TEMA 4 – RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

4.1 – TEOREMA DE ROUCHÉ FROBENIUS

TEOREMA: Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Llamamos **matriz del sistema** a la matriz, A, formada por los coeficientes de las incógnitas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y **matriz ampliada**, A’, a la matriz del sistema ampliada con los términos independientes

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Si rango A = rango A´ = Nº Incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado
Si rango A = rango A’ $\neq$ Nº Incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado
Si rango A $\neq$ rango A’ $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

4.2 – REGLA DE CRAMER

TEOREMA: Dado un sistema de ecuaciones lineales con **n ecuaciones y n incógnitas**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \ldots \\ a_{n3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots. + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \ldots + A_nx_n = B$$

Si el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero, **$|A| \neq 0$** $\Rightarrow$ Rango A = Rango A’ = Nº de incógnitas $\Rightarrow$ **El sistema es compatible determinado** y por tanto tiene una única solución que se puede hallar del siguiente modo.

$$\mathbf{x_1} = \frac{|B \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots \quad A_n|}{|A|}, \quad \mathbf{x_2} = \frac{|A_1 \quad B \quad A_3 \quad \ldots \quad A_n|}{|A|}, \ldots., \quad \mathbf{x_n} = \frac{|A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots \quad B|}{|A|}$$

4.4 – SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Se llama **homogéneo** el sistema de ecuaciones cuyos términos independientes son todos cero.

Se caracteriza por las dos propiedades siguientes:
- Un sistema homogéneo tiene, con seguridad, la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,…. Por eso se le llama **solución trivial.**
- Para que un sistema homogéneo tenga otras soluciones, es necesario y suficiente que:
  Rango A < Nº Incógnitas.

4.5 – DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON PARÁMETRO.

Si el sistema tiene el **mismo número de ecuaciones que de incógnitas.**

- Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y se iguala a cero.
- Se resuelve la ecuación
- Un caso más que valores del parámetro del apartado anterior.
  - CASO I: Si $a \in R - \{a_1, a_2, \dots\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado y se resuelve por Cramer (Queda el resultado en función del parámetro.
  - CASO II: $a = a_1 \Rightarrow$ Se sustituye la "a" por el valor de "a_1" y se resuelve aplicando el teorema de Rouché Frobenius (Se hace Gauss y se estudian los rangos)

Si el sistema tiene **distinto número de ecuaciones que de incógnitas,** se resuelve por Rouché-Frobenius (Gauss)

- Se ordenan las ecuaciones llevando el parámetro lo más abajo y a la derecha posible.
- Se hacen ceros debajo de la diagonal principal (si hay un rectángulo de ceros se continua haciendo ceros)
- Se igualan, por separado, los elementos de la diagonal a cero.
- Un caso más que valores del parámetro y se estudian los rangos.

4.6 – CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

- La matriz cuadrada A tiene inversa si y sólo si $| A | \neq 0$

- Dada la matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A y se representa adj (A), a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij}.

Ejemplo: Dada la matriz $(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, su adjunta sería:

$$\text{adj (A)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Se cumple que si $|A| \neq 0$ entonces la matriz inversa A^{-1} es igual a:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \text{adj}(A^t) = \frac{1}{|A|}\ [\text{adj}(A)]^t$$

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, pretendemos encontrar su inversa:

La matriz A tiene inversa ya que $\det(A) = -2 \neq 0$

Ya hemos visto que: $\text{adj (A)} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Entonces: $[\text{adj (A)}]^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Por lo tanto: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}[\text{adj (A)}]^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

4.7 – FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow I.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$