# TEMAS 6 Y 7 – RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

## RECTAS Y PLANOS

EJERCICIO 1 : Halla el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano $\pi$: $3x - 2y - 4z + 2 = 0$.

EJERCICIO 2 : Halla la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3z = 5 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$ y es paralelo al plano que contiene a los puntos: A(1, 0, –3), B(2, 1, 4) y C(0, 2, 3)

EJERCICIO 3 : Halla la ecuación del plano $\pi$ que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, siendo: $r:\begin{cases} y = 2z - 4 \\ x = 3z - 8 \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x-10}{1} = \dfrac{y-20}{-1} = \dfrac{z}{1}$

EJERCICIO 4 : Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ , $\quad s:\begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

y el plano $\pi$, que pasa por los puntos A(1, 0, 2), B(2, 1, 2) y C(1, 0, 1).

a) Da la ecuación general o implícita de $\pi$.

b) Una de las dos rectas corta a $\pi$. Determínala.

c) Comprueba que la otra recta es paralela a $\pi$.

EJERCICIO 5 : Nos dan las rectas r, determinada por los puntos A(2, –1, 1), B(0, 1, –1), y s determinada por C(2, 0, –1) y D(2, 1, –1).

a) Escribe la ecuación general (o implícita) del plano paralelo a r y s que pasa por el origen de coordenadas.

b) Escribe la ecuación general del plano que pasa por B y es perpendicular a r.

EJERCICIO 6 : Halla la ecuación del plano que contiene a la recta: $r:\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$

y al punto P(2, –3, 1). Explica el procedimiento.

EJERCICIO 7 : Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(2, 1, -3)$ y $P_2(4, 2, 1)$ y es perpendicular al plano: $\pi$: $2x - y - z + 3 = 0$

EJERCICIO 8 :

a) Obtén la ecuación del plano $\pi$ que pasa por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ siendo P(2, 1, 0) y Q(0, 3, 4) y es perpendicular a dicho segmento.

b) El plano del apartado anterior corta a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Calcula el área del triángulo ABC.

EJERCICIO 9 : Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano: $2x - y + z - 4 = 0$

<u>EJERCICIO 10</u> : Considera los puntos A(3, 0, 2), B(4, −1, 3) y C(2, 2, 1).
a) Prueba que son los vértices de un triángulo.
b) Calcula el área de dicho triángulo.

<u>EJERCICIO 11</u> :
a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(3, −1, −1) y es perpendicular a $\vec{v}(1, 1, 1)$.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano anterior.

<u>EJERCICIO 12</u> : Considera los puntos P(2, 1, 1) y Q(4, 5, 3).
a) Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto medio de $\overrightarrow{PQ}$ y es perpendicular a este.
b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por los ejes de coordenadas y el plano π.

<u>EJERCICIO 13</u> : Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,1,5) y (3,4,3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

<u>EJERCICIO 14</u> : Dadas las rectas r: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$, hallar un punto de cada una de ellas, de tal forma que el vector que las una sea perpendicular a ambas.

<u>EJERCICIO 15</u> : Encuentra la ecuación del plano perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ que pase por el origen de coordenadas.

<u>EJERCICIO 16</u> : Determinar la relación que debe existir entre a y b para que el punto P(0,a,b) esté en el plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(1,1,1) y C(0,2,1).

<u>EJERCICIO 17</u> : Sean las rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y la determina por la intersección de los planos $x + y - z = 1$, $2x - y + z = 2$
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelos a las dos rectas.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por (1,1,1) y es perpendicular al plano hallado.

<u>EJERCICIO 18</u> :
a) Determina si los puntos A(-1,0,3), B(2,4,1) y C(-4,3,1) están alineados.
b) Expresa en dos formas diferentes la ecuación de la recta que pasa por A y B.

<u>EJERCICIO 19</u> : Sea r la recta intersección de los planos $x + y + z = 2$ y $2x + 3y + z = 3$ Calcula un punto de la recta r, un vector direccional y las ecuaciones de r en forma paramétrica y en forma continua. Halla también la ecuación del plano que contiene a la recta y pasa por el punto (2,1,3)

<u>EJERCICIO 20</u> : Dados el punto A(1,1,1) y la recta r: $\begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ calcula:

a) Un vector u director de la recta r.
b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A
c) La recta s que pasa por el punto A, está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r.

EJERCICIO 21 : Sean P y Q los puntos de coordenadas P(a,b,0) y Q(1,2,3). ¿Existen valores de a y b para los cuales la recta que une P y Q contenga al punto R dado por R(0,0,1)? Razona la respuesta en caso negativo. Si la respuesta es positiva, calcula los valores de a y b.

EJERCICIO 22 : Calcula la ecuación paramétrica y la ecuación cartesiana (general) del plano que contiene a los puntos A, B y C de coordenadas A(1,0,0), B(0,1,1) y C(1,1,1). ¿Existe algún valor de u tal que el punto (3,2u,u+3) pertenezca al plano? Razonar la respuesta calculando el valor de u en caso de que sea afirmativa.

## POSICIÓN RELATIVA

EJERCICIO 23 :

a) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-2y+2z=2 \end{cases} \quad y \quad s:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z}{-6}$$

b) Comprueba si los puntos A(1, 0, −2) y B(2, −10,−6) pertenecen a alguna de las rectas anteriores.

EJERCICIO 24 :

a) Investiga la posición relativa de las dos rectas siguientes en el espacio:

La primera está dada por $x-5=y-7=z$, y la segunda, por los planos:

$\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ y-2z-7=0 \end{cases}$. Explica el procedimiento.

b) Halla si es posible, el punto de intersección.

EJERCICIO 25 : Estudia la posición relativa de las rectas $r_1$ y $r_2$:

$$r_1:\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$$

Razona la respuesta.

EJERCICIO 26 : Consideramos las dos rectas: $r:\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$ $s:\frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+d}{-2}$

Halla el valor de $d$ para que las rectas se corten. Halla el punto de intersección para el valor de $d$ obtenido.

EJERCICIO 27 : Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de $k$:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5} \quad y \quad s:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-k}{3}$$

EJERCICIO 28 : Explica cuál ha de ser el valor de $m$ que hace que el tercer plano de la siguiente familia contenga a la recta definida por los dos primeros. Los planos son: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ mx+10y+4z=11 \end{cases}$

EJERCICIO 29 : Considera las rectas: $r_1$: $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$ $r_2$ : $\begin{cases} y = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ y $r_3$: $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 3 \end{cases}$

a) Demuestra que las rectas $r_1$ y $r_2$ se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de $r_1$ y $r_2$, y es paralela a $r_3$.

EJERCICIO 30 : Considera los planos de ecuaciones $\pi_1 : x + 2y + z = 1$, $\pi_2 : px + y + pz = 1$ y $\pi_3 : px + y + 2z = 1$ donde p es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto? Halla este punto cuando p = 1

b) ¿Hay algún valor de p que haga que la intersección común sea una recta? Si es así, escribe la ecuación vectorial de esta recta.

c) Describe la posición relativa de los tres planos cuando p = ½

EJERCICIO 31 : Determina la posición relativa de las siguientes rectas:

$r_1 : \begin{cases} 7x + 5y - 7z - 12 = 0 \\ 2x + 3z + 11 = 0 \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} 5x - 5y - z - 16 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 32 : Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo)

$\Pi_1 \equiv (a + 1)x + y + z = 3$

$\Pi_2 \equiv x + 2y + az = 4$

$\Pi_3 \equiv x + ay + 2z = 2a$