PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque.**

e) **En caso de responder a dos ejercicios de un bloque solo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**

f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE 1. FUNCIONES

Escoge sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-b}$, para $x \neq b$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (1, –2) y tenga a la recta $y=x+4$ como asíntota oblicua.

b) **[1 punto]** En el caso $a = 5$ y $b = 4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$.

BLOQUE 2. INTEGRALES

Escoge sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sabiendo que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de f.

a) **[1,25 puntos]** Comprueba que f es creciente.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$. Calcula, si es posible, una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (0, 5). Sugerencia: haz el cambio $t=\sqrt{x}$

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE 3. ÁLGEBRA Escoge sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,75 puntos]** Calcula A^{10}.

b) **[1,75 puntos]** Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I+A+A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define la matriz $M=A+(\lambda-1)B$.

a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.

b) **[1 punto]** Para $\lambda=-1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.

BLOQUE 4. GEOMETRÍA Escoge sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r\equiv\begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S.

a) **[1 punto]** Halla las coordenadas del punto S.

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)
Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

Llamamos x e y a los números que buscamos.
Su suma debe ser 1 → $x+y=1$.
El producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

$$f(x,y)=y\sqrt{x};\ 0\leq x,y\leq 1$$

Despejamos "y" en la primera ecuación y sustituimos en la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=y\sqrt{x} \\ x+y=1\rightarrow y=1-x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=(1-x)\sqrt{x}=\sqrt{x}-x\sqrt{x}=\sqrt{x}-\sqrt{x^3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^3}=\sqrt{x}-x^{3/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2}x^{3/2-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}=0\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}\Rightarrow 2=6\left(\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 2=6x\Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$$

Comprobamos si es máximo estudiando la evolución de la función.

En el intervalo $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale $f'(0.1)=\frac{1}{2\sqrt{0.1}}-\frac{3\sqrt{0.1}}{2}=\frac{7\sqrt{10}}{20}>0$.
La función crece en el intervalo $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.
En el intervalo $\left(\frac{1}{3},1\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{1}{2\sqrt{0.5}}-\frac{3\sqrt{0.5}}{2}=\frac{-\sqrt{2}}{4}<0$.
La función decrece en el intervalo $\left(\frac{1}{3},1\right)$.
Como la función crece antes de $x=\frac{1}{3}$ y decrece después de este valor la función presenta un valor máximo en $x=\frac{1}{3}$.

Para $x=\frac{1}{3}$ tenemos que $y=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
Los números buscados son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-b}$, para $x\neq b$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (1, –2) y tenga a la recta $y=x+4$ como asíntota oblicua.

b) **[1 punto]** En el caso $a = 5$ y $b = 4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$.

a) Para que la gráfica de f pase por el punto (1, –2) debe cumplirse que $f(1)=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-b} \\ f(1)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1^2+a}{1-b}=-2 \Rightarrow 1+a=-2+2b \Rightarrow \boxed{a=-3+2b}$$

Para que la función tenga a la recta $y=x+4$ como asíntota oblicua debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=4$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+a}{x-b}}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+a}{x^2-bx}=1 \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=4 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+a}{x-b}-x=4 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+a-\cancel{x^2}+bx}{x-b}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{a+bx}{x-b}=4 \Rightarrow \frac{b}{1}=4 \Rightarrow b=4 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y obtenemos el valor de a.

$$a=-3+2(4)=-3+8=5$$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = 4$.

b) Para $a = 5$ y $b = 4$ la función queda $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-4}$, para $x\neq 4$.

La recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y-f(0)=\dfrac{-1}{f'(0)}(x-0)$.

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x-4} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+5}{0-4}=\frac{-5}{4}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-4)-1(x^2+5)}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-8x-x^2-5}{(x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-8x-5}{(x-4)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{0^2-8\cdot 0-5}{(0-4)^2}=\frac{-5}{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{-5}{4} \\ f'(0)=\dfrac{-5}{16} \\ y-f(0)=\dfrac{-1}{f'(0)}(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{-5}{4}=\frac{-1}{\frac{-5}{16}}x\Rightarrow y+\frac{5}{4}=\frac{16}{5}x\Rightarrow \boxed{y=\frac{16}{5}x-\frac{5}{4}}$$

La recta normal a la gráfica de *f* que pasa por el punto de abscisa *x = 0* tiene ecuación $y=\frac{16}{5}x-\frac{5}{4}$.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Sabiendo que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de *f*.

a) **[1,25 puntos]** Comprueba que *f* es creciente.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función *f*, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

a) Al ser *F(x)* una primitiva de la función *f* tenemos que $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=F'(x)=2xe^{x^2}$$

Hallamos la derivada de la función *f(x)*, la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=2e^{x^2}+2x\cdot 2xe^{x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\left(2+4x^2\right)e^{x^2}=0\Rightarrow 2+4x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{-2}{4}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{-2}{4}}=\text{¡Imposible!}$$

La función no presenta puntos críticos y siempre es creciente o decreciente.
Comprobamos el signo de la derivada en un punto cualquiera, por ejemplo, en $x = 0$.

$$f'(x)=\left(2+4x^2\right)e^{x^2}\Rightarrow f'(0)=\left(2+4\cdot 0^2\right)e^{0^2}=2>0$$

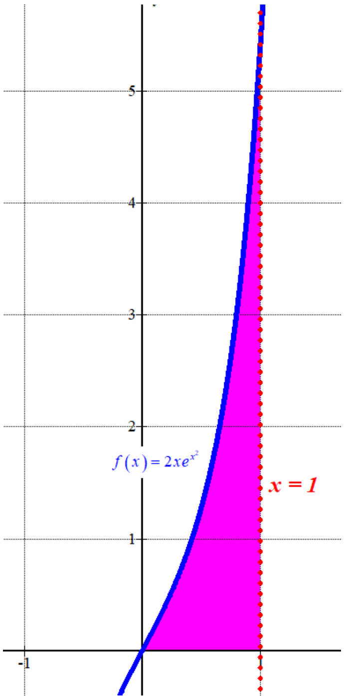
La función es creciente en $x = 0$ y ,por tanto, es creciente en cualquier valor real.

b) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2xe^{x^2} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 2xe^{x^2}=0\Rightarrow \boxed{x=0}$$

El área pedida es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$Área=\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=e^{1^2}-e^{0^2}=\boxed{e-1\simeq 1.72\ u^2}$$



<u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Considera la función $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$. Calcula, si es posible, una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0, 5). Sugerencia: haz el cambio $t=\sqrt{x}$

$$F(x)=\int\cos\left(\sqrt{x}\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\rightarrow x=t^2\rightarrow dx=2tdt\end{array}\right\}=$$

$$=\int 2t\cos(t)\,dt=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ 2t=u\rightarrow du=2dt\\ \cos(t)\,dt=dv\rightarrow v=\int\cos(t)\,dt=sen(t)\end{array}\right\}=$$

$$=2tsen(t)-\int 2sen(t)\,dt=2tsen(t)+2\cos(t)=\left\{\sqrt{x}=t\right\}=$$

$$=2\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$$

Las primitivas de la función $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$ son $F(x)=2\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$.

Como la primitiva debe pasar por el punto (0, 5) debe cumplirse que *F(0) = 5*.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=2\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C\\ F(0)=5\end{array}\right\}\Rightarrow F(0)=2\sqrt{0}sen\left(\sqrt{0}\right)+2\cos\left(\sqrt{0}\right)+C=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+C=5\Rightarrow C=3\Rightarrow\boxed{F(x)=2\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+3}$$

La primitiva buscada es $F(x)=2\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+3$.

<u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[0,75 puntos]** Calcula A^{10}.

b) **[1,75 puntos]** Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I+A+A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{10}=A^3A^3A^3A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Calculamos la expresión de $I+A+A^2$.

$$I+A+A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a & -b+ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobamos si esta matriz tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$\left|I+A+A^2\right|=\begin{vmatrix}1 & a & -b+ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

La matriz tiene inversa. La calculamos.

$$\left(I+A+A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(I+A+A^2\right)^t}{\left|I+A+A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ -b+ab & b & 1\end{pmatrix}}{1}=$$

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 0 \\ -b+ab & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & 1 \\ -b+ab & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b+ab & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b+ab & b \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab+b-ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, se define la matriz $M=A+(\lambda-1)B$.

a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
b) **[1 punto]** Para $\lambda=-1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.

a) Hallamos la expresión de la matriz M.

$$M=A+(\lambda-1)B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+(\lambda-1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\lambda-1\\0&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}1&1&\lambda-1\\1&\lambda-1&1\\\lambda-1&1&1\end{pmatrix}$$

Para que la matriz M tenga rango menor que 3 su determinante debe ser nulo.

$$|M|=\begin{vmatrix}1&1&\lambda-1\\1&\lambda-1&1\\\lambda-1&1&1\end{vmatrix}=\lambda-1+\lambda-1+\lambda-1-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)-1-1$$

$$|M|=3\lambda-5-(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-1)=3\lambda-5-(\lambda^3-\lambda^2-2\lambda^2+2\lambda+\lambda-1)=$$

$$=3\lambda-5-(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1)=\cancel{3\lambda}-5-\lambda^3+3\lambda^2-\cancel{3\lambda}+1=-\lambda^3+3\lambda^2-4$$

$$|M|=0\Rightarrow -\lambda^3+3\lambda^2-4=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & 0 & -4\\ -1 & & 1 & -4 & 4\\ \hline & -1 & 4 & -4 & \lfloor 0\end{array}\Rightarrow -\lambda^3+3\lambda^2-4=(\lambda+1)(-\lambda^2+4\lambda-4)$$

$$-\lambda^2+4\lambda-4=0\Rightarrow\lambda=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(-4)}}{2(-1)}=\frac{-4\pm0}{-2}=2$$

Para $\lambda=-1$ y $\lambda=2$ el determinante de M se anula.
Para $\lambda=-1$ y $\lambda=2$ el rango de M es menor que 3.

b) Para $\lambda=-1$ la matriz queda $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. La matriz M tiene rango menor que 3, por lo que el sistema no puede ser compatible determinado.
Como todo sistema lineal homogéneo tiene solución el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones).

El sistema queda: $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=0\\ x-2y+z=0\\ -2x+y+z=0\end{array}\right\}$. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=0\\ x-2y+z=0\\ -2x+y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=-y+2z\\ x-2y+z=0\\ -2x+y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+2z-2y+z=0\\ -2(-y+2z)+y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3y+3z=0\\ 2y-4z+y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+z=0\\ 3y-3z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+z=0\\ y-z=0\end{array}\right\}\Rightarrow y-z=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=z\Rightarrow x=-z+2z=z\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda\\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x=y=z$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$$

Halla los puntos de *r* cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

Hallamos la ecuación del plano **π**.

$$\left.\begin{array}{l} A(-1,0,0)\in\pi \\ B(0,1,1)\in\pi \\ C(2,1,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(-1,0,0)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0,1,1)-(-1,0,0)=(1,1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,1,0)-(-1,0,0)=(3,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0+3y+z-3z-0-x-1=0 \Rightarrow -x+3y-2z-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-3y+2z+1=0}$$

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z+3 \\ y=z+2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+\lambda \ ;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto *P* de la recta *r* tiene coordenadas $P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$.
Hallamos la distancia de *P* al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} P(3+2\lambda,2+\lambda,\lambda) \\ \pi \equiv x-3y+2z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|3+2\lambda-3(2+\lambda)+2\lambda+1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{|3+2\lambda-6-3\lambda+2\lambda+1|}{\sqrt{14}} = \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{14}}$$

Igualamos esta distancia a $\sqrt{14}$ y hallamos el valor de λ.

$$d(P,\pi) = \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |\lambda-2| = 14 \Rightarrow \begin{cases} \lambda-2=14 \to \lambda=16 \\ \lambda-2=-14 \to \lambda=-12 \end{cases}$$

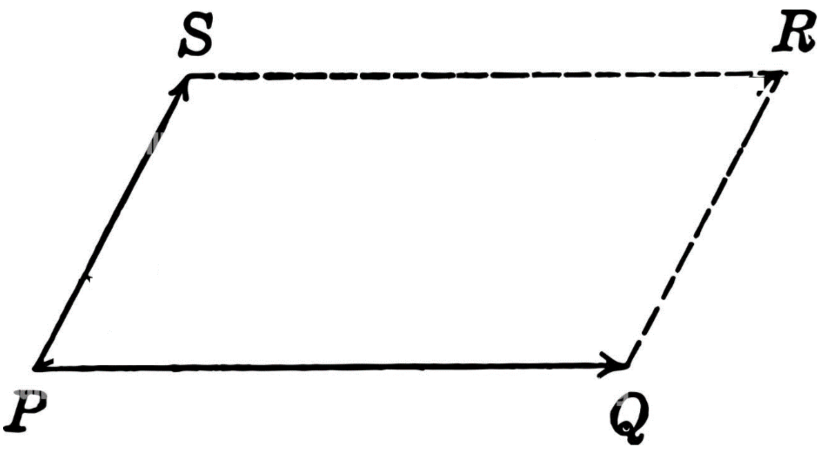
$$Si\ \lambda=16 \Rightarrow P(3+32,2+16,16) \Rightarrow \boxed{P(35,18,16)}$$

$$Si\ \lambda=-12 \Rightarrow P'(3-24,2-12,-12) \Rightarrow \boxed{P'(-21,-10,-12)}$$

Los dos puntos de la recta *r* que están a una distancia $\sqrt{14}$ unidades del plano π son $P(35,18,16)$ y $P'(-21,-10,-12)$.

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**
Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos
$P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S.
a) **[1 punto]** Halla las coordenadas del punto S.
b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R.

a) El paralelogramo PQRS debe cumplir que $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ y $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$.



$$\left.\begin{array}{l} P(-1,2,3) \\ Q(-2,1,0) \\ R(0,5,1) \\ S(x,y,z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(-2,1,0)-(-1,2,3)=(-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{SR}=(0,5,1)-(x,y,z)=(-x,5-y,1-z) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{SR}=(-x,5-y,1-z) \\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR} \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,-1,-3)=(-x,5-y,1-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1=-x \\ -1=5-y \Rightarrow \\ -3=1-z \end{cases} \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=6 \\ z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S(1,6,4)}$$

Comprobamos que se cumple $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PS}=(1,6,4)-(-1,2,3)=(2,4,1) \\ \overrightarrow{QR}=(0,5,1)-(-2,1,0)=(2,4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}=(2,4,1)$$

El punto S tiene coordenadas $S(1,6,4)$.

b) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos P, Q y R.

$$\left.\begin{array}{l} P(-1,2,3)\in\pi \\ Q(-2,1,0)\in\pi \\ R(0,5,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(-1,2,3)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-1,-1,-3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{QR}=(2,4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-1-6(y-2)-4(z-3)+2(z-3)+y-2+12(x+1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-1-6y+12-4z+12+2z-6+y-2+12x+12=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 11x-5y-2z+27=0}$$

Si la recta s es perpendicular al plano $\pi\equiv 11x-5y-2z+27=0$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n}=(11,-5,-2)$.

Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y es perpendicular al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} (0,0,0)\in s \\ \vec{v_s}=\vec{n}=(11,-5,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s\equiv\begin{cases} x=11\lambda \\ y=-5\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-2\lambda \end{cases}}$$