TEMA 9 – DERIVADAS

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 1 : Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Solución: $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1).(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$

EJERCICIO 2 : Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

Solución: $f'(1) = \lim_{x\to 1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{3}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 3 : Halla la derivada de la función f(x)=(x – 1)^2 en x=2, aplicando la definición de derivada

Solución: $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$

EJERCICIO 4 : Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x}$.

Solución: $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2-2x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-2x}{(x-1)x} = \lim_{x\to 1} \frac{2(1-x)}{(x-1)x} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x} = -2$

FUNCIÓN DERIVADA, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 5 : Halla *f´(x)*, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = \frac{x+1}{3}$ **c)** $f(x) = 2x^2$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **e)** $f(x) = \frac{2x}{3}$

Solución:

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+h^2+2xh+1-x^2-1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2x) = 2x$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h+1}{3}-\frac{(x+1)}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2+h^2+2xh)-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2+2h^2+4xh-2x^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+4xh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h+4x)}{h} = \lim_{h\to 0} (2h+4x) = 4x$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$

e) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)}{3}-\frac{2x}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2x+2h-2x}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$

CÁLCULO DE DERIVADAS INMEDIATAS

EJERCICIO 6 : Halla la función derivada de:

a) $f(x)=3x^4-2x+5$ **b)** $f(x)=e^x$ **c)** $f(x)=2x^3-x^2+1$ **d)** $f(x)=\ln x$

e) $f(x)=2x^5+\frac{x}{3}$ **f)** $f(x)=\operatorname{sen} x$ **g)** $f(x)=x^3-3x^2+\frac{1}{5}$ **h)** $f(x)=\cos x$

i) $f(x)=4x^3-3x^2+2$ **j)** $f(x)=tg\, x$ **k)** $f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$ **l)** $f(x)=xe^x$

m) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-2}$ **n)** $f(x)=x^2\operatorname{sen} x$ **ñ)** $f(x)=\frac{1-x^2}{x-3}$ **o)** $f(x)=x\ln x$

p) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{x}$ **q)** $f(x)=\frac{3x+1}{e^x}$ **r)** $f(x)=\frac{3x^2}{2x+3}$ **s)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{sen} x$

Solución:

a) $f'(x)=12x^3-2$ b) $f'(x)=e^x$ c) $f'(x)=6x^2-2x$ d) $f'(x)=\frac{1}{x}$

e) $f'(x)=10x^4+\frac{1}{3}$ f) $f'(x)=\cos x$ g) $f'(x)=3x^2-6x$ h) $f'(x)=-\operatorname{sen}x$

i) $f'(x)=12x^2-6x$ j) $f'(x)=1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$

k) $f'(x)=\frac{2x(2x+1)-(x^2+2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$ l) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

m) $f'(x)=\frac{3(x^2-2)-(3x-1)2x}{(x^2-2)^2}=\frac{3x^2-6-6x^2+2x}{(x^2-2)^2}=\frac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2}$ n) $f'(x)=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x$

ñ) $f'(x)=\frac{-2x(x-3)-(1-x^2)}{(x-3)^2}=\frac{-2x^2+6x-1+x^2}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2}$ o) $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

p) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$ q) $f'(x)=\frac{3e^x-(3x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2}=\frac{2-3x}{e^x}$

r) $f'(x)=\frac{6x(2x+3)-3x^2\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{12x^2+18x-6x^2}{(2x+3)^2}=\frac{6x^2+18x}{(2x+3)^2}$

s) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}\operatorname{sen}x+x^{1/3}\cdot\cos x=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}x+\sqrt[3]{x}\cdot\cos x$

CÁLCULO DE DERIVADAS

EJERCICIO 7 : Halla la función derivada de:

a) $f(x)=(3x^2+x)^4$ **b)** $f(x)=\sqrt{4x^3+1}$ **c)** $f(x)=e^{4x^3-2x}$ **d)** $f(x)=\ln(3x^4-2x)$

e) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ **f)** $f(x)=3x^4-\frac{9x^2}{3}$ **g)** $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2-1}$ **h)** $f(x)=xe^x$

i) $f(x)=8x^5-2x^3+\frac{1}{3}$ **j)** $f(x)=(x^4-3x)e^x$ **k)** $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$ **l)** $f(x)=\frac{3x^4}{2}-\frac{6x^3}{5}$

m) $f(x)=\frac{x^2-3}{2x^3+1}$ **n)** $f(x)=\ln(x^4-2x)$ **ñ)** $f(x)=\frac{-2x^4+3x^2}{5}$ **o)** $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+3x}$

p) $f(x)=\sqrt{2x^3-3}$ **q)** $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{5}x^7$ **r)** $f(x)=e^x\cdot\operatorname{sen}x$ **s)** $f(x)=\cos\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$

t) $f(x)=4x^5-\frac{2x}{3}$ **u)** $f(x)=(x^2-3x)e^x$ **v)** $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$

w) $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$ **x)** $f(x) = \frac{4x^3 - 3}{x^2 - 1}$ **y)** $f(x) = e^{7x^4 - 3}$

z) $f(x) = 9x^2 - 3x^4 + \frac{1}{3}$ **1)** $f(x) = \frac{3x^3}{4 - x^2}$ **2)** $f(x) = ln\left(2x^5 + 3x\right)$

3) $f(x) = \frac{-3x^5 + 2x}{7}$ **4)** $f(x) = x^4 cosx$ **5)** $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

6) $f(x) = \frac{4x^6}{3} - 2x + 5$ **7)** $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ **8)** $f(x) = \sqrt{2x - 3x^4}$

Solución:

a) $f'(x) = 4\left(3x^2 + x\right)^3 \cdot (6x + 1)$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 1}}$

c) $f'(x) = e^{4x^3 - 2x} \cdot \left(12x^2 - 2\right)$

d) $f'(x) = \frac{1}{3x^4 - 2x} \cdot \left(12x^3 - 2\right) = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$

e) $f'(x) = cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x-3) - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x - 3 - 2x - 2}{(2x-3)^2} \cdot cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$

f) $f'(x) = 12x^3 - \frac{18x}{3}$

g) $f'(x) = \frac{6x\left(x^2 - 1\right) - \left(3x^2 - 2\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{6x^3 - 6x - 6x^3 + 4x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

h) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$ i) $f'(x) = 40x^4 - 6x^2$

j) $f'(x) = \left(4x^3 - 3\right)e^x + \left(x^4 - 3x\right)e^x = \left(4x^3 - 3 + x^4 - 3x\right)e^x = \left(x^4 + 4x^3 - 3x - 3\right)e^x$

k) $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

l) $f'(x) = \frac{12x^3}{2} - \frac{18x^2}{5} = 6x^3 - \frac{18x^2}{5}$

m) $f'(x) = \frac{2x\left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 - 3\right) \cdot 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \frac{4x^4 + 2x - 6x^4 + 18x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \frac{-2x^4 + 18x^2 + 2x}{\left(2x^3 + 1\right)^2}$

n) $f'(x) = \frac{1}{x^4 - 2x} \cdot \left(4x^3 - 2\right) = \frac{4x^3 - 2}{x^4 - 2x}$

ñ) $f'(x) = \frac{-8x^3 + 6x}{5}$

o) $f'(x) = \frac{3\left(x^2 + 3x\right) - (3x - 4)(2x + 3)}{\left(x^2 + 3x\right)^2} = \frac{3x^2 + 9x - 6x^2 - 9x + 8x + 12}{\left(x^2 + 3x\right)^2} = = \frac{-3x^2 + 8x + 12}{\left(x^2 + 3x\right)^2}$

p) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - 3}} \cdot 6x^2 = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3 - 3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 3}}$

q) $f'(x) = 2x^3 - \frac{21}{5}x^6$

r) $f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}x + e^x \cdot \cos x = (\operatorname{sen}x + \cos x)e^x$

s) $f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)\cdot\frac{3\left(x^2+2\right)-3x\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2} = -\left(\frac{3x^2+6-6x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) =$

$= -\frac{-3x^2+6}{\left(x^2+2\right)^2}\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) = \frac{3x^2-6}{\left(x^2+2\right)^2}\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$

t) $f'(x) = 20x^4 - \frac{2}{3}$

u) $f'(x) = (2x-3)e^x + \left(x^2-3x\right)e^x = e^x\left(2x-3+x^2-3x\right) = e^x\left(x^2-x-3\right)$

v) $f'(x) = cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-(x-1)2x}{\left(x^2+1\right)^2} = cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-2x^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} =$

$= \frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\cdot cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$

w) $f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$

x) $f'(x) = \frac{12x^2\left(x^2-1\right)-\left(4x^3-3\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{12x^4-12x^2-8x^4+6x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{4x^4-12x^2+6x}{\left(x^2-1\right)^2}$

y) $f'(x) = e^{7x^4-3}\cdot\left(28x^3\right) = 28x^3\cdot e^{7x^4-3}$

z) $f'(x) = 18x - 12x^3$

1) $f'(x) = \frac{9x^2\left(4-x^2\right)-3x^3(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{36x^2-9x^4+6x^4}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{36x^2-3x^4}{\left(4-x^2\right)^2}$

2) $f'(x) = \frac{1}{2x^5+3x}\cdot\left(10x^4+3\right) = \frac{10x^4+3}{2x^5+3x}$

3) $f'(x) = \frac{-15x^4+2}{7}$

4) $f'(x) = 4x^3 cos x + x^4(-\text{sen}x) = 4x^3 cos x - x^4\text{sen}x$

5) $f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

6) $f'(x) = \frac{24x^5}{3} - 2 = 8x^5 - 2$

7) $f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$

8) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-3x^4}}\cdot\left(2-12x^3\right) = \frac{2-12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \frac{2\left(1-6x^3\right)}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \frac{1-6x^3}{\sqrt{2x-3x^4}}$

<u>EJERCICIO 8</u> : Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \left(e^x + x^5\right)^3$ **b)** $f(x) = \frac{2x}{(x+2)^2}$ **c)** $f(x) = \left(x^2 + \sqrt{x}\right)\cdot\ln x$ **d)** $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

e) $y = e^{2x+1}\cdot\text{sen}\,x$ **f)** $y = \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)$ **g)** $y = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$ **h)** $y = \cos^2\left(x^4-2\right)$

i) $f(x) = \left(x^2-2\right)\cdot e^x$ **j)** $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{4x+2}}$

Solución:

a) $f'(x) = 3\,(e^x + x^5)^2 \cdot (e^x + 5x^4)$

b) $f'(x) = \dfrac{2(x+2)^2 - 2x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{(x+2)\,[2(x+2)-4x]}{(x+2)^4} = \dfrac{2x+4-4x}{(x+2)^3} = \dfrac{-2x+4}{(x+2)^3}$

c) $f'(x) = \left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \ln x + \left(x^2 + \sqrt{x}\right) \cdot \dfrac{1}{x} = \left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ln x + x + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{x-1}{x+2}} \cdot \dfrac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)}{(x-1)} \cdot \dfrac{(x+2-x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x-1)\,(x+2)} = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

e) $y' = e^{2x+1} \cdot 2 \cdot sen\,x + e^{2x+1} \cdot cos\,x = 2\,e^{2x+1} \cdot sen\,x + e^{2x+1} \cdot cos\,x = = e^{2x+1}\,(2sen\,x + cos\,x)$

f) $y' = \dfrac{1}{\frac{x+3}{2x+1}} \cdot \dfrac{2x+1-(x+3) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{(2x+1)}{(x+3)} \cdot \dfrac{(2x+1-2x-6)}{(2x+1)^2} = \dfrac{-5}{(x+3)\,(2x+1)} = = \dfrac{-5}{2x^2+7x+3}$

g) $y' = \dfrac{3(x-1)^2 - (3x+1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)\,[3(x-1)-2(3x+1)]}{(x-1)^4} = \dfrac{3x-3-6x-2}{(x-1)^3} = = \dfrac{-3x-5}{(x-1)^3}$

h) $y' = 2cos\,(x^4 - 2) \cdot [-sen\,(x^4-2)] \cdot 4x^3 = -8x^3\,cos\,(x^4-2) \cdot sen\,(x^4-2)$

i) $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2-2) \cdot e^x = (2x + x^2 - 2)\,e^x = (x^2 + 2x - 2)\,e^x$

j) $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3x-1}{4x+2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{3(4x+2)-(3x-1)\cdot 4}{(4x+2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4x+2}{3x-1}\right)^{1/2} \cdot \frac{12x+6-12x+4}{(4x+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(4x+2)^{1/2}}{(3x-1)^{1/2}} \cdot \frac{10}{(4x+2)^2} = \frac{5}{(3x-1)^{1/2} \cdot (4x+2)^{3/2}} = \frac{5}{\sqrt{(3x-1)\,(4x+2)^3}}$$

<u>EJERCICIO 9</u> : Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = tg^2\,(2x^4 - 1)$ **b)** $f(x) = (sen\,x)^{x+1}$ **c)** $5x^2 + 5y^2 = 4xy$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ **e)** $f(x) = x^{x+2}$ **f)** $3x^4 - 2y^3 + xy = 1$

g) $y = e^{2x+1} \cdot sen\,(x-1)$ **h)** $y = (3x^2+1)^{2x}$ **i)** $x^2 - y^2 + xy = 5$

j) $y = cos^2\,(x^4 - 2)$ **k)** $y = (cos\,x)^{2x}$ **l)** $2x^2y^2 + 3x^2 + y^2 = 2$

m) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{3x-2}}$ **n)** $f(x) = (2x+1)^x$ **ñ)** $x^2 + 3xy + y^2 = 0$

Solución:

a) $f'(x) = 2tg\,(2x^4-1) \cdot (1 + tg^2\,(2x^4-1)) \cdot 8x^3 = 16x^3\,tg\,(2x^4-1) + 16x^3\,tg^3\,(2x^4-1)$

b) $y = (sen\,x)^{x+1} \;\rightarrow\; ln\,y = ln\,(sen\,x)^{x+1} \;\rightarrow\; ln\,y = (x+1) \cdot ln\,(sen\,x) \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \ln(\text{sen}\,x) + (x+1) \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} \Rightarrow\; y' = (\text{sen}\,x)^{x+1}\,\left[\ln(\text{sen}\,x) + (x+1)\,\text{cotg}\,x\right]$$

c) $10x + 10y \cdot y' = 4y + 4x \cdot y' \Rightarrow 10y \cdot y' - 4x \cdot y' = 4y - 10x \Rightarrow y'\,(10y - 4x) = 4y - 10x$

$y' = \dfrac{4y-10x}{10y-4x} \;\rightarrow\; y' = \dfrac{2y-5x}{5y-2x}$

d) $f(x) = ln\,(x-1) - ln\,(x+2) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+2-x+1}{(x-1)\,(x+2)} = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

e) $y = x^{x+2} \;\rightarrow\; ln\,y = ln\,x^{x+2} \;\rightarrow\; ln\,y = (x+2)\,ln\,x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + (x+2) \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{x+2} \cdot \left[\ln x + \dfrac{x+2}{x}\right]$

f) $12x^3 - 6y^2 \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \Rightarrow y'(x - 6y^2) = -12x^3 - y \Rightarrow y' = \dfrac{-12x^3 - y}{x - 6y^2}$

g) $y' = e^{2x+1} \cdot 2 \cdot sen\,(x-1) + e^{2x+1} \cdot cos\,(x-1) = e^{2x+1}\,[2\,sen\,(x-1) + cos\,(x-1)]$

h) $y = (3x^2+1)^{2x} \rightarrow\ ln\,y = ln\,(3x^2+1)^{2x} \rightarrow\ ln\,y = 2x\,ln\,(3x^2+1) \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = 2\ln\left(3x^2+1\right) + 2x \cdot \frac{6x}{3x^2+1} \Rightarrow y' = \left(3x^2+1\right)^{2x} \cdot \left[2\ln\left(3x^2+1\right) + \frac{12x^2}{3x^2+1}\right]$$

i) $2x - 2y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \Rightarrow -2y \cdot y' + x \cdot y' = -2x - y \Rightarrow y'(x - 2y) = -2x - y$

$$y' = \frac{-2x - y}{x - 2y}$$

j) $y' = 2cos\,(x^4 - 2) \cdot (-sen\,(x^4 - 2)) \cdot 4x^3 = -8x^3\,cos\,(x^4-2) \cdot sen\,(x^4-2)$

k) $y = (cos\,x)^{2x} \ \rightarrow\ ln\,y = ln\,(cos\,x)^{2x} \rightarrow\ ln\,y = 2x\,ln\,(cos\,x) \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = 2\ln(\cos x) + 2x \cdot \left(\dfrac{-\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right)$

$$y' = (cos\,x)^{2x} \cdot [2\,ln\,(cos\,x) - 2x\,tg\,x]$$

l) $4xy^2 + 2x^2 \cdot 2y \cdot y' + 6x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 4x^2yy' + 2yy' = -6x - 4xy^2 \Rightarrow y'(4x^2y + 2y) = -6x - 4xy^2$

$$y' = \frac{-6x - 4xy^2}{4x^2y + 2y}$$

m) $f(x) = \left(\dfrac{4x^2}{3x-2}\right)^{1/3} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{4x^2}{3x-2}\right)^{-2/3} \cdot \frac{8x(3x-2) - 4x^2 \cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{3x-2}{4x^2}\right)^2} \cdot \frac{24x^2 - 16x - 12x^2}{(3x-2)^2} = = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{3x-2}{4x^2}\right)^2} \cdot \frac{12x^2 - 16x}{(3x-2)^2}$$

n) $y = (2x+1)^x \ \rightarrow\ ln\,y = ln\,(2x+1)^x \rightarrow\ ln\,y = x\,ln\,(2x+1) \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln(2x+1) + x \cdot \dfrac{2}{2x+1}$

$$y' = (2x+1)^x \cdot \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}\right]$$

ñ) $2x + 3y + 3x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 3x \cdot y' + 2y \cdot y' = -2x - 3y \Rightarrow y'(3x+2y) = -2x - 3y \Rightarrow y' = \dfrac{-2x-3y}{3x+2y}$

ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD

EJERCICIO 10 : Estudia la derivabilidad de esta función, según los valores de *a* y *b*:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 + ax^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ bx + \ln x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

- Continuidad:

- En $x \neq 0$ y $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(3x^2+1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^3 + ax^2\right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ no es continua en } x = 0.$$

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^3 + ax\right) = 1 + a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(bx + \ln x\right) = b \\ f(1) = b \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $b = 1 + a$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 + 2ax & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ b + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

- En $x = 0$: $f(x)$ no es derivable, pues no es continua en $x = 0$.
- En $x = 1$: Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$, han de ser iguales las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 + 2a \\ f'(1^+) = b + 1 \end{array}\right\} \quad 3 + 2a = b + 1$$

- Por tanto, $f(x)$ será derivable en $\mathbf{R} - \{0\}$ cuando y solo cuando: $\left.\begin{array}{l} b = 1 + a \\ 3 + 2a = b + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \end{array}$
- En $x = 0$ no es derivable, cualesquiera que sean a y b.

<u>EJERCICIO 11</u> : Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo R:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ -bx^2 + 2x & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Solución:

- Continuidad:

- En $x \neq -1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.
- En $x = -1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(x^2 + \dfrac{a}{x}\right) = 1 - a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(-bx^2 + 2x\right) = -b - 2 \\ f(-1) = -b - 2 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de ser $1 - a = -b - 2$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ -2bx + 2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

- En $x = -1$: Como $f'(-1^-) = -2 - a$ y $f'(-1^+) = 2b + 2$, para que $f(x)$ sea derivable en $x = -1$, ha de ser $-2 - a = 2b + 2$.

- Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable en todo $\mathbf{R}$ cuando:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - a = -b - 2 \\ -2 - a = 2b + 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b = 3 \\ a + 2b = -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{-7}{3} \end{array}$$

EJERCICIO 12 **: Estudia la derivabilidad de la función:** $\mathbf{f(x)=\begin{cases} -x^4+3x^2 & si \quad x<1 \\ 2x^2 & si \quad 1\le x<2 \\ x^2+4x-4 & si \quad x\ge 2 \end{cases}}$

Solución:

- Continuidad:

- En $x \neq 1$ y $x \neq 2$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-x^4+3x^2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(2x^2\right) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=1$.

- En $x=2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(2x^2\right) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(x^2+4x-4\right) = 8 \\ f(2) = 8 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=2$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$: f (x) es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} -4x^3+6x & si \quad x<1 \\ 4x & si \quad 1<x<2 \\ 2x+4 & si \quad x>2 \end{cases}$

- En $x=1$: Como $f'(1^-)=2 \neq f'(1^+)=4$, $f(x)$ no es derivable en $x=1$.
- En $x=2$: Como $f'(2^-)=8=f'(2^+)$, $f(x)$ es derivable en $x=2$, y su derivada es $f'(2)=8$.

EJERCICIO 13 : Halla los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable:

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} 3x^2-ax+b & si \quad x<1 \\ ax^3-bx+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}}$$

Solución:

- Continuidad:

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x^2-ax+b) = 3-a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax^3-bx+2) = a-b+2 \\ f(1) = a-b+2 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $3-a+b = a-b+2$; es decir, $2a-2b = 1$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x-a & si \quad x<1 \\ 3ax^2-b & si \quad x>1\end{cases}$

- En $x = 1$: Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales han de ser iguales: $\left.\begin{matrix} f'(1^-)=6-a \\ f'(1^+)=3a-b\end{matrix}\right\} \; 6-a=3a-b$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable si: $\left.\begin{matrix} 2a-2b=1 \\ 6-a=3a-b\end{matrix}\right\} \; a=\dfrac{11}{6}; \quad b=\dfrac{4}{3}$

EJERCICIO 14 : Estudia la derivabilidad de la siguiente función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x & si \quad x<-1 \\ x^2+4 & si \quad -1\leq x<0 \\ 2^x-x+3 & si \quad x\geq 0\end{cases}}$

Solución:

- Continuidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = -1$ $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (3x^2-2x) = 5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+4) = 5 \\ f(-1) = 5 \end{cases}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=-1$

- En $x = 0$: $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2+4) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2^x-x+3) = 4 \\ f(0) = 4 \end{cases}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=0$

- Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x-2 & si \quad x<-1 \\ 2x & si \quad -1<x<0 \\ 2^x \ln 2-1 & si \quad x>0\end{cases}$

- En $x = -1$: Como $f'(-1^-) = -8 \neq f'(-1^+) = -2$; $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

- En $x = 0$: Como $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = (\ln 2) - 1$; $f(x)$ tampoco es derivable en $x = 0$.