TEMA 8 – LÍMITES DE FUNCIONES, CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS

8.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

8.1.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

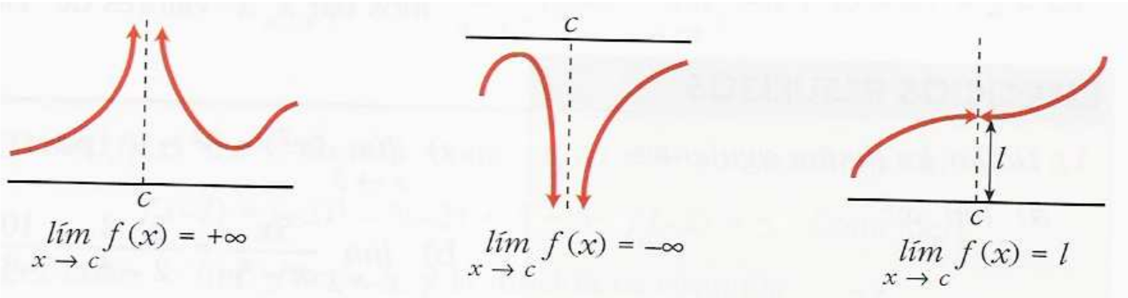
Límite de una función en un punto

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c

Notas:

- Que x se aproxima a "c" significa que toma valores muy cerca de "c" (Se puede acercar por la izquierda o por la derecha).
- ℓ puede ser $+\infty$ ó $-\infty$ y entonces **x = c es una asíntota vertical**.

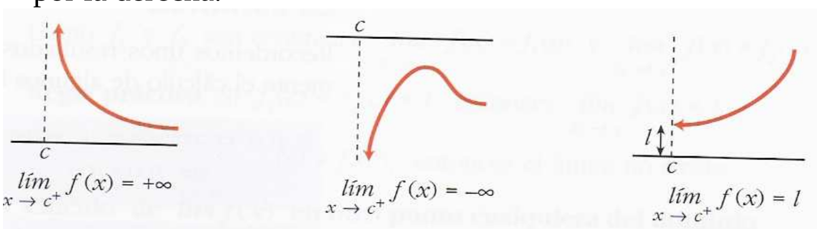


Límites laterales de una función en un punto

- Límite por la derecha:

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c por la derecha de f(x) es ℓ

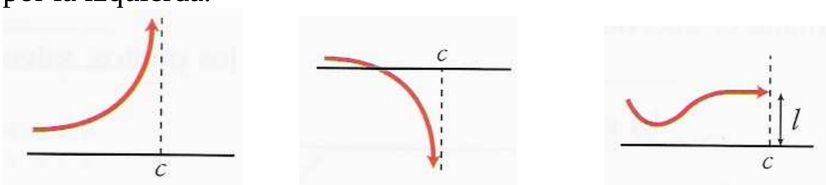
Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c por la derecha.



- Límite por la izquierda:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c por la izquierda de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c por la izquierda.



Existen del límite

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los dos límites laterales y sean iguales.

8.1.2 – LÍMITES EN EL INFINITO

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es más infinito
Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes positivos. (1º cuadrante)

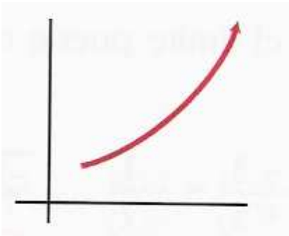
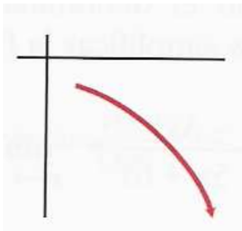
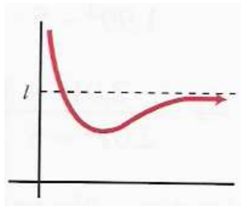
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es menos infinito.
Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes positivos. (4º cuadrante)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes positivos: **y = ℓ es una asíntota vertical.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es más infinito
Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes negativos. (2º cuadrante)

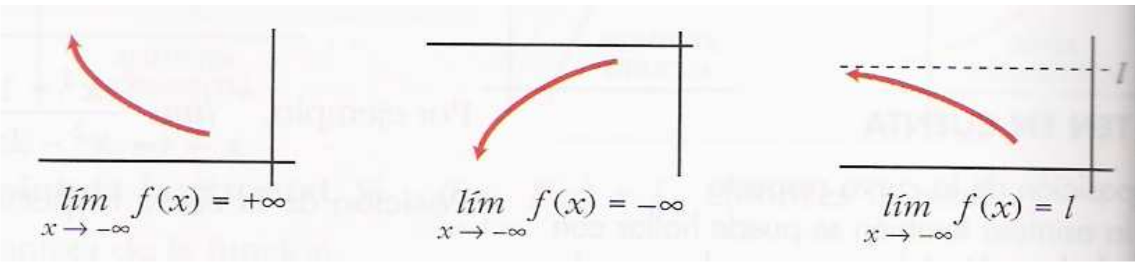
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es menos infinito.
Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes negativos. (3º cuadrante)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes negativos: **y = ℓ es una asíntota vertical.**



8.1.3– CÁLCULO DE LÍMITES

1 – Se sustituye la “x” por el valor al que tiende

a) $\lim_{x\to 3} x^2$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{5x}{x-5}$ c) $\lim_{x\to 7} \sqrt{3x+4}$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\text{sen}\, x + 3)$ e) $\lim_{x\to 0,1} \log_{10} x$ f) $\lim_{x\to +\infty} 2x^2 - 4x + 7$

g) $\lim_{x\to +\infty} -2x^2 - 4x + 7$ h) $\lim_{x\to -\infty} 2x^2 - 4x + 7$ i) $\lim_{x\to -\infty} -2x^2 - 4x + 7$

j) $\lim_{x\to +\infty} 2x + x^3 - 3$ k) $\lim_{x\to +\infty} 2x - x^3 - 3$ l) $\lim_{x\to -\infty} 2x + x^3 - 3$

m) $\lim_{x\to -\infty} 2x - x^3 - 3$ n) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x}$ ñ) $\lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x^2}$

o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-1}{-5}$ p) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{-5}$

2 – Indeterminaciones:

$\infty - \infty$ Se hacen operaciones. Cuando aparecen radicales, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

a) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ c) $\lim_{x\to +\infty} (2^x - x^{10})$ d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x+1} - x^3$

$$\infty/\infty \begin{cases} \pm\infty & \text{Si grado del numerador} > \text{grado del denominador (El signo depende de los coeficientes de la x de mayor grado del numerador y del denominador)} \\ \frac{a}{b} & \text{Si grado del numerador} = \text{grado del denominador (a y b son los coeficientes de la x de mayor grado del numerador y del denominador)} \\ 0 & \text{Si grado del numerador} < \text{grado del denominador} \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-5x+3}{3x-5}$ b) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{x^3}$ c) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2-5}$ d) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{-x^3}$

k/0 Hallar límites laterales

a) $\lim_{x\to 2} \frac{2}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{-2}{x-2}$ c) $\lim_{x\to 2} \frac{3}{2-x}$ d) $\lim_{x\to 2} \frac{-3}{2-x}$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{3x}{(x-2)^2}$ f) $\lim_{x\to 2} \frac{-3}{(x-2)^2}$ g) $\lim_{x\to -2} \frac{3}{x+2}$ h) $\lim_{x\to -2} \frac{-3}{x+2}$

0/0 Factorizar y simplificar

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$

$$\infty.0 \quad \lim f.g = \begin{cases} \lim \frac{f}{1/g} = \frac{\infty}{\infty} \\ \lim \frac{g}{1/f} = \frac{0}{0} \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\text{Ln}x$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}.x$

∞^0 ó 0^0 : Tomar logaritmos

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\text{Ln}x)^{1/x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

1^∞ : Tipo número e : Aplicar : $\lim\limits_{x\to \left\{\begin{smallmatrix} a \\ \infty \end{smallmatrix}\right.} \left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ **ó**

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).[f(x)-1]}$$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{3}\right)^{\frac{1}{2-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x}$

Equivalencias: Sólo se pueden aplicar en productos y cocientes

$x \Rightarrow 0$	**sen x ~ x** **tag x ~ x** **$1 - \cos x \sim x^2/2$** **arcsen x ~ x** **arctag x ~ x** **Ln (x + 1) ~ x** **$e^x - 1 \sim x$**	**$f(x) \Rightarrow 0$**	**sen f(x) ~ f(x)** **tag f(x) ~ f(x)** **$1 - \cos f(x) \sim f(x)^2/2$** **arcsen f(x) ~ f(x)** **arctag f(x) ~ f(x)** **Ln (f(x) + 1) ~ f(x)** **$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$**
$x \Rightarrow 1$	**Ln x ~ x - 1**	**$f(x) \Rightarrow 1$**	**Ln f(x) ~ f(x) - 1**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{sen}x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3\text{tag}x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{Ln}x}{1-x}$

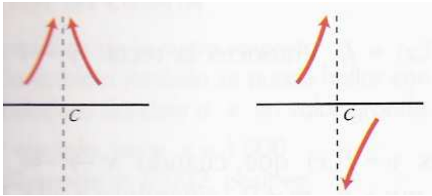
d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\text{tag}^2(x-2)}{x^2-4x+4}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\text{Ln}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3- **En funciones definidas a trozos**, en los puntos donde esté definida de distinta forma si me aproximo por valores más pequeños, que por valores más grandes, habrá que hacer límites laterales.

a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<3 \\ -x+7 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ Calcular su límite en los puntos 3,1, 7

8.2 – ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

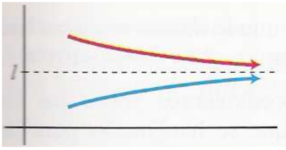
- **Asíntotas verticales: x = c y $\rightarrow \infty$**



Cálculo: Puntos que anulan el denominador
Puntos que anulan lo que está dentro del logaritmo

Aproximación: Calcular los límites laterales $\begin{cases} -\infty & \text{Por abajo} \\ +\infty & \text{Por arriba} \end{cases}$

- **Asíntotas horizontales: x $\rightarrow \infty$ y = b** (Grado numerador ≤ Grado denominador)

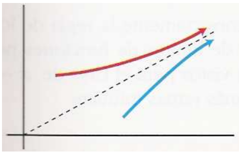


Cálculo: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

Aproximación: f(± 1000) – Asíntota $\begin{cases} < 0 & \text{Por debajo} \\ > 0 & \text{Por encima} \end{cases}$

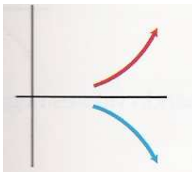
- **Asíntotas oblicuas: y = mx + n** (Grado Numerador – Grado denominador = 1)

Cálculo: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$



Aproximación: f(± 1000) – Asíntota (± 1000) $\begin{cases} < 0 & \text{Por debajo} \\ > 0 & \text{Por encima} \end{cases}$

RAMAS INFINITAS (Grado Numerador – Grado denominador ≥ 2)



Cálculo: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$ c) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2x}$

d) $y = \dfrac{3x - 5}{x^2 + 3x + 2}$ e) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$ f) $y = \dfrac{x^3 - 5x^2}{-x + 3}$

8.3 - CONTINUIDAD

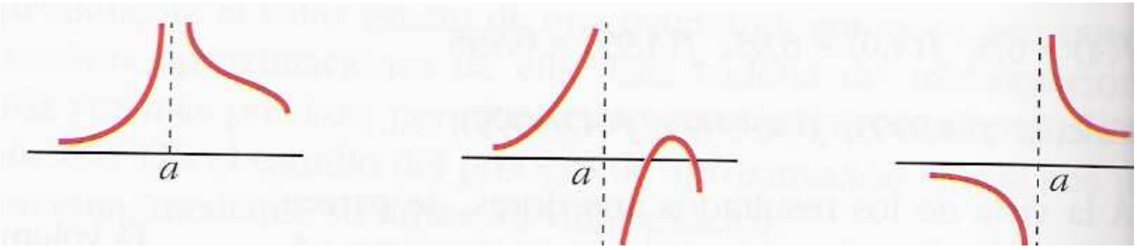
La idea de función continua es la de que "puede ser construida con un solo trazo".

8.3.1 – CONTINUIDAD EN UN PUNTO

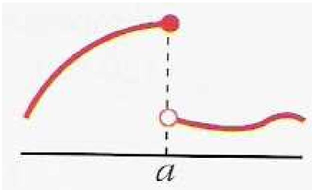
Una función f(x) es continua en el punto x = a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, deben existir los dos límites laterales, ser iguales y coincidir con f(a).

<u>Tipos de discontinuidades</u>

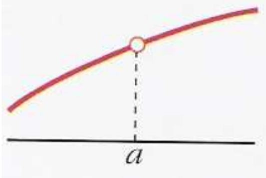
- **Discontinua inevitable de salto infinito**: Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.

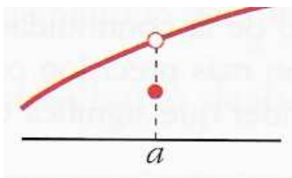


- **Discontinua inevitable de salto finito**: Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



- **Discontinua evitable**: Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con f(a) o no existe f(a)





8.3.2 – CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

DEFINICIÓN

Una función se dice que es continua en un intervalo (finito o infinito) de R si es continua en cada punto del intervalo.

Todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora, exceptuando las funciones a trozos), son continuas en todos los puntos de su dominio.

Las funciones a trozos habrá que estudiarlas en los extremos de sus trozos que pertenezcan al dominio.

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = \frac{x^2-3}{x}$ c) $y = \frac{x+2}{x-3}$ d) log x

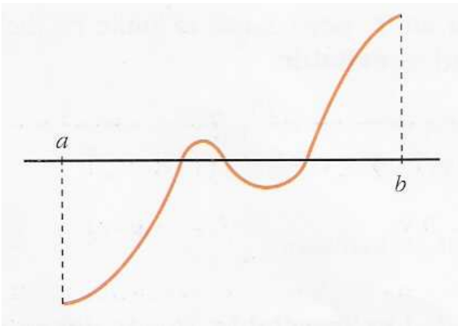
e) $y = \sqrt{x+2}$ f) $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x<3 \\ x+1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ g) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x\neq 4 \\ 1 & \text{si } x=4 \end{cases}$

h) Calcular el valor de n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+1 & \text{si } x\leq 4 \\ 2x+n & \text{si } x>4 \end{cases}$ sea continua en todo R.

i) Calcular k para que $y = \begin{cases} x^3-2x+k & \text{si } x\neq 3 \\ 7 & \text{si } x=3 \end{cases}$ sea continua en R

TEOREMA DE BOLZANO

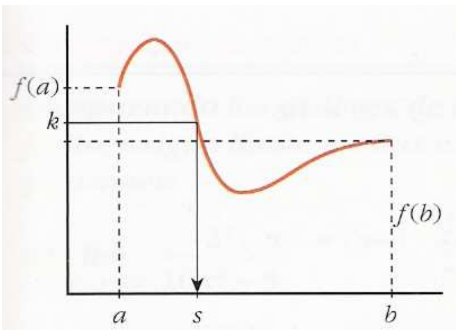
Si f(x) es continua en [a,b] y "signo de f(a) ≠ signo de f(b)", entonces existe $c \in (a,b)$ tal que f(c) = 0



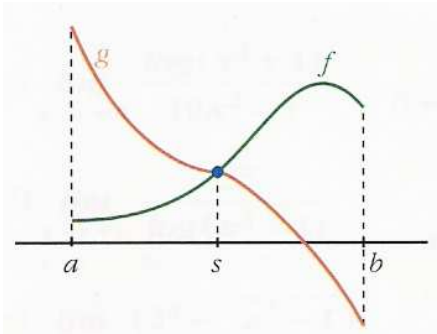
CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE BOLZANO

TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (DARBOUX): Si f es continua en [a,b], entonces toma todos los valores intermedios entre f(a) y f(b).

Es decir, cualquiera que sea el número k, comprendido entre f(a) y f(b), existe un número s, a < s < b, tal que f(s) = k



OTRA CONSECUENCIA: Si f y g son funciones continuas en [a,b] y $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe un número $s \in (a,b)$, tal que $f(s) = g(s)$.



TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si f es continua en [a,b], entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo. Es decir, existen sendos números c y d, del intervalo [a,b] para los cuales se cumple que: cualquiera que sea $x \in [a,b]$ es $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.