

TEMA 8 - LÍMITES DE FUNCIONES

CÁLCULO DE LÍMITES

EJERCICIO 1 : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 24x + 48}{x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}$

d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}{2x + 7}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 - 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x + 3}$

n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x^3 - 1}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{\sqrt{x+4} - 3}$

p) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

q) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (\cos x - 1)}{\sin(5x^2)}$

t) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}$

u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arctg x}{\cos x \cdot \text{sen}(2x)^2}$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 3x + 7} - 2x$

w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+3} \right)^{2x}$

x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x}{2}}$

y) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+3x)}{2x}$

z) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{(x+1)^2}$

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9}$

3) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{x-4}}$

CONTINUIDAD

EJERCICIO 2 : Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x+5}{x^2 - 5x + 6}}$ b) $y = \frac{x+5}{x^2 - 5x + 6}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

EJERCICIO 3 : Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 3 \\ 2x+1 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ 3x & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 7 \\ x-6 & \text{si } 7 < x \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

si $-\pi/2 \leq x < 0$

si $0 \leq x < 1$

si $0 \leq x < 1$

$\frac{x^4 - .1}{x^2 - 1}$

si $1 < x \leq 3$

EJERCICIO 4 : La función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es discontinua en $x = 0$ ¿ Se puede evitar dicha discontinuidad ?

EJERCICIO 5 : Hallar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

a) ¿ Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

b) Estudia su continuidad en el punto $x = 2$

EJERCICIO 6 : Estudiar la continuidad de la siguiente función, indicando el tipo de discontinuidad que presenta en los puntos donde no es continua.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 5 \\ x - 3 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

EJERCICIO 7 : Estudia la continuidad, clasificando las discontinuidades que presente, de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 + x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } 1 < x < 5 \end{cases}$$

EJERCICIO 8 : Calcular “a” y “b” para que la función $f(x)$ sea continua en todo R.

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + a & \text{si } x \leq 0 \\ 2x/\pi + 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ b \cdot \sin(x) & \text{si } x \leq \pi/2 \end{cases}$$

EJERCICIO 9 : Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ kx & \text{si } x < 1 \end{cases}$, calcular “k” para que sea continua en todos los puntos.

TEOREMAS DE CONTINUIDAD

EJERCICIO 10 : Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje X y, en cada caso, establece un intervalo cerrado y uno abierto donde esté incluido el punto de corte.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$ b) $f(x) = 2x - \cos x$

EJERCICIO 11 : Demuestra que la ecuación $1 + \sin x = \sqrt{x}$ tiene, al menos una solución y hálala con aproximación a las décimas.

EJERCICIO 12 : Demuestra que la ecuación $x^4 + x - 1 = 0$ tiene solución positiva.

EJERCICIO 13 : Demuestra que las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto.

EJERCICIO 14 : Comprueba que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 5x - 4 = 0$ tiene tres raíces reales. Calcula tres intervalos de longitud 1 en los que estén incluidas las raíces.

ASÍNTOTAS

EJERCICIO 15 : Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y haz una representación aproximada de cómo se acerca la función a dichas asíntotas:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{2x + 4}{4 - x^2}$

c) $y = \frac{3x^2}{2 - x}$

d) $y = \sqrt{x + 2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

f) $y = \log_2(x+3)$