a}+3a+4+4a-2a+2+\cancel{2a}-6a=-a+6$$

$$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{Q_rP}\right]=0 \Rightarrow -a+6=0 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

Comprobamos que para $a = 6$ también se cumple que los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y por tanto las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ a=6 \rightarrow \overrightarrow{v_s}=(7,-6,18) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{7} \neq \frac{-1}{-6}=\frac{2}{18}$$

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores debe ser nulo. Pueden estar en distinto plano pero sus direcciones son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1+a,-a,3a) \\ \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{v_s} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \Rightarrow (1,-1,2)(1+a,-a,3a)=0 \Rightarrow 1+a+a+6a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+8a=0 \Rightarrow 8a=-1 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{8}}$$