# ÁNGULOS

**ANGULO ENTRE DOS RECTAS** $\quad \text{Cos}(r_1,r_2) = \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$

**ANGULO ENTRE DOS PLANOS** $\quad \mathbf{Cos}(\Pi_1, \Pi_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

**ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO** $\quad \text{Sen}(r, \Pi) = \cos(\vec{v}_r, \vec{n}_\Pi) = \dfrac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r||\vec{n}_\pi|}$

**<u>Ejemplo 40</u> : Hallar el ángulo que forman las siguientes rectas:**

$$r: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \qquad s: \begin{cases} 2x+3y-5z=4 \\ x-2y+5=0 \end{cases}$$

$$\cos(r,s) = \cos(v_r, v_s) \Rightarrow \begin{cases} v_r(5,3,-1) \\ v_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-10,-5,-7) \parallel (10,5,7) \end{cases} \Rightarrow \cos(v_r,v_s) =$$

$$\frac{|v_r . v_s|}{|v_r|.|v_s|} = \frac{|50+15-7|}{\sqrt{25+9+1}.\sqrt{100+25+49}} = \frac{58}{\sqrt{35}.\sqrt{174}} = 0{,}74 \Rightarrow \alpha = 41^\circ\ 59'\ 35{,}79''$$

**<u>Ejemplo 41</u> : Hallar el ángulo que forman los siguientes planos:**

**$\pi_1$ : x + 8y – 4z = 0** $\qquad$ **$\pi_2$: 2x – y + 3 = 0**

$$\cos(\pi_1,\pi_2) = \cos(n_{\pi1}, n_{\pi2}) = \frac{|n_{\pi1}.n_{\pi2}|}{|n_{\pi1}|.|n_{\pi2}|} = \frac{|2-8|}{\sqrt{1+64+16}.\sqrt{4+1+0}} = \frac{6}{\sqrt{81}.\sqrt{5}} = 0{,}3 \Rightarrow$$

$\alpha = 72^\circ\ 39'\ 14{,}16''$

**<u>Ejemplo 42</u> : Hallar el ángulo que forman la recta y el plano:**

**r: (x,y,z) = (3,-1,1) + t.(2,5,-1)** $\qquad$ **$\pi$: 2x – 5y +7z – 11 = 0**

$$\text{sen}(r,\pi) = \text{sen}(v_r, n_\pi) = \frac{|v_r.n_\pi|}{|v_r|.|n_\pi|} = \frac{|4-25-7|}{\sqrt{4+25+1}.\sqrt{4+25+49}} = \frac{28}{\sqrt{30}.\sqrt{78}} = 0{,}57 \Rightarrow$$

$\alpha = 35^\circ\ 22'\ 5{,}54''$

**<u>Ejercicio 43</u> : Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90º:**

$$r: \begin{cases} x = 2-5t \\ y = t \\ z = -2-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2t \\ z = mt \end{cases}$$

$v_r.v_s = 0 \Rightarrow (-5,1,-1).(1,2,m) = 0 \Rightarrow -5 + 2 - m = 0 \Rightarrow m = -3$

**<u>Ejercicio 44</u> : Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:**

**a) r: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}$ π: x – 2y – z + 1 = 0**

sen (r,π) = sen ($v_r$, $n_\pi$) = $\frac{|v_r.n_\pi|}{|v_r|.|n_\pi|} = \frac{|-2-8-2|}{\sqrt{4+16+4}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{24}.\sqrt{6}} = 1 \Rightarrow \alpha = 90º$

**b) r: x = t; y = 1 + 2t; z = -2 π: 2x – y + z = 0**

sen (r,π) = sen ($v_r$, $n_\pi$) = $\frac{|v_r.n_\pi|}{|v_r|.|n_\pi|} = \frac{|2-2+0|}{\sqrt{1+4+0}.\sqrt{4+1+1}} = 0 \Rightarrow \alpha = 0º$

**c) r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ π: x + z = 17**

sen (r,π) = sen ($v_r$, $n_\pi$) = $\frac{|v_r.n_\pi|}{|v_r|.|n_\pi|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{2}} = 0,87 \Rightarrow \alpha = 60º$

**<u>Ejercicio 45</u> : Calcula el ángulo que forman los dos planos siguientes:**
**α: z = 3 π: x – y + 2z + 4 = 0**

cos (α,π) = cos ($n_\alpha$, $n_\pi$) = $\frac{|n_\alpha.n_\pi|}{|n_\alpha|.|n_\pi|} = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{0+0+1}.\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{.\sqrt{6}} = 0,82 \Rightarrow \alpha = 35º\ 15'\ 51,8''$

**<u>Ejercicio 46</u> : Hallar los tres ángulos de un triángulo cuyos vértices son: A(0,0,0), B(1,2,1), C(3,1,1)**

AB = (1,2,1), AC = (3,1,1), BC = (2,-1,0)

Cos (AB,AC) == $\frac{3+2+1}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{9+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}.\sqrt{11}} = 0,74 \Rightarrow \alpha = 42º\ 23'\ 31,36''$

Cos (AB,BC) == $\frac{2-2+0}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{4+1+0}} = \frac{0}{\sqrt{6}.\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90º$

α = 180º - 90º - 42º 23' 31,36'' = 47º 36' 28,64''

**<u>Ejercicio 47</u> : Hallar el ángulo que forma el plano π: x – 2y + z = 0 con cada uno de los ejes coordenados.**

sen (OX,π) = sen ((1,0,0), $n_\pi$) = $\frac{|v_{OX}.n_\pi|}{|v_{OX}|.|n_\pi|} = \frac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,41 \Rightarrow \alpha = 24º\ 5'\ 41,43''$

sen (OY,π) = sen ((0,1,0), $n_\pi$) = $\frac{|v_{OY}.n_\pi|}{|v_{OY}|.|n_\pi|} = \frac{|-2|}{\sqrt{1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0,82 \Rightarrow \alpha = 54º\ 44'\ 8,2''$

sen (OZ,π) = sen ((0,0,1), $n_\pi$) = $\frac{|v_{OZ}.n_\pi|}{|v_{OZ}|.|n_\pi|} = \frac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,41 \Rightarrow \alpha = 24º\ 5'\ 41,43''$

# DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

**DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:** $A(x_1,y_1,z_1)$ , $B(x_2,y_2,z_2)$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

**DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA**

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{PP_r} \times \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}$$

**DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO:** $P(x_0,y_0,z_0)$, $\Pi$: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS**

$$d(r,s) = \frac{\left|[v_r, v_s, P_rP_s]\right|}{|v_r \times v_s|}$$

**DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO**

$d(r, \Pi) = d(P_r, \Pi)$

**DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS**

$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2)$

$$\text{Si } \begin{cases} \pi_1 : Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi_2 : Ax+By+Cz+D'=0 \end{cases} \Rightarrow d(\pi_1,\pi_2) = \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**<u>Ejemplo 48</u> : Hallar la distancia entre los puntos P(1,2,0) y Q(2,-3,1)**

$$d(P,Q) = \sqrt{(2-1)^2+(-3-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3.\sqrt{3}u = 5{,}2u$$

**<u>Ejemplo 49</u> : Halla la distancia del punto P(5,-1,6) y la recta r:** $\begin{cases} \mathbf{x = 1-2t} \\ \mathbf{y = -t} \\ \mathbf{z = 5+t} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} r: Pr(1,0,5),\ vr(-2,-1,1) \\ PPr = (-4,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow PP_r \times v_r = \begin{vmatrix} \bar{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,6,6)$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{PP_r} \times \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{0+36+36}}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{12} = 2.\sqrt{3}u = 3{,}46u$$

**<u>Ejemplo 50</u> : Halla la distancia del punto P(1,2,3) al plano $\pi$: 2x + 3y – z =-7**

$$d(P, \Pi) = \frac{|2.1+3.2-3+7|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = 3{,}21u$$

**<u>Ejemplo 51</u> : Halla la distancia entre las rectas r:** $\begin{cases} \mathbf{x = 5 + t} \\ \mathbf{y = -1} \\ \mathbf{z = 8 + 2t} \end{cases}$ **s:** $\begin{cases} \mathbf{x = 4 + 3t} \\ \mathbf{y = 3 - t} \\ \mathbf{z = 5 + 4t} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} r: P_r(5,-1,8), v_r(1,0,2) \\ s: P_s(4,3,5), v_s(3,-1,4) \end{array}\right\} P_rP_s(-1,4,-3) \Rightarrow [v_r, v_s, P_rP_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = [(3+0+24)-(2+16+0)] = 9$$

$$V_r \text{ x } V_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (2,2,-1) \Rightarrow d(r,s) = \frac{|[v_r, v_s, P_rP_s]|}{|v_r \text{ x } v_s|} = \frac{|9|}{\sqrt{4+4+1}} = 3u$$

**<u>Ejemplo 52</u>: Halla la distancia entre la recta r:** $\mathbf{\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}}$ **y el plano π: x – 3y –z + 6=0**

$$d(r, \Pi) = d(P_r, \Pi) = \frac{|3 - 3.1 - (-2) + 6|}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = 2{,}41u$$

**<u>Ejemplo 53</u> : Halla la distancia entre dos planos:** $\boldsymbol{\pi_1}$**: x – 5y + 2z – 19 = 0,** $\boldsymbol{\pi_2}$**: 2x – 10y + 4z = 0**

$$\pi_1: 2x - 10y + 4z - 38 = 0 \Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-38-0|}{\sqrt{4+100+16}} = \frac{38}{\sqrt{120}} = 3{,}47 \text{ u}$$

**<u>Ejercicio 54</u> : Halla la distancia que hay entre los puntos A(2,5,-2), B(-1,1,-2)**

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5u$$

**<u>Ejercicio 55</u> : Considera la recta r:** $\begin{cases} \mathbf{x - y = -3} \\ \mathbf{x + z = 1} \end{cases}$ **y el plano π: x + y – 2z = 1**

**a) Halla las coordenadas del punto S donde se cortan r y π**

Pasamos la recta a paramétricas y resolvemos el sistema: $x = \alpha$, $y = \alpha + 3$, $z = 1 - \alpha$

$\alpha + (\alpha + 3) - 2(1 - \alpha) = 1 \Rightarrow 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow S(0,3,1)$

**b) Calcula la distancia del punto P(4,0,1) al punto S del apartado anterior.**

$$d(P,S) = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5u$$

**<u>Ejercicio 56</u> : Calcula la distancia entre el punto P(2,-3,1) y el plano π: 3x – 4z = 3**

$$d(P, \Pi) = \frac{|3.2 - 4.1 - 3|}{\sqrt{9+0+16}} = \frac{1}{5} = 0{,}2u$$

**<u>Ejercicio 57</u> : Calcula la distancia entre el punto Q(2,-1,0) y el plano que contiene a P(2,0,4) y a r:**
$\begin{cases} \mathbf{x = 3 - 2t} \\ \mathbf{y = 2 + 3t} \\ \mathbf{z = 4} \end{cases}$

$$\text{Plano: } \begin{cases} \text{Punto}: P(2,0,4) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} PP_r = (3,2,4) - (2,0,4) = (1,2,0) \\ v_r(-2,3,0) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z-4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7(z-4) = 0 \Rightarrow z-4=0$$

$$d(Q, \Pi) = \frac{|0-4|}{\sqrt{0+0+1}} = 4u$$

**<u>Ejercicio 58</u>: Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:**

**a) $\pi_1$: x – 2y + 3 = 0 $\quad\quad$ $\pi_2$: 2x – 4y + 1 = 0**

$\pi_1$: 2x – 4y + 6 = 0 $\Rightarrow d(\pi_1,\pi_2) = \dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|6-1|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{5}{\sqrt{20}} = 1{,}12u$

**b) 3x – 2y + z – 2 = 0 $\quad\quad$ $\pi_2$: 2x – y + z = -5**

No son paralelos, se cortan $\Rightarrow d(\pi_1,\pi_2) = 0$

**<u>Ejercicio 59</u> : Halla la distancia entre la recta r: $\begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1+7\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi$: 3x – 4y – 3 = 0**

d(r, Π) = d($P_r$, Π) = d((2,0,-1),3x-4y-3=0) = $\dfrac{|3.2-4.0-3|}{\sqrt{9+16+0}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6u$

**<u>Ejercicio 60</u> : Calcula la distancia que hay entre el punto P(3,1,6) y la recta r: x = 4 + 4$\alpha$; y = 2 + $\alpha$; z = -1 - 3$\alpha$**

$\left.\begin{array}{l} r: Pr(4,2,\text{-}1),\ vr(4,1,\text{-}3) \\ PPr = (1,1,\text{-}7) \end{array}\right\} \Rightarrow PP_r \text{ x } v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (4,-25,-3)$

$d(P,r) = \dfrac{\left|\vec{PP_r} \text{ x } \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} = \dfrac{\sqrt{16+625+9}}{\sqrt{16+1+9}} = \sqrt{\dfrac{650}{26}} = \sqrt{25} = 5u$

**<u>Ejercicio 61</u> : Halla la distancia entre las rectas r: $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10-3\lambda \\ z = 9+5\lambda \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = 2-12t \\ y = 1+9t \\ z = 4+t \end{cases}$**

$\left.\begin{array}{l} r: P_r(0,-10,9),\ v_r(4,-3,5) \\ s: P_s(2,1,4),\ v_s(-12,9,1) \end{array}\right\} P_rP_s(2,11,-5) \Rightarrow [v_r, v_s, P_rP_s] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -12 & 9 & 1 \\ 2 & 11 & -5 \end{vmatrix} = [(-180-6-660)-(90+44-180)] = -800$

$V_r \text{ x } V_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 5 \\ -12 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (-48.-64,0) \Rightarrow d(r,s) = \dfrac{|[v_r, v_s, P_rP_s]|}{|v_r \text{ x } v_s|} = \dfrac{|-800|}{\sqrt{2304+4096}} = \dfrac{800}{80} = 10u$

# EJERCICIOS IMPORTANTES

## Corta o se apoya

**Ejercicio 62 : Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto P(2,0,-1) y corta a las rectas $s_1$: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$** **$s_2$: $\begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$**

$P_{s1}$ $(2\alpha+2,-\alpha+2,\alpha-1)$, $Ps_2(z=\beta, y=-3+3\beta, x=-1-3\beta)=(-1-3\beta,-3+3\beta,\beta)$

$PP_{s1}$ paralelo a $PP_{s2} \Rightarrow \frac{2\alpha}{-3-3\beta}=\frac{-\alpha+2}{-3+3\beta}=\frac{\alpha}{\beta+1}$

$$\begin{cases} -6\alpha+6\alpha\beta=3\alpha-6+3\alpha\beta-6\beta \\ 2\alpha\beta+2\alpha=-3\alpha-3\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha-6\beta-3\alpha\beta=6 \\ 5\alpha+5\alpha\beta=0 \Rightarrow 5\alpha(1+\beta)=0 \left\langle \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=-1 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow -6\beta=6 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \frac{0}{0}=\frac{2}{-6}=\frac{0}{0} \Rightarrow$ cierto

r: $\begin{cases} \text{Punto}: P(2,0,-1) \\ \text{Vector}: PP_{s1}=(0,2,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{0}=\frac{y}{2}=\frac{x+1}{0}$

**Ejercicio 63 : Halla la ecuación de la recta que pasa por A(1,1,1), es paralela al plano $\pi$: x – y + z – 3 = 0 y corta a la recta r: $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$**

$AP_r$ es perpendicular a $n_\pi$ (Producto escalar cero): $P_r(1,3,\alpha) \Rightarrow \begin{cases} AP_r(0,2,\alpha-1) \\ n_\pi(1,-1,1) \end{cases}$

$AP_r.n_\pi = (0,2,\alpha-1).(1,-1,1) = 0 \Rightarrow -2 + \alpha -1 = 0 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow$

r: $\begin{cases} \text{Punto}: A(1,1,1) \\ \text{Vector}: AP_r(0,2,2) \parallel (0,1,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{0}=y-1=z-1$

**Ejercicio 64 : Halla la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2,-1,1) y corta perpendicularmente a la recta r: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$**

$PP_r$ perpendicular a $v_r$ (Producto escalar nulo) $\Rightarrow \begin{cases} PP_r=(\alpha+3,2\alpha-1,3\alpha)-(2,-1,1)=(\alpha+1,2\alpha,3\alpha-1) \\ v_r=(1,2,3) \end{cases}$

$PP_r.v_r = 0 \Rightarrow \alpha + 1 + 4\alpha + 9\alpha - 3 = 0 \Rightarrow 14\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1/7$

Recta: $\begin{cases} \text{Punto}: P(2,-1,1) \\ \text{Vector}: PP_r=(8/7,2/7,-4/7) \parallel (4,1,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$

**Ejercicio 65 : Halla la recta perpendicular común a las rectas:**
**r: $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$** **s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$**

Recta r: $P_r(0,\alpha+1,2\alpha-3)$ $v_r(0,1,2)$
Recta s: $P_s(\beta+1,-\beta-1,3\beta)$ $v_s(1,-1,3)$

V= $v_r$ x $v_s$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5,2,-1)$

$P_r.P_s$ paralelo a v: $\frac{\beta+1}{5} = \frac{-\beta-\alpha-2}{2} = \frac{3\beta-2\alpha+3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta+2=-5-5\alpha-10 \\ \beta+\alpha+2=6-4\alpha+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\beta+5\alpha=-12 \\ 5\beta-5\alpha=-4 \end{cases} \Rightarrow \beta=-4/3$

Recta: $\begin{cases} \text{Punto}: P_s(-1/3,1/3,-4) \\ \text{Vector}: v=(5,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1/3}{5} = \frac{y-1/3}{2} = \frac{z+4}{-1}$

**<u>Ejercicio 66</u> : Encuentra la recta que pasa por el punto P(1,0,-1) y corta a las rectas $l_1$ y $l_2$ de ecuaciones: $l_1$: $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ $l_2$: $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$**

Pasamos $l_1$ a paramétricas: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right) \approx \begin{cases} -z+3x+2y=-1 \\ 5x+y=-5 \end{cases} \approx \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5-5\alpha \\ z=-7\alpha-9 \end{cases}$

$PP_{l1}$ paralelo a $PP_{l2} \Rightarrow \frac{\alpha-1}{2+t} = \frac{-5-5\alpha}{t} = \frac{-7\alpha-8}{2+t} \Rightarrow \alpha-1=-7\alpha-8 \Rightarrow \alpha=-7/8$

Recta: $\begin{cases} \text{Punto}: P(1,0,-1) \\ \text{Vector}: PP_{l1}(-15/8,-5/8,-15/8) \parallel (3,1,3) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{\grave{}z+1}{3}$

**<u>Ejercicio 67</u> : Comprueba que las rectas: r: $\begin{cases} x=1 \\ y=5+t \\ z=t \end{cases}$ s: $\begin{cases} x=7+3t \\ y=-5+t \\ z=7 \end{cases}$ se cruzan. Halla la ecuación de la recta perpendicular a ambas.**

Comprobar que se cruzan: $v_r$ (0,1,1), $v_s$(3,1,0) no son paralelos, se cortan o se cruzan. Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 1=7+3s \\ 5+t=-5+s \\ t=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-2 \\ t=-12 \\ t=7 \end{cases}$ Sistema incompatible, no tiene solución. Se cruzan.

Recta perpendicular común: $P_rP_s$ perpendicular a $v_r$,$v_s$
$P_rP_s$ = (6+3s, -10+s-t, 7-t)

Vector perpendicular a $v_r$ y a $v_s \Rightarrow$ v = $v_r$ x $v_s$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,3,-3)$

$P_rP_s$ paralelo a v $\Rightarrow \frac{6+3s}{-1} = \frac{-10+s-t}{3} = \frac{7-t}{-3} \Rightarrow \begin{cases} -18-9s=-7+t \\ 30-3s+3t=21-3t \end{cases} \approx \begin{cases} t+9s=-11 \\ 6t-3s=-9 \end{cases} \approx \begin{cases} s=-1 \\ t=-2 \end{cases}$

Recta: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r(1,3,-2) \\ \text{Vector}: (-1,3,-3) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-3}$

## Proyección ortogonal

**Ejercicio 68 : Calcula la proyección ortogonal de la recta r:** $\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ **sobre el plano π: 2x- 3y + z + 1 = 0**

[1] P = r ∩ π: 2(-1-λ) – 3(-λ) + 2λ + 1 = 0 ⇒ 3λ = 1 ⇒ λ = 1/3 ⇒ P(-4/3, -1/3, 2/3)
[2] Q un punto cualquiera de r (distinto de P): Q(-1,0,0)

[3] r' $\begin{cases} \text{Punto}: Q(-1,0,0) \\ \text{Vector}: v_{r'} = n_\pi = (2,-3,1) \end{cases} \Rightarrow r': \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$

[4] Q' = r' ∩ π: 2(-1+2t) – 3(-3t) + t + 1 = 0 ⇒ 14t = 1 ⇒ t = 1/14 ⇒ Q'(-12/14,-3/14,1/14)

[5] s es la recta que pasa por P y Q' ⇒ s: $\begin{cases} \text{Punto}: P(-4/3,-1/3,2/3) \\ \text{Vector}: PQ' = (20/14, 5/42, -25/42) \parallel (4,1,-5) \end{cases}$

$$S: \begin{cases} x = -\frac{4}{3} + 4\alpha \\ y = -\frac{1}{3} + \alpha \\ z = \frac{2}{3} - 5\alpha \end{cases} \qquad \forall \alpha \in R$$

## Simétricos

**Ejercicio 69 : Halla el punto simétrico de P(1,0,1) respecto del plano π: x – y + z = 1**

[1] Calcular la recta r: $\begin{cases} \text{Punto}: P(1,0,1) \\ \text{Vector}: v_r = n_\pi = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$

[2] Calcular el punto C = r ∩ π: 1+t –(-t) + 1 + t = 1 ⇒ 3t = -1 ⇒ t = -1/3 ⇒ C(2/3,1/3,2/3)

[3] C es el punto medio de P y P': $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+1}{2}\right) \Rightarrow$ P'$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

**Ejercicio 70 : Determina el punto simétrico de A(-3,1,-7) respecto de la recta r:** $\mathbf{\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}}$

[1] Calcular el plano π: $\begin{cases} \text{Punto}: A(-3,1,-7) \\ \text{Vector}: n_\pi = v_r = (1,2,2) \end{cases} \Rightarrow$ x + 2y + 2z + D ⇒ -3 + 2 – 14 + D = 0 ⇒ D = 15 ⇒ x + 2y + 2z + 15 = 0

[2] Calcular el punto C = r ∩ π: (t-1) + 2(2t+3) + 2(2t-1) + 15 = 0 ⇒ 9t = -18 ⇒ t = -2 ⇒ C(-3,-1,-5)

[3] C es el punto medio de A y A': $(-3,-1,-5) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-5}{2}\right) \Rightarrow$ A'(-3,-3,-3)