TEMA 6 y 7 - RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE LA RECTA

Para hallar la ecuación de una recta en el espacio necesito:

- Dos puntos
- Un punto y su vector director

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y un vector $\vec{v} = (a,b,c)$.
Si me dan dos puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ $\Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$ y como vector $\vec{v} = \vec{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + k.(a,b,c) \quad \forall\, k \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \quad \forall\, k \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ecuación implícita (como intersección de dos planos): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

<u>Ejemplo 1</u> : Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1-3)

$$r: \begin{cases} \text{Punto}: P(1,0,-1) \\ \text{Vector}: \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,-3) - (1,0,-1) = (1,1,-2) \end{cases}$$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (1,0,-1) + \lambda.(1,1,-2) \quad \forall \lambda \in R$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x - 1 = y \\ -2x + 2 = z + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x - z = -1 \end{cases}$

<u>Ejemplo 2</u>: Hallar dos puntos y un vector de las siguientes rectas:

a) (x,y,z) = (2,0,-1) + t.(1,2,3) Puntos: $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow P_1(2,0,-1) \\ t = 1 \Rightarrow P_2(3,2,2) \end{cases}$ Vector: (1,2,3)

b) $\begin{cases} \mathbf{x = 1 + \lambda} \\ \mathbf{y = -\lambda} \\ \mathbf{z = 3 - 4\lambda} \end{cases}$ Puntos: $\begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow P_1(1,0,3) \\ \lambda = 1 \Rightarrow P_2(2,-1,-1) \end{cases}$ Vector (1,-1,-4)

c) $\mathbf{\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{3}}$ Puntos $\begin{cases} P_1(-1,1,-2) \\ x = 0 \Rightarrow P_2(0,3,-\frac{1}{2}) \end{cases}$ Vector (2,4,3)

d) $\begin{cases} \mathbf{x+2y+z=3} \\ \mathbf{2x-y+3z=4} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \approx \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -5y+z=-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\alpha \\ z=5\alpha-2 \\ x=3-2\alpha+2-5\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5-7\alpha \\ y=\alpha \\ z=5\alpha-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Puntos}: \begin{cases} P_1(5,0,-2) \\ P_2(-2,1,3) \end{cases} \\ \text{Vector}: (-7,1,5) \end{cases}$$

Nota: Otra forma de hallar el vector $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (7,-1,-5)$

ECUACIONES DE UN PLANO

Para hallar la ecuación de un plano en el espacio necesito:

- Tres puntos
- Un punto y dos vectores directores

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y dos vectores $\vec{v}_1 = (a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v}_2 = (a_2,b_2,c_2)$
Si me dan tres puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$ ⇒ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$

y como vectores $\vec{v}_1 = \vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + s.(a_1,b_1,c_1) + t.(a_1,b_1,c_1) \quad \forall\, s,t \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + s.a_1 + ta_2 \\ y = y_0 + s.b_1 + tb_2 \\ z = z_0 + s.c_1 + tc_2 \end{cases} \quad \forall\, s,t \in R$

Ecuación implícita o general: $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal = $\vec{n} = (A,B,C) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (Es perpendicular a los dos vectores directores)
Nota: Si conocemos el vector normal y un punto podemos hallar directamente la ecuación general del plano. Del vector normal conocemos A, B y C ; y si sustituimos el punto hallamos D.

<u>Ejemplo 3</u> : Hallar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A(0,1,-1), B(2,3,-5), C(1,4,3)

$$\pi: \begin{cases} \text{Punto}: A(0,1,-1) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} \vec{v_1} = \overrightarrow{AB} = (2,2,-4) \\ \vec{v_2} = \overrightarrow{AC} = (1,3,4) \end{cases} \end{cases}$$

<u>Ecuación vectorial</u>**:** $(x,y,z) = (0,1,-1) + s.(2,2,-4) + t.(1,3,4) \quad \forall\, s,t \in R$

<u>Ecuaciones paramétricas</u>**:** $\begin{cases} x = 2s + t \\ y = 1 + 2s + 3t \\ z = -1 - 4s + 4t \end{cases} \quad \forall\, s,t \in R$

<u>Ecuación implícita o general</u>**:** $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 20x - 12(y-1)+4(z+1) = 0 \Rightarrow 5x-3y+z+4=0$$

<u>Ejemplo 4</u>: Hallar dos punto, dos vectores y el vector normal

a) (x,y,z) = (1,2,3) + λ(4,5,6) +μ(1,0,3)

$$\text{Puntos:}\begin{cases} P_1(1,2,3) \\ \lambda = 0, \mu = 1 \rightarrow P_2(2,2,6) \end{cases}$$

$$\text{Vectores: }\begin{cases} \overrightarrow{v_1}(4,5,6) \\ \overrightarrow{v_2}(1,0,3) \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_1} x \overrightarrow{v_2} = (15,-6,-5) \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \mathbf{x = 1 + 2\lambda + \mu} \\ \mathbf{y = 2\lambda - \mu} \\ \mathbf{z = 3 - \lambda} \end{cases}$ Puntos: $\begin{cases} P_1(1,0,3) \\ \lambda = 0, \mu = 1 \rightarrow P_2(2,-1,3) \end{cases}$ Vectores: $\begin{cases} \overrightarrow{v_1}(2,2,-1) \\ \overrightarrow{v_2}(1,-1,0) \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_1} x \overrightarrow{v_2} = (-1,-1,-4) \end{cases}$

c) x + 2y – z = 4 z = x + 2y -4 Puntos: P(0,0,-4), Q(1,1,-1), R(1,0,-3) $\vec{n}(1,2,-1)$

$$\text{Vectores: }\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,3) \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{PR} = (1,0,1) \end{cases}$$

<u>Ejemplo 5</u> : Hallar la ecuación del plano, cuyo vector normal es (1,2,3) y pasa por el punto (2,0,4)

$$\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z + D = 0 \\ 2 + 2.0 + 3.4 + D = 0 \Rightarrow D = -14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$$

EJERCICIOS REPASO RECTAS Y PLANOS

<u>Ejercicio 6</u> : Halla las ecuaciones paramétricas de los ejes de coordenadas

$$\text{Eje OX } \begin{cases} P_1(0,0,0) \\ P_2(1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pto} : P_1(0,0,0) \\ \text{Vector} : \overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

$$\text{Eje OY } \begin{cases} P_1(0,0,0) \\ P_2(0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pto} : P_1(0,0,0) \\ \text{Vector} : \overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

$$\text{Eje OZ } \begin{cases} P_1(0,0,0) \\ P_2(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pto} : P_1(0,0,0) \\ \text{Vector} : \overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

<u>Ejercicio 7</u> : Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(-3,2,1) y B$\left(\frac{-5}{2},\frac{3}{2},0\right)$

$$r: \begin{cases} \text{Punto}: A(-3,2,1) \\ \text{Vector}: \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{5}{2}+3, \frac{3}{2}-2, 0-1\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \parallel (1,-1,-2) \end{cases}$$

Ecuación vectorial: (x,y,z) = (-3,2,1) + λ.(1,-1,-2) $\forall\lambda \in R$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = 2-\lambda \quad \forall\lambda \in R \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} -x-3 = y-2 \\ -2x+-6 = z-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ 2x+z = -5 \end{cases}$

<u>Ejercicio 8</u> : Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos P(3,1,0),Q(0,-5,1), R(6,-5,1)

Método: Hallamos la recta que pasa por P y Q, y comprobamos si R pertenece a la recta.

Recta que pasa por P y Q $\begin{cases} \text{Punto}: P(3,1,0) \\ \text{Vector}: \overrightarrow{PQ} = (-3,-6,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{1}$

Comprobamos si el punto R la cumple: $\frac{6-3}{-3} = \frac{-5-1}{-6} = \frac{1}{1} \Rightarrow -1 = 1 = 1 \Rightarrow$ Falso.

No existe ninguna recta que pase por los puntos P, Q y R a la vez.

<u>Ejercicio 9</u> : Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(-4,2,5) y es paralela al eje OZ.

$$r: \begin{cases} \text{Punto}: A(-4,2,5) \\ \text{Vector eje OZ} \begin{cases} P_1(0,0,0) \\ P_2(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(0,0,1) \end{cases}$$

Ecuación vectorial: (x,y,z) = (-4,2,5) + λ.(0,0,1) $\forall\lambda \in R$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \quad \forall\lambda \in R \\ z = 5+\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x+4 = 0 \\ y-2 = 0 \end{cases}$

<u>Ejercicio 10</u> : Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(1,-3,0) y paralela al vector $\vec{u}x\vec{v}$, siendo $\vec{u}(1,-1,2)$, $\vec{v}(2,0,0)$

$$r: \begin{cases} \text{Punto}: A(1,-3,0) \\ \text{Vector}: \vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,4,2) \parallel (0,2,1) \end{cases}$$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (1,-3,0) + \lambda.(0,2,1) \quad \forall\lambda \in R$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ y + 3 = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$

<u>Ejercicio 11</u> :

a) Halla el vector director de la recta determinada por los planos $\begin{cases} \mathbf{x - y = 0} \\ \mathbf{y + z = 2} \end{cases}$

Modo 1: Pasando a paramétricas: $y = \alpha$, $x = \alpha$, $z = 2 - \alpha \Rightarrow v(1,1,-1)$

Modo 2: Perpendicular a los vectores normales de los dos planos $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$

Nota: Son paralelos, vale cualquiera de los dos.

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta anterior

Modo 1: Directamente $\Rightarrow$ Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \quad \forall\alpha \in R$

Modo 2: $\begin{cases} \text{Punto}: \text{Dado un valor, por ejemplo a } x,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 2 \\ \text{Vector}: \vec{v}(-1,-1,1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \quad \forall\alpha \in R$

<u>Ejercicio 12</u> : Dada la recta $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{-1}} = \mathbf{z}$, exprésala como intersección de dos planos.

$$\begin{cases} -x = 2y + 1 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 13 : Halla todas las ecuaciones de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto A(1,-3,2) y por los vectores $\vec{u}(2,1,0), \vec{v}(-1,0,3)$

Ecuación vectorial: (x,y,z) = (1,-3,2) + s.(2,1,0) + t.(-1,0,3) $\forall$ s,t $\in$ R

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = -3 + s \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R$

Ecuación implícita o general: Ax + By + Cz + D = 0

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1) - 6(y+3) + (z-2) = 0 \Rightarrow 3x - 6y + z - 23 = 0$$

b) Pasa por el punto P(2,-3,1) y cuyo vector normal es (5,-3,-4)

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 3y - 4z + D = 0 \\ 5.2 - 3.(-3) - 4.1 + D = 0 \Rightarrow D = -15 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x - 3y - 4z - 15 = 0$$

c) Perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1,0,1)

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \text{Punto}: P_\pi = (1,0,1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (2,-1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - y + 3z + D = 0 \Rightarrow 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow 2x - y + 3z - 5 = 0$$

Ejercicio 14 : Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los planos OXY, OYZ y OXZ

$$OXY \left\{ \text{Puntos}: P_1(0,0,0), P_2(1,0,0), P_3(0,1,0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Punto} P_1(0,0,0) \\ \text{Vectores} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,0) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,0) \end{array} \right. \end{array} \right. \right.$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R$

Ecuación implícita o general: Ax + By + Cz + D = 0 $\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$

Análogamente: OYZ: $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R, \quad x = 0$

OXZ: $\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R, \quad y = 0$

Ejercicio 15 : Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos

a) z = 3 **b) x = -1** **c) y = 2**

a) $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R,$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R,$ c) $\begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall\ s,t \in R,$

Ejercicio 16:

a) ¿Cuál es el vector normal del plano x = -1? (1,0,0)

b) Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular al plano que pase por A(2,3,0)

r: r: $\begin{cases} \text{Punto}: A(2,3,0) \\ \text{Vector}: \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (1,0,0) \end{cases}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (2,3,0) + \lambda.(1,0,0) \quad \forall\lambda \in R$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall\lambda \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z}{0}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} y-3=0 \\ z=0 \end{cases}$

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Coincidentes Paralelas Secantes Se cruzan

Método: Escribimos las ecuaciones paramétricas de cada una de ellas (con distinto parámetro), las igualamos y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto $\Rightarrow$ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Coincidentes.
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan.
  - Hallar el vector director de cada una
  - Si son paralelos (proporcionales) las rectas son paralelas
  - Si no son paralelos, las rectas se cruzan.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Coincidentes Paralelos Secantes

Método: Escribimos las ecuaciones generales de cada uno de ellos y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ No puede ser
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Se cortan en un plano o en una recta
  - Si hay un grado de libertad $\Rightarrow$ Un vector $\Rightarrow$ Se cortan en una recta $\Rightarrow$ Secantes
  - Si hay dos grados de libertad $\Rightarrow$ Dos vectores $\Rightarrow$ Se cortan en un plano $\Rightarrow$ Coincidentes
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelos.

POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTA Y PLANO

Recta Contenida en el plano	Secantes	Paralelos

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y la general del plano y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto $\Rightarrow$ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Recta contenida en el plano.
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelos.

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

Coincidentes	Dos coincidente y el otro secante	Dos coincidentes y el otro paralelo	Paralelos	Paralelos

Dos paralelos Y el otro secante	Secantes en una recta	Secantes en un punto	Secantes 2 a 2 en una recta

Escribimos las ecuaciones de los tres planos en forma general y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto
- Sistema compatible indeterminado:
  - Un grado de libertad: Se cortan en una recta
    - Dos planos coincidentes y el otro secante
    - Los tres se cortan en una recta
  - Dos grados de libertad: Se cortan en un plano $\Rightarrow$ Coincidentes
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución
  - Dos coincidentes y el otro paralelo
  - Tres paralelos
  - Dos paralelos y el otro los corta
  - Se cortan dos a dos en una recta

Ejemplo 17 : Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

a) $\mathbf{r:}\begin{cases}\mathbf{x=-5\alpha}\\ \mathbf{y=2+\alpha}\\ \mathbf{z=5-\alpha}\end{cases}$ **s:** $\begin{cases}\mathbf{x=2-3\alpha}\\ \mathbf{y=3-5\alpha}\\ \mathbf{z=\alpha}\end{cases}$ Vectores directores no paralelos, se Cruzan o se cortan

Resolvemos el sistema $\begin{cases}-5\alpha=2-3\beta\\ 2+\alpha=3-5\beta\\ 5-\alpha=\beta\end{cases}\to\left(\begin{array}{cc|c}-5&3&2\\1&5&1\\-1&-1&-5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&5&1\\-1&-1&-5\\-5&3&2\end{array}\right)\approx\ldots\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&5&1\\0&4&-4\\0&0&35\end{array}\right)$

Rango A = 2, RangoA´= 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ Se cruzan.

b) $\mathbf{r:}\begin{cases}\mathbf{x=3-5\alpha}\\ \mathbf{y=2+\alpha}\\ \mathbf{z=5-\alpha}\end{cases}$ **s:** $\mathbf{\frac{x-1}{10}=\frac{4-y}{2}=\frac{z}{2}}$ Vectores directores paralelos (paralelas o coincidentes), tomamos un punto de r, (3,2,5) y comprobamos si cumple s: $\frac{3-1}{10}=\frac{4-2}{2}=\frac{5}{2}$ No lo cumple, por tanto , paralelas.

c) r: $\begin{cases}\mathbf{x=2-3t}\\ \mathbf{y=3+5t}\\ \mathbf{z=t}\end{cases}$ **s: (x,y,z) = (1,0,5) + λ(-1,2,0)** Vectores no paralelos, se Cruzan o se cortan

Resolvemos el sistema $\begin{cases}2-3t=1-\lambda\\ 3+5t=2\lambda\\ t=5\end{cases}\to\begin{cases}\\ \\ t=5\to\lambda=14\to 2-15=1-14\to \text{Cierto}\end{cases}$

Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución, se cortan en un punto

Hallar el punto de corte, como t = 5 $\Rightarrow$ P(-13,28,5)

d) $\mathbf{r:}\begin{cases}\mathbf{x=2+\lambda}\\ \mathbf{y=3-\lambda}\\ \mathbf{z=2\lambda}\end{cases}$ **s:** $\mathbf{\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-2}}$ Vectores directores paralelos (paralelas o coincidentes) Cogemos un punto de s(3,2,2) y comprobamos si cumple r: $\begin{cases}3=2+\lambda\\ 2=3-\lambda\\ 2=2\lambda\end{cases}\to\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=1\\ \lambda=1\end{cases}$ Si, por tanto coincidentes.

Ejemplo 18 : Estudiar la posición relativa de los siguientes planos.

a) $\begin{cases}\mathbf{x-3y+4z-11=0}\\ \mathbf{4x-12y+16z+40=0}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\mathbf{x-3y+4z-11=0}\\ \mathbf{2x-5y+z+3=0}\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}\mathbf{x-3y+4z-11=0}\\ \mathbf{2x-6y+8z-22=0}\end{cases}$

Dos modos: O resolviendo el sistema o comparando sus vectores normales

a) $\frac{1}{4}=\frac{-3}{-12}=\frac{4}{16}=\frac{-11}{40}\Rightarrow$ La última igualdad no se cumple, paralelos

b) $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-5}=\frac{4}{1}=\frac{-11}{3}\Rightarrow$ Vectores normales no paralelos, se cortan en una recta.

Si nos piden la recta, resolvemos el sistema y obtenemos la recta en paramétricas.

c) $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}=\frac{4}{8}=\frac{-11}{-22}\Rightarrow$ Se cumplen todas, coincidentes.

Ejemplo 19: Estudiar la posición relativa entre la recta y el plano:

a) π: x – 3y+5z+11=0 **r:** $\begin{cases} x = -2t+3 \\ y = 1-t \\ z = 4+6t \end{cases}$

a) Sustituimos las ecuaciones de la recta en la ecuación del plano:
-2t + 3 -3(1 – t) + 5.(4 + 6t) + 11 = 0 ⇒ -2t + 3 -3 +3t + 20 + 30t + 11 = 0 ⇒ 31t + 31 = 0 ⇒ t = -1
Sistema compatible determinado. Existe una solución. Se cortan en un punto.
Si nos piden el punto de corte, sustituimos en las ecuaciones de la recta: P(5,2,-2)

b) $\frac{x-2}{3} = \frac{2y+2}{4} = z$ **-y + 2z - 1 =0**

b) Pasamos la recta a paramétricas y sustituimos en la ecuación del plano
-(2t-1) + 2t -1 = 0 ⇒ 0 = 0 ⇒ Sistema compatible indeterminado, existen infinitas soluciones ⇒ Recta contenida en el plano.

c) $\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = -t+2 \\ z = 2t \end{cases}$ **x + 2y – z = 0**

c) (4t + 1) + 2(-t + 2) – 2t = 0 ⇒ 5 = 0 ⇒ Sistema incompatible, no tiene solución ⇒ Paralelos

Ejemplo 20 : Estudiar la posición relativa de estos tres planos:

a) $\begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ 3y+2z-1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$

a) Resolvemos el sistema por Gauss y nos sale compatible determinado, existe una única solución ⇒ Se cortan en un punto P(7/4,1/2,-1/4)

b) $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x-y+z-2=0 \\ 3x-y+z-4=0 \end{cases}$

b) Resolvemos el sistema por Gauss y nos sale un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, se cortan en una recta. Como los planos no son paralelos entre se cortan los tres en una recta.

c) $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 2x+2y-3z+4=0 \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema por Gauss y nos sale sistema incompatible, no tiene solución. Como ninguno es paralelo entre si, se cortan dos a dos en una recta (Tienda de campaña)

d) $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$

d) Como es un sistema con parámetros con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, hallamos el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=1, a=2$

CASO I: Si a = 1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}' = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

El primer y el tercer plano paralelos y el otros los corta en una recta.

CASO II: Si a = 2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}' = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible} \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{cases}$

indeterminado con un grado de libertad (ninguno paralelo) se cortan en una recta.

CASO III: $a \in R - \{1,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Se cortan en un punto. Resolviendo (por Cramer o por Gauss) obtenemos el punto de corte en función de "a".

REPASO DE RECTAS Y PLANOS Y POSICIONES RELATIVAS

<u>Ejercicio 21</u> : Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

a) r: $\mathbf{\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}}$ **s:** $\mathbf{\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}}$

Vectores directores (3,2,4) y (-1,2,3) no paralelos, se cortan o se cruzan. Resolvemos el sistema:

$\begin{cases} 3\alpha + 1 = -\beta - 2 \\ 2\alpha - 2 = 2\beta + 3 \\ 4\alpha + 1 = 3\beta + 2 \end{cases} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -21 \\ 0 & 13 & -15 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -21 \\ 0 & 0 & -153 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}' = 3 \end{matrix}$ Sistema incompatible, no existe solución, se Cruzan.

b) r: $\mathbf{\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = z-2}$ **s:** $\mathbf{\frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}}$

Vectores directores (-1,2,1) (4,1,2) no paralelos, se cortan o se cruzan. Resolvemos el sistema:

$\begin{matrix} -\alpha + 1 = 4\beta + 4 \\ 2\alpha + 1 = \beta + 4 \\ \alpha + 2 = 2\beta + 5 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{matrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}' = 2 \\ \text{Nº Incog} = 2 \end{matrix}\right\}$ Sistema compatible determinado, existe una única solución, se cortan en un punto.

$\begin{cases} -\alpha - 4\beta = 3 \\ -9\beta = 9 \end{cases} \beta = -1 \Rightarrow P(0,3,3)$

c) r: $\mathbf{\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{3}}$ **s:** $\mathbf{\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}}$

Vectores directores (2,1,3), $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,3)$ Paralelos, Paralelos o coincidentes.

Tomamos un punto de r $P_r(0,1,-1)$ y vemos si pertenece a s : $\begin{cases} 0 - 2 - 1 = 0 \\ 3 + 1 + 1 = 0 \end{cases}$ No pertenece a s por tanto no pueden ser coincidentes. Son paralelas.

d) r: $\mathbf{\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}}$ **s:** $\mathbf{\begin{cases} x=3+4t \\ y=3+6t \\ z=4+8t \end{cases}}$

Vectores directores (2,3,4), (4,6,8) paralelos, por tanto paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de r: $P_r(1,0,0)$ y comprobamos si pertenece a s: $\begin{cases} 1=3+4t \\ 0=3+6t \\ 0=4+8t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1/2 \\ t=-1/2 \\ t=-1/2 \end{cases}$ Si pertenece a s por tanto son coincidentes.

<u>Ejercicio 22</u> : Obtén el valor de a para que las rectas r y s se corten y halla el punto de corte.

r: x = y = z – a **s:** $\mathbf{\frac{2x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{0}}$

Pasamos a paramétricas y resolvemos el sistema: $\begin{cases} \alpha=\frac{3\beta+1}{2} \\ \alpha=-2\beta-3 \\ \alpha+a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-3\beta=1 \\ \alpha+2\beta=-3 \end{cases} \Rightarrow -7\beta=7 \Rightarrow$

$\beta=-1, \alpha=-1, a=3 \Rightarrow$ P(-1.-1.2)

<u>Ejercicio 23</u> : Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

r: $\mathbf{\begin{cases} x=5+4t \\ y=3+t \\ z=-t \end{cases}}$ **s:** $\mathbf{\frac{x}{m}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{n}}$

Los vectores directores proporcionales: $\frac{4}{m}=\frac{1}{3}=\frac{-1}{n} \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ n=-3 \end{cases}$

<u>Ejercicio 24</u> : Calcula m y n para que los planos: α: mx + y – 3z -1 = 0 β: 2x + ny – z – 3 = 0 sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

Los vectores normales proporcionales: $\frac{m}{2}=\frac{1}{n}=\frac{-3}{-1}\begin{cases} n=1/3 \\ m=6 \end{cases}$

Para que sean coincidentes: $\frac{6}{2}=\frac{1}{1/3}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{-1}{-3}$ No son coincidentes.

<u>Ejercicio 25</u> : Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,0,0), (2,2,0) y (1,1,2)

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: A(0,0,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2,2,0) \\ \overrightarrow{AC}=(1,1,2) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$ $4x-4y=0 \Rightarrow x-y=0$

<u>Ejercicio 26</u> : Determina la ecuación del plano que contiene al punto P(2,1,2) y a la recta $\mathbf{x-2=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}}$

P(2,1,2), $P_r(2,3,4)$, $v_r(1,-1,-3)$

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P(2,1,2) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} \overrightarrow{PP_r}=(0,2,2) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-1,-3) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$ -4(x-2) + 2(y–1) -2(z-2)=0

-4x + 2y - 2z + 10 = 0 ⇒ -2x + y – z + 5 = 0

<u>Ejercicio 27</u> : Comprueba que las rectas r: $\mathbf{\frac{x-1}{2}=y=z-2}$ **s:** $\mathbf{\begin{cases} x-2z=5 \\ x-2y=11 \end{cases}}$ **son paralelas y halla la ecuación del plano que las contiene.**

Vectores directores proporcionales: $v_r(2,1,1)$, $v_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=(-4,-2,-2)$

$P_r(1,0,2)$, $v_r(2,1,1)$, P_s (Por ejemplo z = 0, x = 5, y = -3 (5,-3,0))

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r(1,0,2) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r(2,1,1) \\ P_rP_s=(4,-3,-2) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}=0$ (x – 1) + 8y -10(z – 2) = 0

x + 8y – 10z + 19 = 0

<u>Ejercicio 28</u> : ¿Son coplanarios los puntos A(1,0,0), B(0,1,0), C(2,1,0), D(-1,2,1)?

Con tres puntos A, B y C hallamos el plano que los contiene y comprobamos si D ∈ Al plano

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: A(1,0,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} AB=(-1,1,0) \\ AC=(1,1,0) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ -2z = 0 ⇒ z = 0 ⇒ D no cumple que z = 0, por tanto no son coplanarios.

<u>Ejercicio 29</u> : Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,3,2) y B(-2,5,0) y es paralelo a la recta $\mathbf{\begin{cases} x=3-t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}}$

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: A(1,3,2) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} AB=(-3,2,-2) \\ v_r(-1,1,-3) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$ ⇒ -4(x–1) -7(y–3) – (z–2) = 0

-4x – 7y – z +27 = 0

Ejercicio 30 : Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y es paralelo a: s: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r(2,-1,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r(3,-1,1) \\ v_s(5,2,-3) \end{cases} \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad (x-2) + 14(y+1) + 11z = 0$

$x + 14y + 11z + 12 = 0$

Ejercicio 31 : Dado el plano π: 2x – 3y + z = 0 y la recta r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r(1,2,-1) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r(1,-1,2) \\ n_\pi(2,-3,1) \end{cases} \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 5(x-1) + 3.(y-2) - (z+1) = 0$

$5x + 3y - z - 12 = 0$

Ejercicio 32 : Sea la recta r: $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y el plano ax – y + 4z – 2 = 0

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.
b) ¿Existe algún valor de a para que r sea perpendicular al plano?

a) Vector director de la recta y vector normal del plano perpendiculares ($v_r.n_\pi = 0$)

$v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 5, 2)$ $\qquad v_r.n_\pi = (1,5,2).(a,-1,4) = a - 5 + 8 = 0 \Rightarrow a = -3$

b) Vector de la recta y vector normal del plano, paralelos: $\frac{1}{a} = \frac{5}{-1} = \frac{2}{4}$. No existe.

Ejercicio 33 : Dados la recta r: $\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano π: x + 2y + 3z – 1 = 0, halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto P(2,1,-1) y sea perpendicular a r.

Recta s: $\begin{cases} \text{Punto}: P(2,1,-1) \\ \text{Vector}: v_s = v_r x n_\pi = \begin{cases} v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,1) \\ n_\pi = (1,2,3) \end{cases} v_r x n_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1,-5,3) \end{cases}$

$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{3}$

<u>Ejercicio 34</u> : Halla la ecuación de una recta que cumpla las condiciones siguientes:

1) Es paralela a la recta de ecuaciones: r: $\begin{cases} \mathbf{x+2z=5} \\ \mathbf{y+3z=5} \end{cases}$

2) Pasa por el punto de intersección de la recta s con el plano π:

$$\mathbf{s:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{3}} \qquad \mathbf{\pi: x-y+z=7}$$

vr: z = α, x = 5 - 2α, y = 5 - 3α ⇒ $v_r(-2,-3,1)$

$$P_r : s: \begin{cases} x = 4t+1 \\ y = 2t-3 \Rightarrow 4t+1-(2t-3)+(3t-2)=7 \Rightarrow 5t=5 \Rightarrow t=1 \Rightarrow P_r(5,-1,1) \\ z = 3t-2 \end{cases}$$

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$$

<u>Ejercicio 35</u> : Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,-3,2) y B(0,1,1) y es paralelo a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{3x-2y+1=0} \\ \mathbf{2y+3z-3=0} \end{cases}$

$$\text{Plano: } \begin{cases} \text{Punto}: A(1,-3,2) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} AB=(-1,4,-1) \\ v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-6,-9,6) \parallel (-2,-3,2) \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5(x – 1) + 4(y + 3) + 11(z – 2) = 0 ⇒ 5x + 4y + 11z – 15 = 0

<u>Ejercicio 36</u> : Dados los planos mx + 2y – 3z – 1 = 0 y 2x – 4y + 6z + 5 = 0, halla m para que sean: a) Paralelos b) Perpendiculares

a) Proporcionales: $\frac{m}{2}=\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6} \Rightarrow m = -1$

b) Vectores normales perpendiculares: (m,2,-3).(2,-4,6) = 0 ⇒ 2m – 8 -18 = 0 ⇒ m = 13

<u>Ejercicio 37</u> : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos B(1,1,1) y C(1,2,1).

$$\text{Recta: } \begin{cases} \text{Punto}: P(1,2,3) \\ \text{Vector}: v_r = n_\pi : \pi \begin{cases} \text{Punto}: O(0,0,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} OB(1,1,1) \\ OC(1,2,1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+z=0 : v_r(-1,0,1) \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$$

<u>Ejercicio 38</u> : Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x+y-1=0} \\ \mathbf{2x-y+z=0} \end{cases}$ y es paralelo a s: $\mathbf{\frac{1-x}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-4}}$

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r \\ v_s(-2,3,-4) \end{cases} \end{cases}$

Pasamos r a paramétricas: y = α, x = 1 - α, z = -2 + 2α + α = 3α - 2 $\begin{cases} P_r(1,0,-2) \\ v_r(-1,1,3) \end{cases}$

Plano: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$ -13(x – 1) -10y – (z + 2) = 0 $\Rightarrow$ -13x – 10y – z +11 = 0

<u>Ejercicio 39</u> : Indica qué condiciones deben cumplir a, b, c y d, para que el plano π: ax + by + cz + d = 0 sea:
a) Paralelo al plano OXY **b) Perpendicular al plano OXY**
c) Paralelo al eje Z **d) Perpendicular al eje X**
e) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $n_\pi \parallel n_{oxy}$ $\frac{a}{0}=\frac{b}{0}=\frac{c}{1} \Rightarrow$ a = 0, b = 0

b) $n_\pi . n_{OXY} = 0$ (a,b,c).(0,0,1) = 0 $\Rightarrow$ c = 0

c) $n_\pi . v_Z = 0$ (a,b,c).(0,0,1) = 0 $\Rightarrow$ c = 0

d) $n_\pi \parallel v_X$ $\frac{a}{1}=\frac{b}{0}=\frac{c}{0} \Rightarrow$ b = 0, c = 0

e) No es paralelo a ninguno de los ejes, a $\neq$ 0, b $\neq$ 0, c $\neq$ 0