Corrección EBAU

MAT CCSS II

(Andalucía 2024)

@ProfeFranValle

Importante: Las puntuaciones en verde son solo orientativas, no tienen por qué ser así de manera oficial.

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
- c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$ siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de $30000\ m^3$ de agua, de $5500\ kg$ de abono y de $3000\ kg$ de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita $1500\ m^3$ de agua, $110\ kg$ de abono y $80\ kg$ de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de $100\ kg$ de abono y $50\ kg$ de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de $5000\ kg$ en secano y de $10000\ kg$ en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \qquad\qquad g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \ \ 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \ \ 10 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Compruebe que la función v es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y $140\ km/h$, y rojo para vientos de más de $140\ km/h$. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42% de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32% de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65% de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75% de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20% de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

@ProfeFranValla

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ a-3 & a-1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\end{pmatrix},$$ siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) **(1.25 puntos)** Para $a=1$, resuelva la ecuación $X\cdot A-B=C\cdot A$.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B$$

a) ¿Valores de $a\in\mathbb{R}$ para que A tenga inversa?

A tiene inversa $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$

Calculamos $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ a-3 & a-1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{vmatrix}=a\cdot(a-1)-4\cdot(a-3)-\left(a\cdot(a-3)+2\right)=$$

$$=\cancel{a^2}-a-4a+12-\cancel{a^2}+3a-2=-2a+10=0\Rightarrow \boxed{a=5}$$ **+0'5**

Por tanto, A tiene inversa para los valores $a\neq 5$. **+0'25**

b) Para $a=1$, resolvamos $X\cdot A-B=C\cdot A$ **+0'5**

$$X\cdot A=C\cdot A-B\Rightarrow X=(C\cdot A+B)\cdot A^{-1}=C\cdot A\cdot A^{-1}+B\cdot A^{-1}=\boxed{C+B\cdot A^{-1}}$$

Sabemos que $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot[\mathrm{adj}(A)]^t$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=8$

Calculemos $\mathrm{adj}(A)$:

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix}a_{11} & -a_{12} & a_{13}\\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23}\\ a_{31} & -a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$ donde:

$a_{11}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2$ $\quad a_{12}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$ $\quad a_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$

$a_{21}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$ $\quad a_{22}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ $\quad a_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$

$a_{31}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ $\quad a_{32}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3$ $\quad a_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=2$

+0'25

@ProfeFranValle

Por tanto:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

+0'25

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}}$$

+ 0'5

c) ¿Qué dimensión ha de tener D para que se pueda realizar

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B \text{ ?}$$

B es de dimensión 1×3

A es de dimensión 3×3 $\Rightarrow \underset{1\times 3}{B} \cdot \underset{3\times 3}{A} = \underset{1\times 3}{M} \Rightarrow$ es de dimensión 1×3.

C es de dimensión $1\times 3 \Rightarrow C^t$ es de dimensión 3×1

B es de dimensión 1×3 $\quad \underset{3\times 1}{C^t} \cdot \underset{1\times 3}{B} = \underset{3\times 3}{M'} \Rightarrow$ es de dimensión 3×3.

Sea D una matriz de dimensión $m\times n$

Como $C^t \cdot B = M'$ tiene dimensión 3×3 $\quad \underset{m\times n}{D} \cdot \underset{3\times 3}{M} \Rightarrow$ Necesariamente $\boxed{n=3}$ +0'25

Por otro lado, como $B \cdot A = M$ es de dimensión 1×3, para poder sumar correctamente con $D \cdot M'$, necesariamente $\boxed{m=1}$ +0'25

Por tanto, la matriz D debe tener dimensión 1×3, es decir, 1 fila y 3 columnas.

@ProfeFranValle

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de $30000\ m^3$ de agua, de $5500\ kg$ de abono y de $3000\ kg$ de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita $1500\ m^3$ de agua, $110\ kg$ de abono y $80\ kg$ de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de $100\ kg$ de abono y $50\ kg$ de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de $5000\ kg$ en secano y de $10000\ kg$ en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

Datos: 20 hectáreas mínimas de secano.

Ahora dispone: $30000\ m^3$ de agua

5500 kg de abono

3000 kg de productos fitosanitarios.

+0'25

1 hectárea necesita: $1500\ m^3$ de agua
(de regadío)

110 kg de abono

80 kg de productos fitosanitarios

1 hectárea necesita: 100 kg de abono.
(de secano)

50 kg de productos fitosanitarios.

Producción anual: 5000 kg en secano.
(por hectárea)

10000 kg en regadío.

¿Número de hectáreas de olivar de secano y de regadio para maximizar la producción? ¿Producción máxima esperada?

Sea x = nº de hectáreas de secano
y = nº de hectáreas de regadío

$\Rightarrow P(x,y) = 5000\cdot x + 10000\,y$
"Producción anual" (función a maximizar)

+0'5

Condiciones:

Agua: $1500\cdot y \leq 30000$

Abono: $100x + 110y \leq 5500$

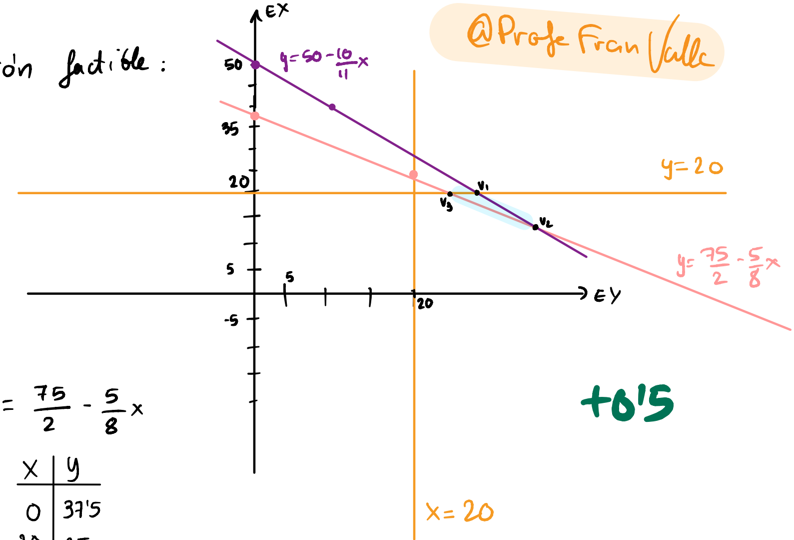
Prod. Fito.: $50x + 80y \leq 3000$

$x \geq 20$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 20 \\ y \leq 20 \\ y \leq 50 - \frac{10}{11}x \\ y \leq \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x \end{cases}$$

Dibujemos la región factible:

$$\begin{cases} x \geq 20 \\ y \leq 20 \\ y \leq 50 - \frac{10}{11}x \\ y \leq \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x \end{cases}$$



+0'5

$y = 50 - \frac{10}{11}x$

x	y
0	50
11	40

$y = \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x$

x	y
0	37'5
20	25

Calculemos los vértices de la región factible:

$V_1 : \begin{cases} y = 20 \\ y = 50 - \frac{10}{11}x \end{cases} \Rightarrow 20 - 50 = -\frac{10}{11}x \Rightarrow \frac{-30 \cdot 11}{-10} = x \Rightarrow x = 33 \Rightarrow \boxed{V_1 = (33, 20)}$

$V_2 : \begin{cases} y = 50 - \frac{10}{11}x \\ y = \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x \end{cases} \Rightarrow 50 - \frac{10}{11}x = \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x \Rightarrow 50 - \frac{75}{2} = \frac{10}{11}x - \frac{5}{8}x \Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{25}{88}x \Rightarrow x = 44$

$\Rightarrow y = 50 - \frac{10 \cdot 44}{11} = 10 \Rightarrow \boxed{V_2 = (44, 10)}$

$V_3 : \begin{cases} y = 20 \\ y = \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x \end{cases} \Rightarrow 20 = \frac{75}{2} - \frac{5}{8}x \Rightarrow x = \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{75}{2} - 20\right) = 28 \Rightarrow \boxed{V_3 = (28, 20)}$

+0'5

Ahora estudiemos cual es el máximo sustituyendo en $P(x,y)$:

$V_1\ (33, 20) \Rightarrow P(33, 20) = 5000 \cdot 33 + 10000 \cdot 20 = 365\,000 \leftarrow$ MÁXIMO

$V_2\ (44, 10) \Rightarrow P(44, 10) = 5000 \cdot 44 + 10000 \cdot 10 = 320\,000$

$V_3\ (28, 20) \Rightarrow P(28, 20) = 5000 \cdot 28 + 10000 \cdot 20 = 240\,000$

+0'5

Conclusión: Para maximizar su producción harán falta 33 hectáreas de secano y 20 de regadío, llegando a una producción anual de 365000 kg.

+0'25

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \qquad\qquad g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$.

a)

$$f'(x) = 3\cdot(x^2+2)^2\cdot 2x\cdot e^{-2x} + (x^2+2)^3\cdot e^{-2x}\cdot(-2) = (x^2+2)^2\cdot e^{-2x}\cdot\left(6x - 2\cdot(x^2+2)\right) =$$

$$= \boxed{(x^2+2)^2\cdot e^{-2x}\cdot(-2x^2+6x-4)}$$

+0'75

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{1-x^3}\cdot(-3x^2)\cdot(1-2x^2)^{\cancel{2}\,1} - \ln(1-x^3)\cdot 2\cancel{(1-2x^2)}\cdot(-4x)}{(1-2x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \boxed{\frac{\frac{-3x^2+6x^4}{1-x^3} + 8x\cdot\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^3}}$$

+0'75

b) Sea $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$

La recta tangente de $h(x)$, en cada punto $x \in \mathbb{R}$, es de la forma: $y = mx + n$ donde $m = h'(x)$. Para que dicha tangente sea horizontal en $P(1,2)$, su pendiente ha de valer cero, es decir:

$$m = 0 \Rightarrow h'(1) = 0$$

+0'25

Por otro lado, como la recta pasa por $P(1,2)$, ha de cumplirse que:

$$h(1) = 2$$

+0'25

Con estas dos pistas, averiguamos los valores de a y b:

$$h'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

+0'25

$$h(1) = 2 \Rightarrow 1 + (-3)\cdot 1 + 3 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

+0'25

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \;\; 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \;\; 10 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Compruebe que la función v es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y $140\, km/h$, y rojo para vientos de más de $140\, km/h$. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

a) Comprobemos que la función $v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \;\; 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \;\; 10 < t \le 24 \end{cases}$ sea continua y derivable.

- Si $0 \le t < 10$, $v(t)$ es continua y derivable por ser una función cuadrática.

+0'25

- Si $10 < t \le 24$, $v(t)$ es continua y derivable por ser también una función cuadrática.

En $t=10$ es continua si cumple: $\lim_{t \to 10^-} v(t) = \lim_{t \to 10^+} v(t) = v(10)$

Veámoslo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 10^-} v(t) = \lim_{t \to 10^-} t^2 - 8t + 60 = 80 \\ \lim_{t \to 10^+} v(t) = \lim_{t \to 10^+} -t^2 + 32t - 140 = 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v(t) \text{ es continua en } t = 10}$$

+0'25

$v(0) = 80$

En $t=10$ es derivable si cumple: $\lim_{t \to 10^-} v'(t) = \lim_{t \to 10^+} v'(t) = v'(10)$

Calculamos $v'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & si \;\; 0 \le t \le 10 \\ -2t + 32 & si \;\; 10 < t \le 24 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 10^-} v'(t) = \lim_{t \to 10^-} 2t - 8 = 12 \\ \lim_{t \to 10^+} v'(t) = \lim_{t \to 10^+} -2t + 32 = 12. \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v(t) \text{ es derivable en } t = 10.}$$

+0'25

$v'(0) = 12$

@ProfeFranValle

6) Representemos $v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & \text{si } 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & \text{si } 10 < t \le 24 \end{cases}$

¿Puntos críticos? $v'(t) = 0$:

• Si $0 \le t \le 10$: $2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4$.

Además como es una función cuadrática cuyo coeficiente del monomio t^2 es positivo, esto nos indica que la función es convexa $(+)$ y por tanto:

+0'25 - En $(0,4)$ es decreciente
- En $(4,10)$ es creciente

$\Rightarrow$ En $t=4$ hay un mínimo absoluto, (porque $v(24) < v(4)$)

$V_1 = (4, v(4)) = \boxed{(4, 44)}$

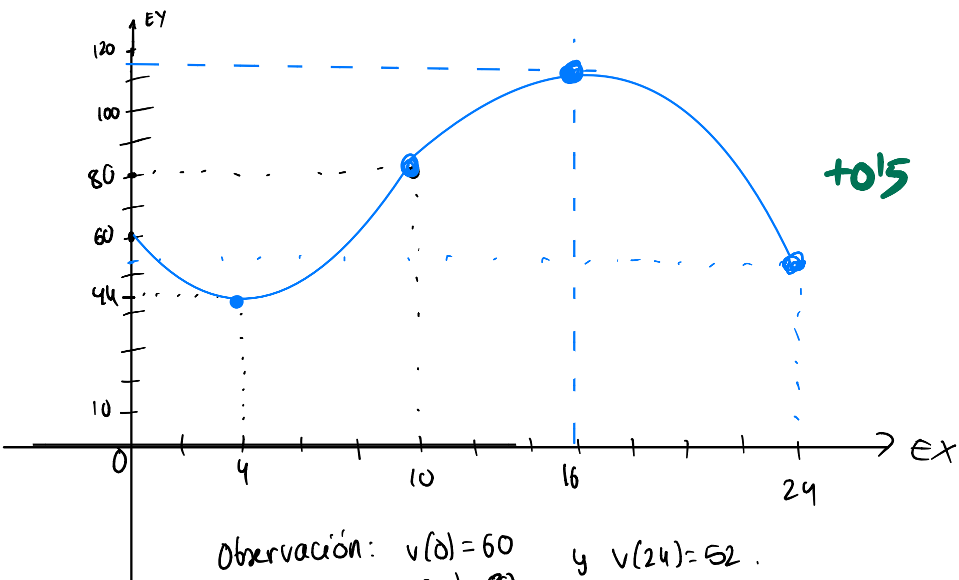
• Si $10 < t \le 24$: $-2t + 32 = 0 \Rightarrow t = 16$.

Además como es una función cuadrática cuyo coeficiente del monomio $-t^2$ es negativo, esto nos indica que la función es cóncava $(-)$ y por tanto:

+0'25 - En $(10,16)$ es creciente
- En $(16,24)$ es decreciente

$\Rightarrow$ En $t=16$ hay un máximo absoluto (porque $v(0) < v(16)$ y $v(10) < v(16)$)

$V_2 = (16, v(16)) = \boxed{(16, 116)}$



+0'5

Observación: $v(0) = 60$ y $v(24) = 52$.
$v(10) = 80$

@ProfeFranValla.

c) Se emite alerta naranja si $100 \leq v(t) \leq 140$ y alerta roja si $v(t) > 140$

¿Se emitirá alguna alerta naranja o roja?

- Según la gráfica estudiada, el máximo viento será de 116 km/h, por lo que no llegará a emitirse alerta roja. **+0'25**

- Por otro lado: $v(t) = 100 \Rightarrow -t^2+32t-140 = 100 \Rightarrow -t^2+32t-240 = 0$

Resolviendo: $t = \dfrac{-32 \pm \sqrt{64}}{-2} = \dfrac{-32 \pm 8}{-2} = \begin{cases} t = 20 \\ t = 12 \end{cases}$

Es decir, teniendo en cuenta la monotonía de la función, se emitirá alerta naranja entre las horas 12 y 20.

+0'5

BLOQUE C

@ProfFranValla.

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*.

Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

a) Usaremos una tabla de contingencia para entender el problema:

Sean: J = ser joven menor de 30 $\quad N$ = ser vehículo nuevo

$\bar{J}$ = ser senior $\quad \bar{N}$ = ser viejos

	J	$\bar{J}$	
N	8	11	19
$\bar{N}$	21	14	35
	29	25	54

+0'5

¿Probabilidad de que sea $\bar{J}$ y $\bar{N}$?

$$P(\bar{J} \cap \bar{N}) = \boxed{\frac{14}{54}} = 0'\overline{259}$$

+0'5

b) ¿Probabilidad de que sea joven si el vehículo es viejo?

Basándonos en la tabla de contingencia:

$$P(J/\bar{N}) = \boxed{\frac{21}{35}} = 0'6$$

+1

c) ¿Es $P(\bar{J} \cap N)$ la mayor probabilidad?

Vemos que dicha probabilidad es: $P(\bar{J} \cap N) = \frac{11}{54} = 0'20\overset{\frown}{37}$

No obstante, podemos comprobar que un individuo joven con un coche nuevo tiene una menor probabilidad:

$$P(J \cap N) = \frac{8}{54} = 0'\overset{\frown}{148}$$

+0'5

Por tanto, la afirmación sería falsa

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42% de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32% de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65% de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75% de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20% de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

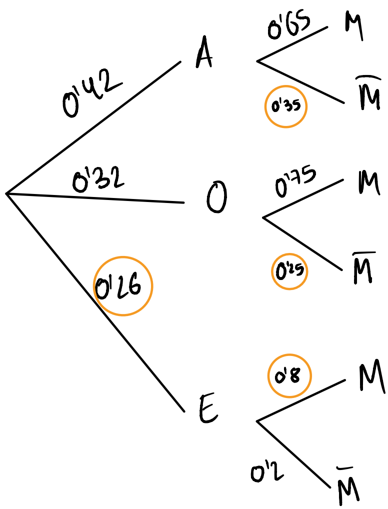
Usaremos un diagrama de árbol para entender los datos:

Sean los sucesos : A = "proceder de Andalucía".

O = "proceder de otras CCAA".

E = "proceder del extranjero".

M = "ser mayor de edad".



+0'25

a) ¿Probabilidad de ser mayor de edad?

Por el T^a de la Probabilidad Total:

$$P(M) = P(A)\cdot P(M/A) + P(O)\cdot P(M/O) + P(E)\cdot P(M/E) = 0'42\cdot 0'65 + 0'32\cdot 0'75 + 0'26\cdot 0'8 =$$

$$= \boxed{0'721}$$

+0'75

@ProfeFranValle

b) ¿Prob. de proceder de Andalucía y ser menor?

$$P(A \cap \bar{M}) = 0'42 \cdot 0'35 = \boxed{0'147} \quad +0'5$$

c) ¿Prob. sea extranjero si es menor de edad?

$$P(E/\bar{M}) = \overset{+0'25}{\frac{P(E \cap \bar{M})}{P(\bar{M})}} \overset{(*)}{=} \frac{0'26 \cdot 0'2}{0'279} = \boxed{0'18638} = \frac{52}{279} \quad +0'5$$

$$(*) \quad P(\bar{m}) = 1 - P(M) = \boxed{0'279} \quad +0'25$$

BLOQUE D

@ProfeFranValle

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

a) Lo resolveremos en una misma tabla de datos:

(para ello, solo tenemos que tener en cuenta la afijación proporcional)

	E_1	E_2	E_3	E_4	Total
Población	500	600	400	500	2000
Muestra 1	25	30	20	25	100
Muestra 2	100	120	80	100	400

+0'25 por dato correcto

Como $\dfrac{500}{25} = 20 \Rightarrow$ Población de $E_2 = 30 \cdot 20 = 600$

Como $\dfrac{400}{80} = 5 \Rightarrow$ Población de $E_4 = 100 \cdot 5 = 500$

Igualmente: $\dfrac{400}{20} = 20$ (muestra 1 de E_3)

$\dfrac{500}{20} = 25$ (muestra 1 de E_4)

$\dfrac{500}{5} = 100$ (muestra 2 de E_1)

$\dfrac{600}{5} = 120$ (muestra 2 de E_2).

@ProfeFranValla

6) Dada la población: $\{-3,-1,2,5,7\}$

¿Media y varianza de la distribución de las medias?

Las muestras se cogen de tamaño $n=2$.

Por el Teorema del Límite Central, la media de las medias muestrales es μ y su varianza $\frac{\sigma^2}{n}$.

Calculamos la media y desviación típica poblacional:

$$\mu = \frac{-3-1+2+5+7}{5} = \boxed{2} \quad \mathbf{+0'5}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-3-2)^2+(-1-2)^2+(2-2)^2+(5-2)^2+(7-2)^2}{5} = 13'6$$

Luego:

$$\text{Varianza de medias muestrales} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{13'6}{2} = \boxed{6'8} \quad \mathbf{+0'5}$$

@ProfeFranValla

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

a) Sea $p =$ "probabilidad de realizar turismo sostenible"

En la muestra: $p = \frac{1825}{2500} = 0'73$. **+0'25**

¿Intervalo de Confianza del 95%?

$1-\alpha = 0'95 \Rightarrow \alpha = 0'05 \Rightarrow \alpha/2 = 0'025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0'975$.

Elegimos en la tabla $Z_{\alpha/2} = 1'96$. **+0'25**

$\text{Error} = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'73\cdot 0'27}{2500}} = 0'0174$ **+0'25**

Por tanto, el intervalo de confianza será:

$(p - \text{Error},\ p + \text{Error}) = \boxed{(0'71259\ ,\ 0'7474)}$ **+0'5**

b) Con confianza al 97%, ¿tamaño de la muestra para Error < 0'01?

En este caso: $\alpha = 0'03 \Rightarrow \alpha/2 = 0'015 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0'985$

Luego: $Z_{\alpha/2} = 2'17$. **+0'25**

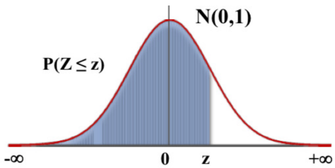
Si $\text{Error} = 0'01 \Rightarrow 0'01 = 2'17 \cdot \sqrt{\frac{0'73\cdot 0'27}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0'01}{2'17}\right)^2 = \frac{0'73\cdot 0'27}{n}$

$\Rightarrow n = 0'73\cdot 0'27 \cdot \left(\frac{2'17}{0'01}\right)^2 = 9281'24$ **+0'25**

Luego para que el error sea menor al 1% el tamaño ha de tomarse como mínimo $\boxed{n = 9282}$ **+0'25**

c) Si disminuye el tamaño de la muestra aumenta el error del intervalo y por tanto la amplitud del intervalo de confianza también aumentaría dependiendo directamente del error:

$$(p - \varepsilon \, , \, p + \varepsilon)$$ **+0'5**



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z .