Corrección EBAU MAT II

(Andalucía 2024)

@ProfeFranValla

Importante: Las puntuaciones en verde son solo orientativas, no tienen por qué ser así de manera oficial.

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023–2024

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- **a) Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- **b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
- **c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
- **d)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- **e) Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque.** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- **f)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- **g)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x) - a\,\mathrm{sen}(x)}{x^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ b\cos(x) - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Halla la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024}.

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 1 \\ (k-1)x & + & y & + & z & = & k \\ x & + & (k-1)y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de k.

b) **[0,75 puntos]** Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

a) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y + z & = 2 \\ y - z & = 1 \end{array} \right.$

b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de r y s.

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

a) Sean $f(x) = \ln(x)$, $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

¿Cual es la recta que pasa por A y B?

$$m = \frac{1-0}{e-1} = \boxed{\frac{1}{e-1}}$$, es su pendiente. **+0'25**

Por tanto la recta será de la forma $r\colon y = \frac{1}{e-1} \cdot x + n$.

Para hallar n sustituyo en r el punto $A(1,0)$:

$$\begin{matrix} x=1, \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{e-1} + n \Rightarrow n = -\frac{1}{e-1}$$

Por tanto, la recta r que pasa por A y B es:

$$r\colon \quad y = \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}$$ **+0'25**

Toda recta $s\colon y = m'x + n'$ paralela a r ha de cumplir que $m = m'$ y $n \neq n'$.

La recta tangente de la gráfica de $f(x)$ tendrá pendiente $m' = f'(x)$ en cada valor $x \in \mathbb{R}$.

+0'25

$$m' = f'(x) = \frac{1}{x}$$

Además, su ordenada en el origen $n' = f(x) - f'(x) \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Es decir: $$n' = \ln(x) - \frac{1}{x} \cdot x = \ln(x) - 1$$

Por tanto, para que ambas rectas sean paralelas se debe cumplir:

$$① \quad m' = m \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow \boxed{x = e-1}$$ **+0'25**

2° $n \neq n' \Rightarrow \frac{-1}{e-1} \neq \ln(x)-1$ **+0'25**

¿Cuando sería igual?

$$\ln(x)-1 = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow \ln(x) = 1-\frac{1}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}$$

$$\Rightarrow x = e^{\left(\frac{e-2}{e-1}\right)}$$

O sea, para que sean paralelas ha de cumplirse que **+0'25**

$\boxed{x = e-1}$ y además $x \neq e^{\left(\frac{e-2}{e-1}\right)}$, cosa que se cumple ✓

b) ¿Cual es la recta normal a la gráfica de $f(x)$ que pasa por $A(1,0)$?

La pendiente de la recta normal en $x=1$ viene dada por:

$$m = -\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

+0'5

Es decir:

$$m = -\frac{1}{\left(\frac{1}{1}\right)} = \boxed{-1}$$

Por tanto la recta normal $h: y = mx+n$ será de la forma $h: y = -x+n$

Para hallar n, sustituimos el punto $A(1,0)$:

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = (-1)\cdot 1 + n \Rightarrow n = 1$$

Conclusión: La recta normal es:

$\boxed{h:\ y = -x+1}$ ✓ **+0'5**

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x) - a\,\mathrm{sen}(x)}{x^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ b\cos(x) - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b.

La función $f(x)$ es continua, por tanto lo será también en $x = 0$.

Como $f(x)$ es continua en $x=0$, se cumple que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

+0'5

Calculemos dichos límites:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} b\cdot\cos(x) - 1 = b-1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot\cos(x) - a\cdot \mathrm{sen}(x)}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}}$$ INDeterminación. +0'25

Podemos usar L'Hopital (pues cumple el numerador y el denominador las condiciones necesarias).

Es decir: $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot\cos(x) - a\cdot\mathrm{sen}(x)}{x^3} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) - x\cdot\mathrm{sen}(x) - a\cdot\cos(x)}{3x^2} \overset{(*)}{=} \boxed{\frac{1-a}{0}}$$ +0'25

Para que se produzca un límite infinito (y por tanto, no podría darse la continuidad) $1-a \neq 0$; es decir, necesariamente $1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$ +0'5

Para calcular el límite exacto con $a=1$, debemos volver a aplicar L'Hopital:

$$(*) \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(x) - x\cdot\cos(x) + \mathrm{sen}(x)}{6x} \overset{(**)}{=} \boxed{\frac{0}{0}}$$ INDeterminación. +0'25

Ídem, usamos de nuevo L'Hôpital:

$$\overset{(**)}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cos(x) - \cos(x) - \cos(x) + x\cdot\mathrm{sen}(x) + \cos(x)}{6} = \frac{-2}{6} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$ +0'25

Por tanto, como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, tenemos que:

$$b-1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}}$$

+0'5

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$.

$F(x) = \int \dfrac{x^3+2}{x^2-1}\,dx$ que pasa por $(0,1)$.

Dividimos y aplicamos Euclides:

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & +2 & x^2-1 \\ \cline{3-3} -(x^3 & -x\,) & x \\ \hline & x+2 & \end{array}$$

$x^3+2 = (x^2+1)\cdot x + x+2$

+0'25

Por tanto: $\dfrac{x^3+2}{x^2-1} = x + \dfrac{x+2}{x^2-1}$

Ahora bien: $\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ +0'25

Luego: $x+2 = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-1)$

Si $x=1 \Rightarrow 3 = 2A \Rightarrow A = \dfrac{3}{2}$ +0'25

Si $x=-1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\dfrac{1}{2}$ +0'25

Quedando por tanto la siguiente integral:

+1

$$F(x) = \int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \int x + \frac{3/2}{x-1} + \frac{(-1/2)}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\ln|x+1| + C;$$

con $C \in \mathbb{R}$

Como pasa por $(0,1) \Rightarrow F(0)=1$, de donde $C=1$

Conclusión: $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + 1}$ +0'5

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

¿ $f(x)$ tal que $f''(x)=x\cdot\cos(x)$ y pasa por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$?

Por el Teorema fundamental del cálculo:

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int x\cdot\cos(x)\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos(x) & v=\text{sen}(x)\end{matrix}\right\}=$$

$$=x\cdot\text{sen}(x)-\int\text{sen}(x)\,dx=x\cdot\text{sen}(x)+\cos(x)+C \quad ; \quad C\in\mathbb{R}$$

+0'5

De nuevo:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(x\cdot\text{sen}(x)+\cos(x)+C\right)dx=\int x\cdot\text{sen}x\,dx+\int\cos x\,dx+\int C\,dx=$$

$$=x\cdot(-\cos(x))-\int-\cos(x)\,dx+\text{sen}(x)+C\cdot x=-x\cdot\cos x+\text{sen}x+\text{sen}x+Cx+K$$

$K\in\mathbb{R}$

$$=2\text{sen}x-x\cos x+Cx+K \quad ; \quad \text{con } C,K\in\mathbb{R}.$$

+0'75

Como $f(x)$ pasa por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $f(0)=\frac{\pi}{2}$; es decir:

$$\overset{0}{\cancel{2\cdot\text{sen}(0)}}-\overset{0}{\cancel{0\cdot\cos(0)}}+\overset{0}{\cancel{C0}}+K=\frac{\pi}{2}$$

Por tanto: $K=\frac{\pi}{2}$

+0'5

Como $f(x)$ pasa por $(\pi,2\pi)$: $f(\pi)=2\pi$; es decir

$$\overset{0}{\cancel{2\cdot\text{sen}(\pi)}}-\pi\cdot\cos(\pi)+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi$$

$$\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi \Rightarrow C\pi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

+0'5

Conclusión: $\boxed{f(x)=2\cdot\text{sen}(x)-x\cdot\cos(x)+\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}}$

+0'25

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024}.

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ +0'25

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$ Es evidente el patrón

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, por tanto : +0'25

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ +0'5

b) Resolvamos la ecuación matricial $A^2 \cdot X \cdot A + I = O$

$\Rightarrow A^2XA = -I \Rightarrow X \cdot A = (A^2)^{-1} \cdot (-I) \Rightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot (-I) \cdot A^{-1}$ +0'5

Calculemos a continuación la matriz inversa A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [adj(A)]^t$$

Es fácil ver que $|A| = 1$; por otro lado:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & +a_{33} \end{pmatrix},$$ donde:

$$a_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad a_{21} = \begin{vmatrix} 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/8 \qquad a_{31} = \begin{vmatrix} 1/8 & 1/8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}$$

$$a_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1/8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad a_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1/8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad a_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1/8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1/8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **+0'25**

Análogamente: $$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **+0'25**

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

+0'5

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 1 \\ (k-1)x & + & y & + & z & = & k \\ x & + & (k-1)y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de k.

b) **[0,75 puntos]** Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

---

a) Ponemos a forma de matriz y estudiaremos el rango:

$$M = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ k \\ 0 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)^2+1-(1+k-1) = k^2+1-2k+1-k = k^2-3k+2.$$

$$¿|A|=0? \Rightarrow k^2-3k+2=0 \Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} = \begin{cases} k=2 \\ k=1 \end{cases}$$ +0'25

- Si $k\neq 2$ y $k\neq 1$, $rg(A)=3=rg(M)=$ nº incógnitas, por tanto, por Rouché - Fröbenius, sería un Sistema Compatible Determinado (única solución). +0'5

- Si $k=2$: (Aplico Gauss).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 = f_1 - f_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow Rg(A)=2 < Rg(M)=3$$

Luego es un Sistema Incompatible (sin solución) (por el Teorema de Rouché - Fröbenius). +0'5

- **Si $k=1$:** (Aplico Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $Rg(A) = Rg(M) = 2 <$ nº incógnitas

Luego es un Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

+0'5

(por Rouché-Fröbenius).

b) Para $K=1$ resolvamos el sistema (usando justo lo anterior):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = t \\ y = 1 - t \\ x = -t \end{array}}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

+0'5

¿Hay alguna solución en la que $y = 0$?

$\Rightarrow$ Sí, basta con hacer $t=1$ y obtenemos la solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}}$$

+ 0'25

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

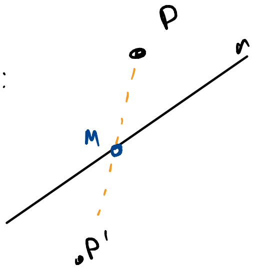
EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

a) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2 \\ y-z &= 1 \end{cases}$

b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.

a) ¿Punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto $r: \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$?

Visualmente:



1º. Hallemos el plano cuyo vector normal sea el vector de r y que pase por $P(2,2,1)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x-2 & y-2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (z-1)+2\cdot(x-2)-(x\cancel{-2}-y\cancel{+2})=0 \Rightarrow 2x-4+z-1-x+y=0$$

$$\Rightarrow \pi: \ x+y+z-5=0 \qquad +0'5$$

2º. Hallemos $\pi \cap r = M$, que es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

$$\pi \cap r: \begin{cases} x+y+z=5 \\ x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2=f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3=f_2-3f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} z=0 \\ y=1 \\ x=4 \end{matrix} \Rightarrow M=(4,1,0) \qquad +0'5$$

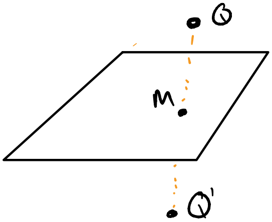
3º. Usando la definición de punto medio, averiguamos el punto simétrico $P'=(a,b,c)$

$$M=\frac{P+P'}{2} \Rightarrow 2M-P=P' \Rightarrow P'=2\cdot(4,1,0)-(2,2,1)=(6,0,-1)$$

Conclusión: El punto simétrico es $\boxed{P'(6,0,-1)}$ $+0'25$

6) ¿Punto simétrico de $Q=(1,-1,-3)$ respecto $\pi: x-2y+z+6=0$?

Visualmente:



1º. Hallamos la recta perpendicular a π que pasa por Q:

Vector de la recta = vector normal del plano:

$$r\begin{cases}\vec{v_r} = \overrightarrow{(1,-2,1)} \\ Q = \overrightarrow{(1,-1,-3)}\end{cases} \quad \text{luego: } r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = -3+t \end{cases}$$

+0'5

2º. Calculamos $\pi \cap r$ para hallar el punto medio M al segmento $\overline{QQ'}$.

$$(1+t)-2\cdot(-1-2t)+(-3+t)+6=0 \Rightarrow 1+t+2+4t-3+t-6=0$$

$$\Rightarrow 6t-6=0 \Rightarrow t=1$$

$$\text{luego } M = \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = -1-2 = -3 \\ z = -3+1 = -2 \end{cases} \Rightarrow M=(2,-3,-2)$$

+0'5

3º. Calculamos Q' usando la definición del punto medio:

$$M = \frac{Q+Q'}{2} \Rightarrow Q' = 2M - Q = 2\cdot(2,-3,-2)-(1,-1,-3) = (3,-5,-1)$$

Conclusión: El punto simétrico es $\boxed{Q'=(3,-5,-1)}$

+0'25

EJERCICIO 8. **(2,5 puntos)**

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y+7=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de r y s.

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

---

a) ¿Posición relativa de r y s?

$$r \cap s \equiv \begin{cases} 2x-z=0 \\ y=0 \\ x+y=-7 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z=0 \\ y=0 \\ x=-7 \\ x=0 \end{matrix} \Rightarrow -7 \neq 0$$

Luego, ambas rectas no cortan en ningún punto

+0'25

¿Son paralelas o se cruzan?

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \underbrace{}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$

+0'25

Hacemos Gauss:

$$\xrightarrow{f_3=f_1-2f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3=2f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A')=4$$

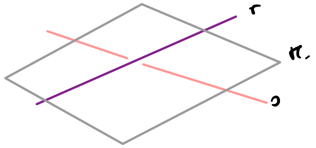
+0'25

Conclusión: ambas rectas se cruzan.

+0'25

b) ¿ Ecuación del plano paralelo a r y s que equidista a ambas?

Visualmente:



Como el plano π // r y π // s, entonces dos vectores del plano serán $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$, es decir, los vectores directores de cada recta:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 2k = \overrightarrow{(-1, 0, -2)}$$

$$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j = \overrightarrow{(1, -1, 0)}$$

+0'25

Por tanto, el vector normal del plano será:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} - 2\vec{j} - (2\vec{i}) = \overrightarrow{(\underbrace{-2}_{A}, \underbrace{-2}_{B}, \underbrace{1}_{C})}$$

+0'25

Como $\pi // r \Rightarrow dist(\pi, r) = dist(\pi, P_r)$ siendo $P_r = (0,0,0) \in r$.

Por otro lado, $dist(P, \pi) = \dfrac{|A \cdot x_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, siendo $P = (x_0, y_0, z_0)$

Por tanto: $dist(P_r, \pi) = \dfrac{|D|}{\sqrt{9}} = \boxed{\dfrac{|D|}{3}}$ +0'25

De la misma forma, como $\pi // s \Longrightarrow dist(\pi, s) = dist(\pi, P_s)$ siendo $P_s = (-7, 0, 0)$.

Luego: $dist(P_s, \pi) = \dfrac{|(-2) \cdot (-7) + D|}{3} = \boxed{\dfrac{|14 + D|}{3}}$ +0'25

Así pues, ha de cumplirse que: $\dfrac{|14 + D|}{3} = \dfrac{|D|}{3} \Rightarrow |14 + D| = |D| \Rightarrow$ [Siguiente folio]

$\Rightarrow$

- Si $D>0 \Rightarrow 14+D=D \Rightarrow 14=0 \Rightarrow \nexists D$
- Si $-14 \leq D \leq 0 \Rightarrow 14+D=-D \Rightarrow \boxed{D=-7}$ +0'25
- Si $D<-14 \Rightarrow -14-D=-D \Rightarrow \nexists D$

Conclusión: El plano será: $\boxed{\pi:\ -2x-2y+z-7=0}$ +0'25