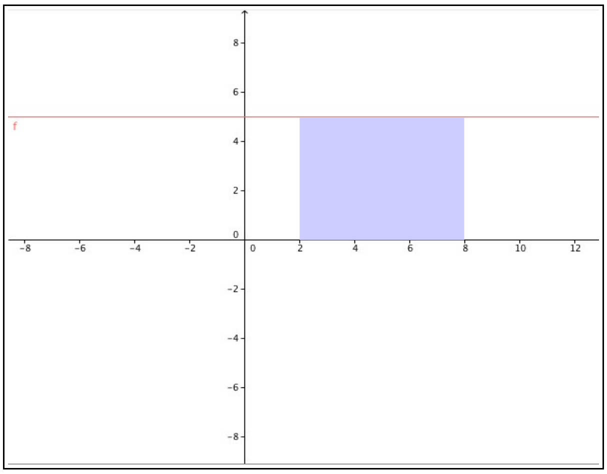
INTEGRAL DEFINIDA. CÁLCULO DE ÁREAS.

1. ÁREA LIMITADA POR UNA FUNCIÓN. INTEGRAL DEFINIDA.

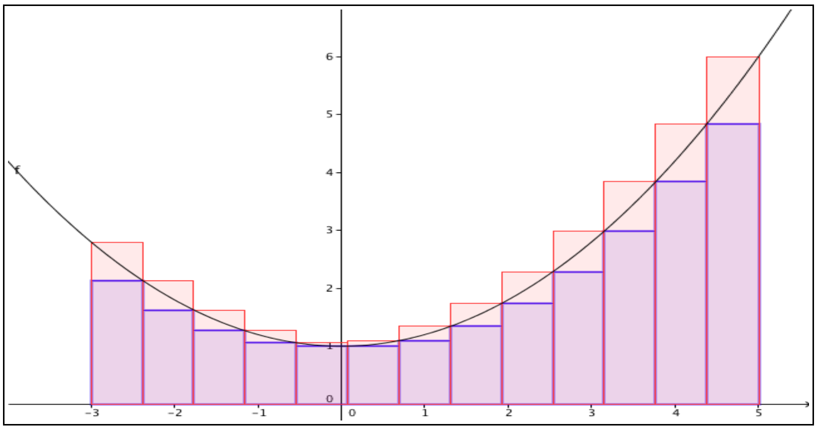
Si tenemos una función f(x) con una forma conocida, por ejemplo una recta, una semicircunferencia,... podemos calcular el área limitada por f(x), el eje OX entre dos puntos a y b, de forma sencilla. Veamos un ejemplo:



Ejm: Si en esta función f(x) = 5, queremos calcular el área limitada por la función, el eje OX y dos puntos x = 2 y x = 8, lo único que tendríamos que calcular sería el área del rectángulo que vemos señalado en color azul. Como sabemos se calcularía A = (8-2)*5 = 30, es decir, base por altura.

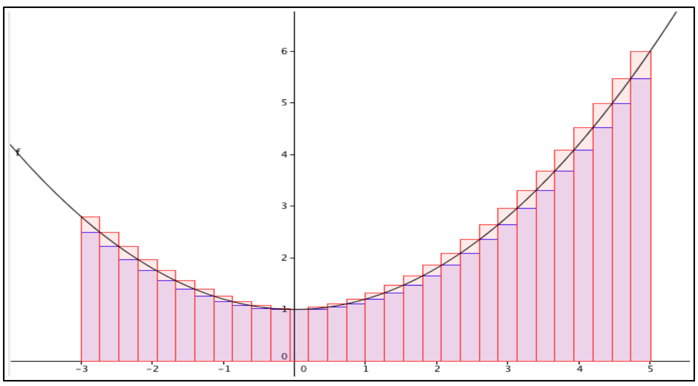
Si tuviésemos por ejemplo un semicírculo, aplicaríamos la fórmula del semicírculo y así haríamos con todas las funciones con formas conocidas.

El problema viene al intentar calcular el área limitada por una función f(x) cualquiera, que no se ajuste a ninguna fórmula de las que conocemos para calcular el área.



Ejm: En la función de la parábola que tenemos en la figura, podemos intentar calcular el área limitada por la función en el intervalo [-3, 5] por aproximaciones (**aproximaciones sucesivas**), para ello dividimos el intervalo en rectángulos iguales. El área sería la suma de las áreas de estos rectángulos.

Tenemos dos tipos de aproximaciones sucesivas, por **defecto** (en azul) y por **exceso** (en naranja).



Si nos fijamos, si tomásemos los rectángulos más finos, la aproximación es mejor, más cerca estará esa aproximación del área real.

Y si en vez de tomar el valor máximo (aproximación por exceso) o mínimo (aproximación por defecto) de cada intervalo, tomásemos el valor intermedio la aproximación sería mejor todavía.

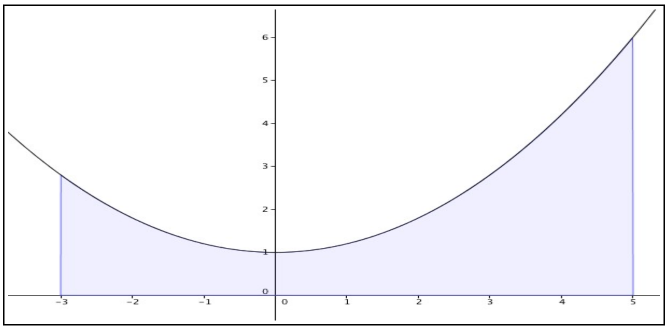
A la suma de todas estas particiones

(rectángulos) tan pequeños que el límite de las aproximaciones por exceso sea igual al límite de las aproximaciones por defecto, se le llama área y se puede calcular mediante integrales.

Dada una función y = f(x), el área limitada por la función f(x), el eje OX y las rectas x=a y x=b, se denomina integral definida entre a y b de f(x) y se representa por:

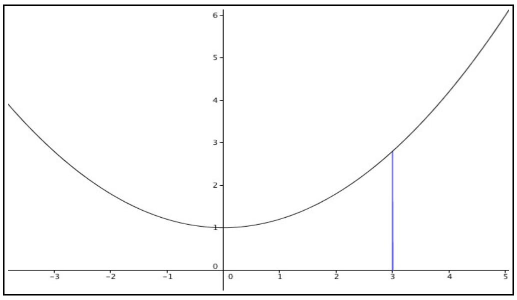
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejm: El área sería $A=\int_a^b f(x)\,dx$ que en este caso, para el intervalo [-3, 5] sería $A=\int_{-3}^5 f(x)\,dx$. Sería el área sombreada de azul.



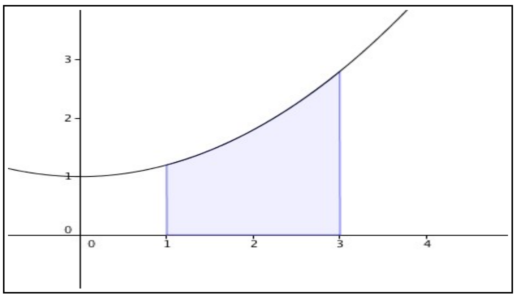
2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$



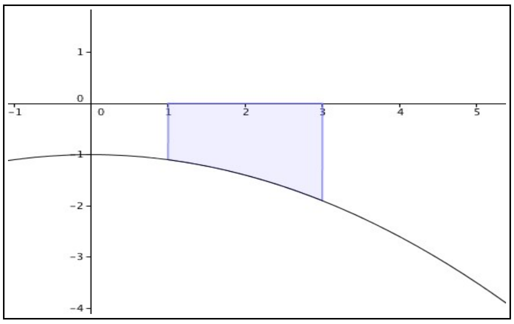
En el gráfico vemos que el área es cero, para el límite a = 3.

- Si una función $f(x)>0, \forall x\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx>0$



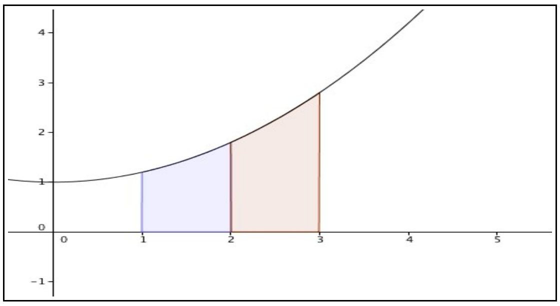
Como vemos, el área de una función positiva, es positiva.

- Si una función $f(x)<0, \forall x \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx<0$



Como vemos, el área de una función negativa es negativa.

- Dados tres puntos a < b < c: $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$

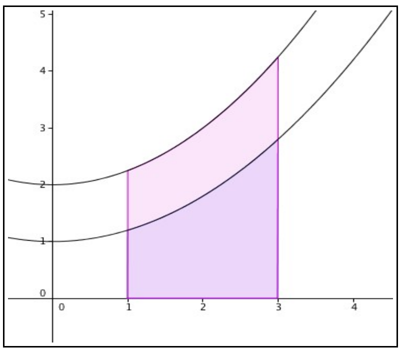


Como vemos, el área en el intervalo [1,2] más el área del intervalo [2,3] es igual al área del intervalo [1, 3]

- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

- $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

- Si $\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x), entonces: \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

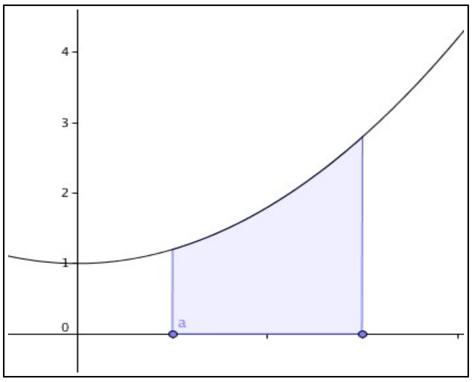


Si nos fijamos, si la función inferior es menor que la superior, el área que encierra la función menor también es menor.

- Al permutar los límites de integración, la integral cambia de signo:
$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

3. FUNCIÓN INTEGRAL.

Podemos considerar la **función integral** como el área entre un punto fijo del dominio a y cualquier otro punto x:



$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

A esta función F(x) la llamaremos **función integral** o **función área.**

Una vez calculada nuestra función área, podemos hallar el área para cada valor de x, es decir, podremos hacer:

$$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

4. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. REGLA DE BARROW.

Teorema fundamental del cálculo integral.

La función integral F(x) asociada a una función f(x) cumple:

F'(x) = f(x)

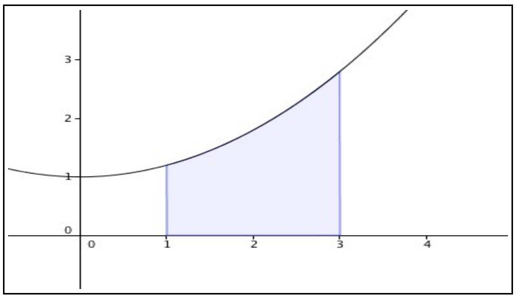
Regla de Barrow

Para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ seguiremos los siguientes pasos:

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

5. CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRACIÓN

- Si la función f(x) es continua en [a,b] y $f(x)\geqslant 0$, la región limitada por f(x), x = a, x = b e y = 0, tiene por área:



$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

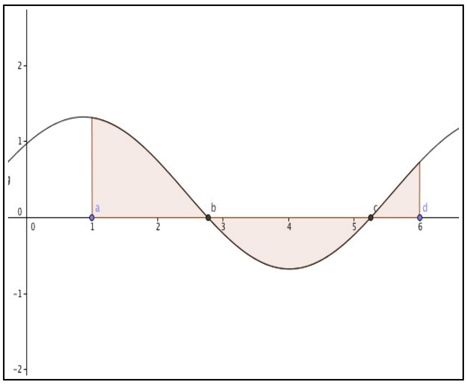
En este caso a = 1 y b = 3.

- Si la función es negativa, como por ejemplo f(x) = -2x y queremos calcular el área en el intervalo [2,4], pues lo que haremos será:

$$\int_2^4 -2x\,dx = \left[\frac{-2x^2}{2}\right]_2^4 = \left[-x^2\right]_2^4 = -16-(-4) = -12$$

En este caso el área sería el valor absoluto del resultado, es decir, **12**.

- Si la función f(x) es negativa sólo en un intervalo (como podéis ver en la figura), para calcular el área de la región limitada, se toma f(x) en valor absoluto:

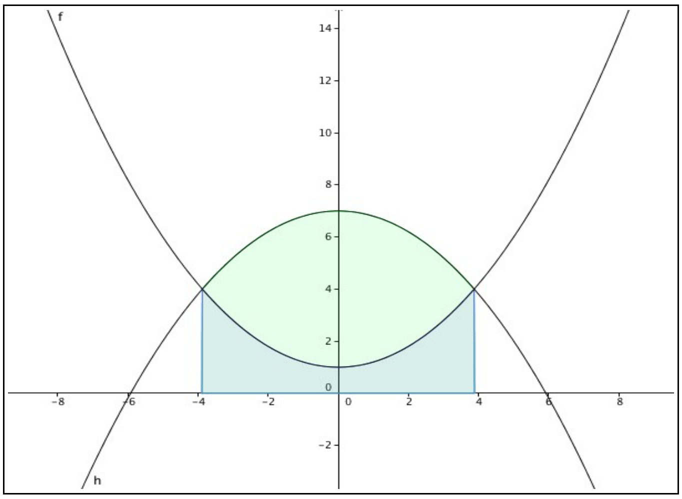


$$A=\int_a^d |f(x)|\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c (-f(x))\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$$

6. ÁREA ENTRE DOS CURVAS.

Si f(x) y g(x) son continuas en [a,b] y $f(x)\geqslant g(x)$, el área de la región limitada por f(x), g(x), x = a y x = b es:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$



Como se puede observar las dos funciones son positivas y en este caso h(x) es mayor que f(x) en la región que nos interesa, por tanto el área que encierran sería:

$$A=\int_{-4}^4 [h(x)-f(x)]\,dx$$

Para calcular el área limitada por dos funciones, es necesario obtener puntos en donde las funciones se cortan.

Ejm: Para calcular el área de la región limitada por las funciones $f(x)=x^3-2x$ y $g(x)=2x$, lo primero que haremos será calcular los puntos donde se cortan las funciones, para ello se igualan f(x) = g(x) y se resuelve la ecuación.

$$x^3-2x=2x \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0$$

Se corta en x= 0, en x=2 y en x=-2. Sustituímos en cualquiera de las dos funciones y tenemos que se corta en los puntos (-2,-4), (0,0), (2,4).

El área sería:

$$A=\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{0}[f(x)-g(x)]dx+\int_{0}^{2}[g(x)-f(x)]dx=$$

$$\int_{-2}^{0}[x^3-2x-2x]dx+\int_{0}^{2}[2x-x^3+2x]dx=$$

$$\int_{-2}^{0}[x^3-4x]dx+\int_{0}^{2}[-x^3+4x]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{2}=$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{-x^4}{4}+2x^2\right]_{0}^{2}=\left[0-(\frac{(-2)^4}{4}-2\cdot(-2)^2)\right]+\left[(\frac{-2^4}{4}+2\cdot 4)-0\right]=8$$