TEMA 5 – VECTORES EN EL ESPACIO

5.1 – LOS VECTORES Y SUS OPERACIONES

DEFINICIÓN

Un vector es un segmento orientado. Un vector $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por dos puntos, **origen** A y **extremo** B.

Elementos de un vector:

- **Módulo** de un vector es la distancia entre A y B y se designa por el vector entre barras : $|\overrightarrow{AB}|$
- **Dirección** del vector es la dirección de la recta en la que se encuentra el vector y la de todas las rectas paralelas a ella.
- **Sentido** si va de A a B o de B a A.

Igualdad de vectores: Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido (no necesariamente el mismo origen y el mismo extremo). Todos ellos se llaman representantes de un único vector. Llamaremos representante canónico a aquel vector que tiene por origen el punto O.

Notación: Los vectores se representan con una flechita encima de una letra: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$,.... o bien mediante uno de sus representantes, escribiendo su origen y su extremo con una flecha encima $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, …

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

El producto de un número $k \neq 0$ por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k : $|k\vec{v}| = |k|.|\vec{v}|$
- Dirección: la misma que la de $\vec{v}$
- Sentido:
  - El de $\vec{v}$ si $k > 0$
  - El del opuesto de $\vec{v}$ si $k < 0$

El producto $0.\vec{v}$ es igual al **vector cero**: $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero y carece de dirección y de sentido.

El vector $-1.\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$

VECTORES UNITARIOS

Los vectores de módulo 1 se llaman **vectores unitarios.**

El vector $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ es un vector unitario de la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{v}$.

El vector $\frac{-1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ es un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$, pero con sentido opuesto.

SUMA DE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para sumarlos gráficamente hay dos posibilidades:

- Se sitúa el origen del segundo vector sobre el extremo del primero y el vector suma es el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo.
- Se sitúan los dos vectores con origen común. Se forma el paralelogramo que tiene por lados los dos vectores y la diagonal que parte del origen de los dos vectores es el vector suma.

RESTA DE DOS VECTORES

Restar dos vectores es lo mismo que sumar al primer vector el opuesto del segundo:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

- **Suma de vectores:**
  - Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
  - Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
  - Vector nulo: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
  - Vector opuesto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

- **Producto de números por vectores**
  - Asociativa: $a.(b.\vec{v}) = (a.b).\vec{v}$
  - Distributiva I: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
  - Distributiva II: $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
  - Producto por 1: $1.\vec{v} = \vec{v}$

Todas estas propiedades le confieren al conjunto de los vectores la estructura de **espacio vectorial.**

5.2 – EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados varios vectores, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, ..., $\vec{w}$, y varios números a, b,c,...m, el vector $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} + ... + m\vec{w}$ se llama **combinación lineal** de los vectores.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Varios vectores se llaman **linealmente dependientes** si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás. Cuándo no es así, se llaman **linealmente independientes.**

Ejemplos:

- Dos vectores alineados son linealmente dependientes
- Dos vectores no alineados son linealmente independientes
- Tres vectores coplanarios (están en el mismo plano) son linealmente dependientes.
- Tres vectores no coplanarios son linealmente independientes.

BASE

Tres vectores no coplanarios $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ son linealmente independientes y, además cualquier otro vector del espacio se puede poner como combinación lineal de ellos de ellos de forma única. Por eso decimos que forman una **base**: B = { $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ }

Tres vectores no coplanarios cualesquiera forman una base del espacio vectorial tridimensional.

Si los tres vectores son perpendiculares entre sí, se dice que forman una **base ortogonal.** Si además de ser perpendiculares tienen módulo uno, se dice que la **base** es **ortonormal**.

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Dada una base B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), cualquier vector, $\vec{v}$, se puede poner de forma única como una combinación lineal de sus elementos: $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

A los números a, b, c se les llama **coordenadas de $\vec{v}$ respecto de B**.

Y se expresa así: $\vec{v} = (a,b,c)$ ó $\vec{v}\ (a,b,c)$

OPERACIONES CON COORDENADAS

Sea $\vec{u}\,(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}\,(v_1,v_2,v_3)$

- **Suma de dos vectores:** Las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$:

  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2,u_3) + (v_1,v_2,v_3) = (u_1 + v_1,u_2 + v_2,u_3 + v_3)$

- **Resta de dos vectores:** Las coordenadas del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restando a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$:

  $\vec{u} - \vec{v} = (u_1,u_2,u_3) - (v_1,v_2,v_3) = (u_1 - v_1,u_2 - v_2,u_3 - v_3)$

- **Producto de un vector por un número:** Las coordenadas del vector $k\vec{u}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{u}$:

  $k\vec{u} = k.(u_1,u_2,u_3) = (ku_1,ku_2,ku_3)$

- **Combinación lineal de vectores:**

  $a\vec{u} + b\vec{v} = a(u_1,u_2,u_3) + b(v_1,v_2,u_3) = (au_1 + bv_1,au_2 + bv_2,au_3 + bv_3)$

5.3 – PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

DEFINICIÓN

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un **número** que resulta de multiplicar el módulo de cada uno de los vectores por el coseno del ángulo que forman y se designa por $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ son números positivos. Por tanto, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es un número positivo o negativo según el ángulo que forman $\vec{u}$ con $\vec{v}$ **:**

- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es agudo, $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) > 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}$ es positivo.
- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es obtuso, $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}$ es negativo.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si son perpendiculares:

Es decir: si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

APLICACIONES

Módulo de un vector $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (pues $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2.\cos(0º) = |\vec{u}|^2$)

Ángulo de dos vectores $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$ (despejando el coseno de la expresión del producto escalar)

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\vec{u}\,' = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

$\vec{u}\,' = |\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ es la longitud del segmento proyección, con signo + o – según que el ángulo sea agudo u obtuso. Si este número lo multiplicamos por el vector unitario $\dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$, se obtiene el vector proyección.

OPERACIONES. PROPIEDADES

- Propiedad conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Propiedad asociativa: $a.(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\vec{u})\cdot\vec{v}$
- Propiedad distributiva: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

EXPRESIÓN ANALÍTICA

- Si B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) es una base ortogonal: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{z} = \vec{y}\cdot\vec{z} = 0$
- Si B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) es una base ortonormal : $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{z} = \vec{y}\cdot\vec{z} = 0$, $\vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{y}\cdot\vec{y} = \vec{z}\cdot\vec{z} = 1$

Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto a una base ortonormal son $\vec{u}$ (u_1,u_2,u_3) y $\vec{v}$ (v_1,v_2,v_3), entonces el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ adopta la siguiente expresión:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Dem : $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{x} + u_2\vec{y} + u_3\vec{z}).(v_1\vec{x} + v_2\vec{y} + v_3\vec{z}) = u_1.v_1.\ \vec{x}\cdot\vec{x} + u_1.v_2.\ \vec{x}\cdot\vec{y} + u_1v_3.\ \vec{x}\cdot\vec{z} + u_2.v_1.\ \vec{y}\cdot\vec{x} + u_2.v_2.\ \vec{y}\cdot\vec{y} + u_2v_3.\ \vec{y}\cdot\vec{z} + u_3.v_1.\ \vec{z}\cdot\vec{x} + u_3.v_2.\ \vec{z}\cdot\vec{y} + u_3.v_3.\ \vec{z}\cdot\vec{z} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

5.4 – APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

PRODUCTO ESCALAR

Expresión vectorial: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

Expresión analítica: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

MÓDULO DE UN VECTOR

Expresión vectorial : $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Expresión analítica : $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3}$

COSENO DEL ÁNGULO DE DOS VECTORES

Expresión vectorial : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Expresión analítica : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3}}$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR u SOBRE OTRO v

Expresión vectorial: $\vec{u}\,' = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

Expresión analítica: $\vec{u}\,' = \dfrac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3}(v_1, v_2, v_3)$

CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD : u ⊥ v

Expresión vectorial: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Expresión analítica: $u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = 0$

5.5 – PRODUCTO VECTORIAL

DEFINICIÓN

El **producto vectorial** de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es un nuevo vector $\vec{u} \times \vec{v}$, que se define del siguiente modo:

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector con las siguientes características:
  - Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})$
  - Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
  - Sentido Si $(\vec{u}, \vec{v}) < 180º$, hacia arriba

    Si $(\vec{u}, \vec{v}) > 180º$, hacia abajo

    Tomando el ángulo en sentido positiva, es decir, contrario al movimiento de las agujas del reloj.
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir, si alguno de ellos es 0 o si tienen la misma dirección, entonces: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

PROPIEDADES

- No es conmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- En una base ortonormal $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
- $(a\vec{u}) \times \vec{v} = a(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (a\vec{v})$
- No es asociativo : $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

EXPRESIÓN ANALÍTICA

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}.\vec{i} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v1 & v_3 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.\vec{k} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}. \right)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El módulo del producto vectorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$ es igual al área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $A = |\vec{u} \times \vec{v}|\, u^2$

El área de un triángulo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $A = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} u^2$

APLICACIÓN:

Para obtener un vector perpendicular a otros dos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no alineados, hallaremos $\vec{u} \times \vec{v}$

5.7 – PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

DEFINICIÓN

Se llama **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y se designa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v} \times \vec{w})$
(El resultado es un número)

EXPRESIÓN ANALÍTICA

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El módulo del producto mixto es el volumen del paralelepípedo de lados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|\ u^3$$

El volumen de un tetraedro de lados $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es: $V = \dfrac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{6} u^3$

5.8 – APLICACIONES DE LOS VECTORES A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

COORDENADAS DEL VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

Las coordenadas del vector $\vec{AB}$ se obtienen restándole a las coordenadas del extremo B las del origen A : $\vec{AB} = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1) = (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

CONDICIÓN PARA QUE TRES PUNTOS ESTÉN ALINEADOS

Los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ están alineados siempre que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio, M, de un segmento de extremos $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ son:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO

Para calcular el simétrico A' del punto A respecto del punto B, solo hay que tener en cuenta que el punto B es el punto medio entre A y A'.