

ÁNGULOS

EJERCICIO 33 : Halla el ángulo que forma la recta $r: \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$
y el plano $\pi: 2x - y + 4z - 2 = 0$.

EJERCICIO 34 : En el espacio se consideran:

- La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas $x + y - z = 5$, $2x + y - 2z = 2$
- La recta s que pasa por los puntos $P = (3, 10, 5)$ y $Q = (5, 12, 6)$

Calcular el ángulo α que determinan r y s

EJERCICIO 35 : Hallar el ángulo que determinan los planos: $\pi_1: x+2y-z=0$ y $\pi_2: 2x-3z+7=0$

DISTANCIAS

EJERCICIO 36 : Halla la distancia de $P(5, 3, -4)$ al plano $\pi: x + 3y - z + 5 = 0$

EJERCICIO 37 : Calcula la distancia entre los planos siguientes:

$$\pi: x - 3y + z - 10 = 0 \quad \pi': 2x - 6y + 2z + 3 = 0$$

EJERCICIO 38 : Dados los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(2, -1, 0)$ y el plano $\pi: x + y + 2z - 1 = 0$, calcula:

- La distancia entre P y Q .
- La distancia de P a π .

EJERCICIO 39 : Calcula la distancia entre los planos siguientes:

$$\pi: y + 3z = 0 \quad \pi': 2y + 6z - 5 = 0$$

EJERCICIO 40 : Calcula razonadamente la distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

EJERCICIO 41 : Calcula la distancia de $P(2, 1, -1)$ a la recta $r: (4\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$.

EJERCICIO 42 : Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 2)$ a la recta siguiente: $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

EJERCICIO 43 : Calcula la distancia de $P(1, 0, 2)$ a la recta $r: (2\lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$.

EJERCICIO 44 : Calcula la distancia entre: $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$

EJERCICIO 45 : Calcula la distancia entre las rectas r y s : $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$

EJERCICIO 46 : Considera las rectas r y s : $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Calcula la distancia entre ellas

EJERCICIO 47 : Halla los puntos de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos $\pi_1: 4x - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2: 3x + 4y - 1 = 0$

$$x = 3 + \lambda$$

EJERCICIO 48 : Hallar la distancia de la recta $r: \begin{cases} y = -2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ al plano $\Pi: 2x + y - z = 4$

REPASO

EJERCICIO 49 :

Dados el punto $P(2, 1, -2)$, la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$, y el plano $\pi: 4x - 3y + 5 = 0$, calcula:

- La distancia de P a π .
- El ángulo formado por la recta r y el plano π .

EJERCICIO 50 :

Dados el punto $P(1, 0, -3)$, la recta $r: \begin{cases} x = 2 + m\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + m\lambda \end{cases}$, y el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$, calcula:

- El valor de m para que r sea paralela a π .
- La distancia de P a π .

EJERCICIO 51 :

- a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, -1)$ y es paralela a los planos $\pi_1: x + 2y - z - 2 = 0$, $\pi_2: 2x + y + 2z - 1 = 0$.
- b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

EJERCICIO 52 :

- a) Halla el ángulo que forman las rectas: $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$
- b) Obtén la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

EJERCICIO 53 :

- a) Determina la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y es perpendicular a la recta $r: \{x + y = 0, y - 3z + 2 = 0\}$.
- b) Halla el ángulo que forman los planos siguientes: $\pi_1: x + y = 0$ $\pi_2: y - 3z + 2 = 0$

EJERCICIO 54 : Dadas las rectas: $r_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$, $r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ Halla:

- a) La ecuación del plano que pasa por la segunda y es paralelo a la primera.
- b) La distancia entre ambas rectas.

EJERCICIO 55 : Dadas las rectas: $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ Halla:

- a) La distancia entre las rectas. b) La recta perpendicular a r y s .

EJERCICIO 56 : Los puntos $P(0, 2, 0)$ y $Q(2, 1, -1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S ,

pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r .

- a) Determina las coordenadas de S . b) Calcula el área del triángulo PQS .

EJERCICIO 57 : Considera el plano $2x - y + z - 4 = 0$.

- a) Halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.
- b) Calcula el área del triángulo formado por estos tres puntos.

EJERCICIO 58 : $A(0, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$ y $C(0, 2, 5)$ son tres vértices de un tetraedro. El cuarto

vértice, D , está sobre la recta: $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ Halla las coordenadas de D para que el volumen del ortoedro sea 2 unidades cúbicas.

EJERCICIO 59 : Calcula el volumen de un cubo que tiene uno de sus lados sobre la recta

$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ y otro sobre la recta $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$.

EJERCICIO 60 : Halla el punto simétrico de $P(2, 1, 0)$ respecto del plano $\pi: 2x - y + z = 2$.

EJERCICIO 61 : Determina el punto simétrico de $A(2, 1, 4)$ respecto de la recta: $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

EJERCICIO 62 : Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-2, 0, 0)$ y $B(2, 0, 0)$ es 106. Identifica la figura resultante.

EJERCICIO 63 : Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$; $x + y - z = 2$

- Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.
- Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

EJERCICIO 64 : Considera la recta $r: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ y el plano $\pi: 3x + 4y - 6 = 0$

- Comprueba que r y π son paralelos.
- Calcula la distancia entre r y π
- Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a r .

EJERCICIO 65 : Determina la ecuación de un plano, π , paralelo al plano de ecuación $x - y + z + 2 = 0$ y que dista 20 unidades del punto $P(0, 2, 3)$.

EJERCICIO 66 : Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,0,-1)$, $C(5,2,1)$ y $D(4,3,3)$

- Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.
- Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.
- Determina una ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

EJERCICIO 67 : Dados los planos $\alpha: x + y - z = 1$ y $\beta: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 + s \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$, se pide:

- Determina su posición relativa.
- Calcula la distancia entre ellos.

EJERCICIO 68 : Sea el plano $\pi: x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta $r: x = y = z$, se pide:

- Calcula la distancia de la recta al plano.
- Hallar un plano que contenga a r y sea perpendicular a π .
- Hallar el punto simétrico de $P(-1,3,3)$ respecto de π

EJERCICIO 69 : Dadas las dos recta r y s , que se cortan, de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \quad y \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4} \quad \text{se pide calcular:}$$

- El punto P de corte de las rectas r y s .
- Un vector direccional de r y otro de s y el ángulo α que forman las rectas r y s en el punto de corte P .
- La ecuación implícita $ax + by + cz + d = 0$ del plano π que contiene a las rectas r y s .

EJERCICIO 70 : Dados el punto $Q(3,-1,4)$ y la recta r de ec. paramétrica $r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ se pide:

- Hallar la distancia del punto Q a la recta r .
- Justifica que la recta s que pasa por Q y tiene $\vec{a}(1,-2,1)$ como vector direccional no corta a r .
- Calcular la distancia entre las recta r y s

EJERCICIO 71 :

- a) Los puntos A(1,1,0), B(0,1,1) y C(-1,0,1) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD. Calcula las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.
 b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto B(0,1,1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y C(-1,0,1).

EJERCICIO 72 : Dadas las rectas r:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{s: } \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$$

- a) Estudiar su posición relativa. b) Calcula la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

EJERCICIO 73 : Considera el triángulo de vértices A(0,0,1), B(2,0,0) y C(1,1,1), ¿Cuál es la intersección de los (tres) planos que pasan por cada vértice siendo perpendiculares a la recta determinada por los otros dos vértices?

EJERCICIO 74 : Halla la ecuación continua de la recta formada por todos los puntos que equidistan de P(1,-1,0), Q(-1,3,2) y R(3,1,-2)

EJERCICIO 75 : Dada la recta r:
$$\begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi: x + y - 2 = 0$$

- a) Determina su posición relativa
 b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

EJERCICIO 76 : Dados el punto A(1,-2,-3), la recta r:
$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi: x - 2y - 3z + 1 = 0$$

- a) Escribe la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π .
 b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π

EJERCICIO 77 : Sean los puntos A($\lambda, 2, \lambda$), B(2,- $\lambda, 0$), C($\lambda, 0, \lambda + 2$)

- a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?
 b) Comprobar que si A, B, C no están alineados el triángulo que forman es isósceles
 c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

EJERCICIO 78 : Un helicóptero situado en el punto P(1,2,1) quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$

- a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleva al punto más cercano del plano π .
 b) Calcula dicho punto c) Calcula la distancia que deberá recorrer.

EJERCICIO 79 : Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1,1,0) y corta a

las rectas: $r_1: \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{2}$ y $r_2: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + y - z + 8 = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 80 : Escribe las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector (1,-1,0) y que pasa por P', siendo P' el simétrico de P(0,-2,0) respecto al plano $\pi: x + 3y + z = 5$