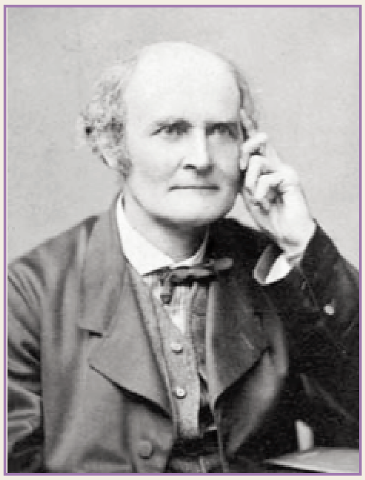
1 Matrices

Son muchas las actividades en las que conviene disponer las informaciones numéricas ordenadas en tablas de doble entrada. Por ejemplo, se conocen las distancias entre las siguientes ciudades: Madrid y Barcelona, 600 Km; Madrid y Valencia, 350 Km; Madrid y Zaragoza, 300 Km; Madrid y Cádiz, 974 Km; Barcelona y Valencia, 349 Km; Barcelona y Zaragoza, 296 Km; Barcelona y Cádiz, 1284 Km; Valencia y Zaragoza, 326 Km; Valencia y Cádiz, 808 Km; Zaragoza y Cádiz, 988 Km.

Los datos anteriores resultan más claros si se expresan mediante una tabla de doble entrada como la siguiente:

Distancias en Km	Barcelona	Cádiz	Madrid	Valencia	Zaragoza
Barcelona	0	1284	600	349	296
Cádiz	1284	0	974	808	988
Madrid	600	974	0	350	300
Valencia	349	808	350	0	326
Zaragoza	296	988	300	326	0

Las disposiciones rectangulares de datos numéricos facilitan su lectura, interpretación y análisis, y dan pie al concepto matemático de matriz, cuya utilidad va mucho más allá de una mera disposición de números. El concepto de matriz tiene múltiples aplicaciones en matemáticas y fueron empleadas por primera vez por el matemático inglés Arthur Cayley (1821 – 1895).

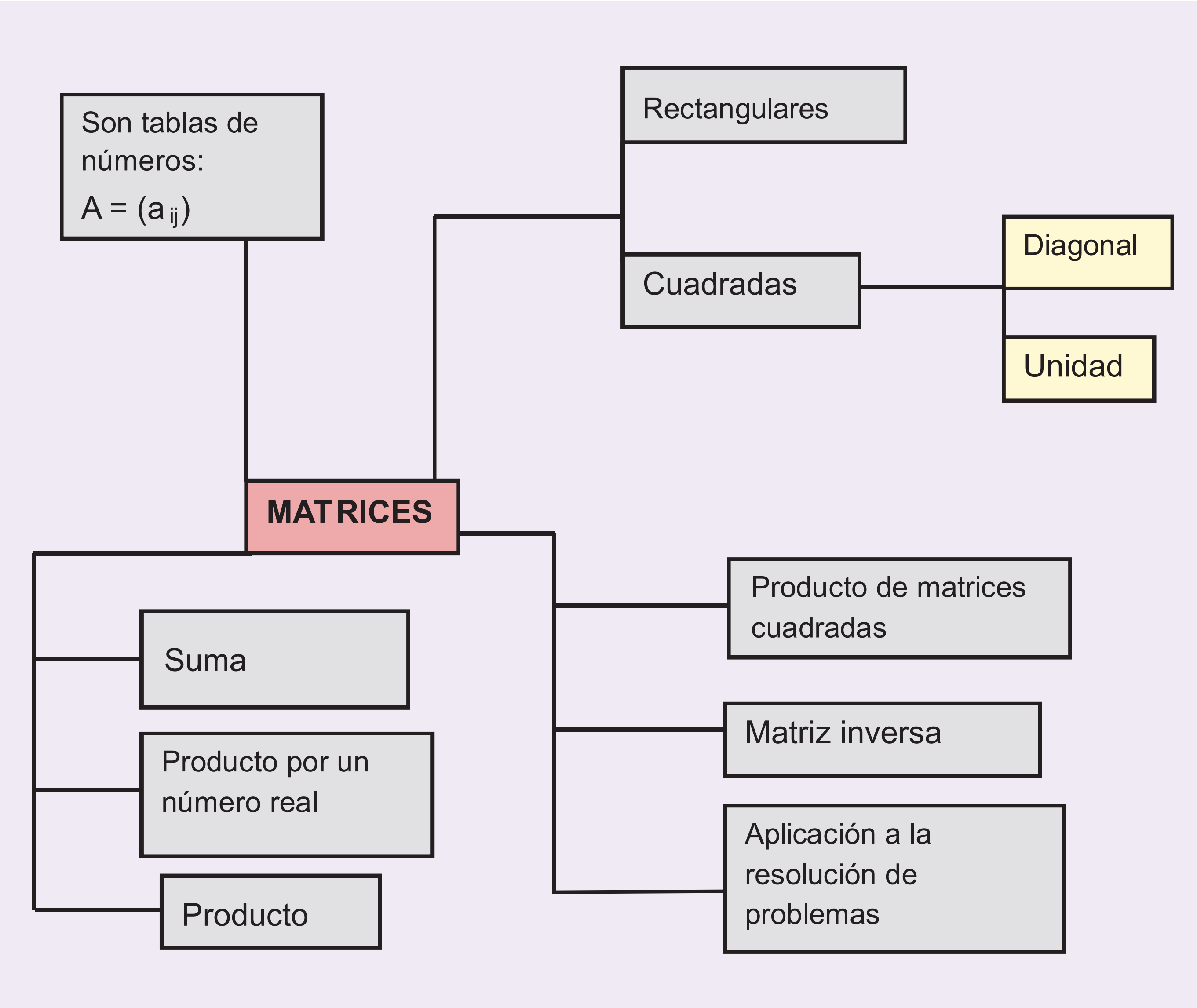

Arthur Cayley (Wikipedia org. Dominio público)

En esta Unidad estudiaremos las matrices por sí mismas; es decir, los tipos de matrices, las propiedades y las operaciones con matrices. Particular importancia tiene el cálculo de la matriz inversa, que en esta Unidad se calcula por el método de Gauss. La matriz inversa se empleará en la resolución de ecuaciones matriciales. Ecuaciones cuya incógnita no encubre a un número, sino a una matriz.

Al final de la Unidad se presentan algunos problemas en los que las matrices facilitan su solución.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Reconocer matrices y en qué casos resulta operativo o imprescindible su utilización.
2. Conocer algunos tipos de matrices.
3. Dominar las operaciones con matrices, así como las propiedades correspondientes.
4. Calcular si existe la matriz inversa de una matriz cuadrada a partir de la definición o aplicando el método de Gauss.
5. Resolver problemas utilizando matrices.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Matrices: definición

Se llama **matriz** de orden *m x n* a una disposición en tabla rectangular de *m x n* números reales dispuestos en *m* filas y *n* columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

A los números reales a_{ij} se les llama **elementos de la matriz**. El primer subíndice *i* indica la fila y el segundo *j* la columna en la que se encuentra el elemento a_{ij}.

Por ejemplo, el elemento a_{32}, se encuentra en la tercera fila y segunda columna.

El número de filas y de columnas es la **dimensión de la matriz** y se designa así: *m x n*; si ***m = n*** filas igual a columnas, se trata de una **matriz cuadrada** de orden *n.*

Las matrices se representan así: $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$, etc.

Por ejemplo, la matriz $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 5 & 0 \\ 1 & -3 & \sqrt{2} & 6 \\ -4 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 3 x 4 (tres filas y cuatro columnas), en la matriz anterior $a_{13} = 5$; $a_{23} = \sqrt{2}$; etc.

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son iguales si tienen la misma dimensión (o el mismo orden, si son cuadradas) y además son iguales todos los elementos que ocupan el mismo lugar.

Por ejemplo, las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{9} & -5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & 3 & c \\ 2 & d & 6 \end{pmatrix}$ serán iguales si $a = 2$; $b = 6$; $c = -5$ y $d = 0$.

Actividades

1. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{5} & \sqrt{3} \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, **a)** ¿cuál es su dimensión?; **b)** indica el valor de a_{12}, a_{21} y a_{23}.

2. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$, indica los valores de *x*, *y*, *z* en la matriz *B* para que sea igual a *A*.

2. Tipos de matrices

En este apartado describiremos algunos de los tipos de matrices más usuales.

- **Matriz rectangular** es aquella matriz en la que el número de filas es distinto al de columnas $m \neq n$.

  Ejemplo de matriz rectangular: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

- **Matriz cuadrada** es aquella en la que el número de filas es igual al de columnas $m = n$.

  Ejemplo de matriz cuadrada: $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

  En una matriz cuadrada se llama diagonal principal al conjunto de los elementos de la forma a_{ii}; en la matriz *B*, la diagonal principal la forman los elementos -2, 3, -8.
  En una matriz cuadrada se llama diagonal secundaria al conjunto de los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$; en la matriz *B*, la diagonal secundaria la forman los elementos 7, 3, 0 cuyos subíndices suman 4.

- **Matriz fila** es una matriz que tiene una fila; por tanto, de dimensión 1 x *n*.
  Por ejemplo, $A = (-1 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 0)$ es una matriz fila de dimensión 1 x 4.

- **Matriz columna** es una matriz que tiene una columna; por tanto, de dimensión *m* x 1.

  Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3 x 1.

- **Matriz opuesta** de una matriz *A* es aquella que tiene por elementos los opuestos de *A*; se representa por -*A*.

  Ejemplo: La opuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ es la matriz $-A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

- **Matriz traspuesta** de una matriz *A* es aquella que resulta al escribir las filas de A como columnas; se representa por A^t.

  La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

  De la definición se deduce que si *A* es de dimensión *m* x *n*, la dimensión de su traspuesta será *n* x *m*. En el ejemplo la dimensión de *A* es 2 x 3 y la dimensión de A^t es 3 x 2.

- **Matriz simétrica:** una matriz cuadrada es simétrica si su traspuesta coincide con ella; es decir, $A^t = A$, o también $a_{ij} = a_{ji}$.

  Ejemplo: Las matrices *A* y *B* son simétricas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Matriz antisimétrica:** una matriz cuadrada es antisimétrica si su traspuesta es también su opuesta; es decir, $A = -A^t$, o también $a_{ij} = -a_{ji}$.

  Ejemplo: Las siguientes matrices son antisimétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

  De la definición se deduce que en toda matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal son nulos.

- **Matriz nula** es la que tiene todos sus elementos nulos. La denotaremos por $O = (0)$.

  Ejemplos: Las siguientes matrices son nulas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz diagonal:** es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal.

  Por ejemplo, las siguientes matrices son diagonales:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalar:** es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal son iguales.

  Por ejemplo, las siguientes matrices son escalares: $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- **Matriz unidad o identidad:** es una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal principal son unos; también se llama matriz identidad.

  Por ejemplo, las matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices identidad de orden dos y tres respectivamente.

- **Matriz triangular:** es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (por encima) de la diagonal principal son cero.

  Ejemplo: Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares.

Actividades

3. Escribe las siguientes matrices:

a) la matriz unidad de orden cuatro; **b)** la matriz nula de dimensión 3 x 2; **c)** una matriz triangular de orden dos; **d)** una matriz diagonal de orden dos.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz traspuesta de A y su opuesta.

3. Operaciones con matrices

3.1. Suma de matrices

Dadas dos matrices de dimensión $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, llamamos suma de ambas a la matriz $C = (c_{ij})$ de la misma dimensión cuyo término genérico es $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

La suma de matrices se designa $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Ejemplo

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $A + B$.

Solución: $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+0 & 2+1 \\ 5+3 & -4+5 & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

La **suma** $(a_{ij} + b_{ij})$ se obtiene al sumar los elementos que ocupan el mismo lugar en una y otra matriz.

Propiedades de la suma:

- **Asociativa.** Cualesquiera que sean las matrices A, B y C se cumple la igualdad $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Existencia de la matriz nula**. $O = (0)$ tal que: $A + O = A$.
- **Existencia de la matriz opuesta**. Dada la matriz A existe la matriz $-A$, su opuesta, de modo que: $A + (-A) = O$.
- **Conmutativa**. Para todo par de matrices A y B se cumple: $A + B = B + A$.

3.2. Diferencia de matrices

La diferencia de matrices A y B se representa por $A - B$ y se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo; es decir: $A - B = A + (-B)$.

Ejemplo

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $A - B$.

Solución: $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-0 & 2-1 \\ 5-3 & -4-5 & 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

La **diferencia** $(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$ se obtiene al restar elementos que ocupan el mismo lugar en una y otra matriz.

3.3. Producto de un número por una matriz

Cualesquiera que sean el número real k y la matriz $A = (a_{ij})$, se llama producto de k por A, a la matriz $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión que A y cuyo término genérico es: $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

EL **producto de un número por una matriz** $k(a_{ij})$ se obtiene al multiplicar por k cada elemento de $A = (a_{ij})$

Ejemplo

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $k = 5$. Calcular $k \cdot A$

Solución: $$k \cdot A = 5\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-2) & 5\cdot 0 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 4 & 5(-3) & 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 20 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un número por una matriz.

Cualesquiera que sean las matrices A y B y los números reales λ y μ;

se verifica:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

2. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A.$

3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$

4. $1 \cdot A = A.$

3.4. Producto de matrices

Para multiplicar matrices, las matrices factores deben reunir algunos requisitos que describiremos en este apartado:

a) Producto de una matriz fila por una matriz columna.

Sean A una matriz con una fila y n columnas y B una matriz con n filas y una columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

El producto de las matrices A y B es otra matriz $C = A \cdot B$ con una fila y una columna; es decir, un número: $c = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$.; por tanto,

$$A \cdot B = C = (c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i .$$

Hay que hacer notar que para poder multiplicar A y B el número de columnas del primer factor, A, debe ser igual al número de filas del segundo factor B.

Ejemplo

4. Sean $A = (2 \quad 1 \quad 4)$ una matriz con una fila y 3 columnas y $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ una matriz con 3 filas y una columna.

Hallar la matriz producto.

Solución: $A \cdot B = (2 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4(-1)) = (6)$ que es una matriz de orden 1x1; por tanto, un número.

Regla: Observa que para realizar el producto se deja caer la matriz fila *A* en la matriz columna *B*; multiplicar los elementos enfrentados y sumar los resultados.

b) Producto de dos matrices cualesquiera

Las matrices *A* de orden *m* x *n*, y *B* de orden *n* x *p;* se pueden multiplicar si el número de columnas de *A* coinciden con el número de filas de *B*.

El **producto de matrices** *A* y *B* es otra matriz *C* de orden *m* x *p* con *m* filas (las del primer factor *A*) y *p* columnas (las del segundo factor *B*).

El elemento c_{ij} de la matriz producto *C* es el resultado de multiplicar la fila *i* de la matriz *A* por la columna *j* de la matriz *B* consideradas ambas como matrices fila y columna respectivamente.

El elemento c_{ij} se calcula, por tanto, así:

$$c_{1j} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}) = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj}.$$

Ejemplo

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. **a)** Indicar la dimensión de la matriz producto. **b)** Calcular *A*· *B*.

Solución:

a) La dimensión de *A* es 2x3; la dimensión de *B* es 3x2; como el número de columnas de *A,* 3, coincide con el de filas de *B*, las matrices se pueden multiplicar y además la dimensión de la matriz producto es 2 x 2; esto es, número de filas del primer factor y número de columnas del segundo factor.

b) Las notaciones que se han empleado en el desarrollo del producto de matrices se pueden simplificar, mediante la siguiente regla.

Regla: Los elementos de la matriz producto se obtienen al dejar caer los elementos de las filas de la matriz primer factor sobre las columnas de la matriz segundo factor; multiplicar los elementos que han quedado enfrentados y finalmente sumarlos.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot(-2)+0\cdot 5 \\ 4\cdot 2+1\cdot 4+3\cdot 1 & 4\cdot 3+1\cdot(-2)+3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

El producto de matrices tiene las propiedades siguientes:

Propiedad asociativa: cualesquiera que sean las matrices *A, B, C* en los casos que se puedan multiplicar las tres matrices. Es decir, si *A* es de dimensión *m* x *n*, B de dimensión *n* x *p* y C de dimensión *p* x *q*, entonces:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

El producto de matrices no es en general conmutativo. Por ejemplo:

a) Hay casos en los cuales es posible efectuar $A \cdot B$, y no $B \cdot A$.

Por ejemplo, si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces,

$$A_{2x3} \cdot B_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot(-1)+3\cdot 0 \\ 0\cdot 2+3\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

No es posible efectuar $B_{3x1} \cdot A_{2x3}$; *B* tiene una columna y *A* tiene dos filas; ambos números no coinciden.

b) En los casos en que es posible efectuar $A \cdot B$ y $B \cdot A$, no siempre dan el mismo resultado. A veces ni siquiera son de la misma dimensión.

Por ejemplo, si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, entonces

$$A_{2x3} \cdot B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 0+3\cdot 4+2\cdot 5 \\ 0\cdot 1+2\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 0+2\cdot 4+4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$$

$$B_{3x2} \cdot A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 2 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot 3+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \\ -1\cdot 1+5\cdot 0 & -1\cdot 3+5\cdot 2 & -1\cdot 2+5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 14 & 20 \\ -1 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Propiedad distributiva: dadas las matrices A de dimensión $m \times n$; B y C de dimensión $n \times p$ se cumple:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Ejemplo

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Comprueba la igualdad: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Solución:

Primer miembro: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$

Segundo miembro: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$

El resultado es el mismo.

Actividades

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; calcula:

a) $A + B$; **b)** $A - B$; **c)** $2A - 3B + 4C$; **d)** $A \cdot B$; **e)** $B \cdot A$; **f)** $A(B + C)$.

6. Calcula los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

7. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula: **a)** $A + 2B$; **b)** $3A - B$;

c) $A^t \cdot B$; **d)** $A \cdot B^t$; **e)** $C \cdot A^t$ y **f)** $B \cdot C^t$.

8. Comprobar la igualdad $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. Producto de matrices cuadradas

El **producto de matrices cuadradas** merece atención especial, puesto que, las matrices cuadradas de orden n se multiplican entre sí y el resultado es una matriz de orden n.

Por ejemplo, el producto de dos matrices de orden dos es otra matriz de orden dos, como se indica a continuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

En cuanto a las propiedades es evidente que siguen conservando las propiedades asociativa del producto y distributiva del producto respecto de la suma.

En cuanto a la propiedad **conmutativa** siempre es posible el doble producto $A \cdot B$ y $B \cdot A$, pero en general el resultado será diferente, como se indica en el ejemplo siguiente.

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; se observa que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

El producto de matrices cuadradas posee **elemento unidad** y es la matriz identidad I_n; si A es una matriz cuadrada de orden n, se tiene:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

La matriz unidad de orden dos será: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Potencias de matrices cuadradas

Como hemos visto, el producto de dos matrices cuadradas es otra del mismo orden; esto hace que una matriz se pueda repetir como factor cuantas veces se precise, dando lugar a las **potencias de matrices**, así:

$$A \cdot A = A^2; \quad A \cdot A \cdot A = A^3; \quad ...; \quad A \cdot A \cdot ...^{n \text{ veces}} ... \cdot A = A^n.$$

Ejemplos

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; calcula A^2, A^3, y encuentra una expresión para A^n.

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La regla que da forma a las potencias es la siguiente, el término a_{12} de cada potencia es el producto del exponente de la potencia multiplicado por dos.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, calcular A^{100}.

Solución: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$. $A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$.

La regla que da forma a las potencias en este ejemplo es la siguiente, los valores de los elementos a_{21} y a_{31} coinciden con el valor del exponente, luego:

$$\boxed{A^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\100&1&0\\100&0&1\end{pmatrix}}$$

Actividades

9. Dadas la matices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&2&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&3\\1&0&4\end{pmatrix}$, calcula: **a)** $A\cdot B$, **b)** $B\cdot A$, **c)** A^2+B^2.

10. Calcula A^{20} y A^{30}, siendo $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

11. Sea $A=\begin{pmatrix}x&-1\\1&y\end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2.

b) Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica que $A^2=\begin{pmatrix}x+1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$

12. Hallar todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}$, con a, b, c, números reales que satisfacen la ecuación matricial $X^2=2X$.

13. Encontrar números a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$ verifique $A^2=2A$. Para estos valores de a y b y tomando $B=\frac{1}{2}A$, calcular B^{50}, A^{50}.

14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, calcular las matrices A^2, A^3, A^4, A^5. Obtener razonadamente la matriz A^n para $n>5$.

5. Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B llamada **matriz inversa** de A, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Cuando existe la matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa así: A^{-1}; es decir, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman **matrices regulares**.

Las matrices cuadradas que no tienen inversa se llaman **matrices singulares**.

5.1. Cálculo de la matriz inversa a partir de la definición

Dada la matriz cuadrada de orden dos $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, vamos a calcular su inversa.

Se trata de calcular una matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ que cumpla: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Efectuamos el producto: $\begin{pmatrix} 4x+7z & 4y+7u \\ x+2z & y+2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La igualdad de los dos términos da lugar a los sistemas: $\begin{cases} 4x+7z=1 \\ x+2z=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 4y+7u=0 \\ y+2u=1 \end{cases}$

Las soluciones de los sistemas son: $x = 2$, $z = -1$; $y = -7$, $u = 4$.

La matriz inversa será: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.2. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

El **método de Gauss** para el cálculo de la matriz inversa de A: si existe, se parte de la matriz (A I I_n), y … legar a la matriz (I_n I B); entonces la m…

Este método para el cálculo de la matriz inversa de A si existe, parte de la matriz (A I I_n); y mediante las trasformaciones elementales sobre la matriz de partida se llega a la matriz (I_n I B); la matriz $B = A^{-1}$, es la inversa de A.

Las …

- Cambiar el orden de las filas.
- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un número.

Ejemplos

9. Hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

Solución: Añadimos a la matriz A la matriz unidad I, así:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -4 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow \begin{matrix}\\ 2x2^{a}F\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -4 & 1 & 0\\ 6 & -2 & 0 & 2\end{array}\right)\Rightarrow \begin{matrix}\\ 2^{a}F-3x1^{a}F\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -3 & 2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}1^{a}F\div 2\\ 3^{a}F\div(10)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & -3/10 & 1/5\end{array}\right)\Rightarrow \begin{matrix}1^{a}F+2x2^{a}F\\ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1/10 & 2/5\\ 0 & 1 & -3/10 & 1/5\end{array}\right)$$

La matriz inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/10 & 2/5\\ -3/10 & 1/5\end{pmatrix}$

Como se puede comprobar: $\begin{pmatrix}-1/10 & 2/5\\ -3/10 & 1/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/10 & 2/5\\ -3/10 & 1/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

10. Calcula, aplicando el método de Gauss, la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Solución:

Añadimos a la matriz A la matriz unidad I_3, así:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow 2^{a}F-1^{a}F\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow \begin{matrix}1^{o}F-3^{a}F\\ \\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}\\ \\ 2^{a}F+3^{a}F\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow -2^{a}F+3^{a}F\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

La inversa de A es: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

5.3. Aplicaciones de la matriz inversa

Las operaciones con matrices y en particular el cálculo de la matriz inversa permiten resolver situaciones problemáticas en las que aparecen matrices.

A continuación resolveremos algunas ecuaciones matriciales para lo cual se precisa calcular la matriz inversa. También hay que tener en cuenta:

- Algunas matrices no tienen inversa.
- El producto de matrices no es conmutativo, por lo que a la hora de multiplicar los dos miembros de una igualdad, se debe tener en cuenta que la multiplicación se hace bien por la izquierda o bien por la derecha en ambos miembros de la igualdad.

En el caso de ecuaciones matriciales que se reducen a la forma $A\cdot X = B$ o $X\cdot A = B$ y A tiene inversa, la incógnita X se calcula respectivamente multiplicando a la izquierda o derecha por A^{-1} los dos miembros de la igualdad.

En la ecuación $A\cdot X = B$ se multiplican a la izquierda los dos miembros por A^{-1}:

$$A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B;\quad (A^{-1}\cdot A)X = A^{-1}\cdot B;\quad I\cdot X = A^{-1}\cdot B;\quad X = A^{-1}\cdot B.$$

En la ecuación $A\cdot X = B$ se multiplican a la derecha los dos miembros por A^{-1}:

$$(X\cdot A)\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1};\quad X\cdot(A\cdot A^{-1}) = B\cdot A^{-1};\quad X\cdot I = B\cdot A^{-1};\quad X = B\cdot A^{-1}.$$

Ejemplo

11. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A\cdot X + B = C$; **b)** $X\cdot A - 2B = C$. Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Solución:

Se calcula la inversa de A por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow_{2^a F - 2x1^a F} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow_{2^a F \div (-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{1^a F - 4x2^a F} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

a) $A\cdot X + B = C$; $A\cdot X = C - B$; $A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}(C-B)$; $X = A^{-1}(C-B)$

Se sustituyen las variables por sus valores y se opera:

$$X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 44 & 40 \\ -13 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & -20 \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot A - 2B = C$; $X \cdot A = C + 2B$; $(X \cdot A)\,A^{-1} = (C + 2B)\,A^{-1}$; $X = (C + 2B)\,A^{-1}$.

Se sustituyen las variables por sus valores y se opera:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right] \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 38 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -19 & \dfrac{23}{2} \end{pmatrix}$$

Actividades

15. Calcular las matrices inversas de las matrices: **a)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

16. Hallar la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

17. Calcular la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

18. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hallar X tal que $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

20. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz de la forma $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ que verifique que $A \cdot X = X \cdot B$.

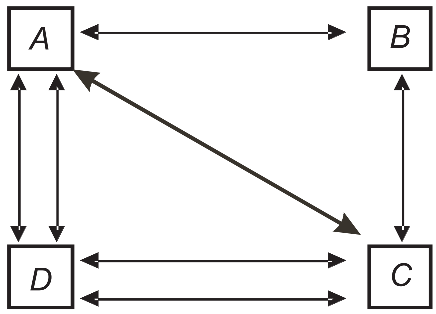
21. Halla la matriz X que satisface la ecuación $A \cdot X = B \cdot A$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. Las matrices en la resolución de problemas

Las matrices aparecen con frecuencia en las ciencias que trabajan con datos ordenados, caso de las Ciencias Sociales, Económicas y Físicas. A continuación presentamos algunas situaciones en las que las matrices pueden ser útiles.

6.1. Descripción de situaciones

Las **matrices de información** conforme venimos diciendo permiten resumir informaciones diversas; destacamos la distancia entre ciudades que vimos en la introducción; pueden también estar ligadas a gráficos como en el siguiente ejemplo.



Las ciudades *A, B, C* y *D* se comunican mediante líneas de autobuses de ida y vuelta como se indica en el gráfico.

Expresar este gráfico en forma de matriz.

Solución: A cada línea del gráfico se le asigna el valor uno y cero a la falta de comunicación entre ciudades, con lo que resulta la matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6.2. Operaciones con matrices. Aplicaciones

Cuando la información se encuentra dispuesta en forma matricial, los resultados de **operar con matrices** pueden dar lugar a nuevas informaciones solicitadas en algunos problemas como veremos a continuación.

Ejemplo

12. Un constructor opera en tres ciudades Madrid, Sevilla y Valencia y edifica pisos de dos tipos *A* y *B*. El número de pisos construidos de cada tipo y ciudad en los años 2007 y 2008 vienen expresados en las siguientes tablas o matrices:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Madrid} \\ \textit{Sevilla} \\ \textit{Valencia} \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Madrid} \\ \textit{Sevilla} \\ \textit{Valencia} \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide:

a) Calcular los pisos construidos durante los dos años de cada tipo y en cada ciudad.

b) Calcular los pisos que debe construir en 2009 para reducir la producción de 2008 a la mitad en cada ciudad.

c) Cada piso del tipo A lleva 5 puertas y 9 ventanas; los del tipo B tienen 3 puertas y 7 ventanas. ¿Cuántas ventanas y puertas se precisan en cada ciudad para cubrir las necesidades de las construcciones del año 2008?

Solución:

Sean P y Q las matrices asociadas las construcciones de los años 2007 y 2008 respectivamente.

a) La matriz $P + Q$ informa de los pisos construidos entre los dos años en cada una de las ciudades.

$$P+Q=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 8 & 11 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b) La matriz $\frac{1}{2}\cdot Q$ informa de los pisos a construir durante el año 2009.

$$\frac{1}{2}\cdot Q=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Dispongamos en forma matricial los números de puertas P y de ventanas V, que precisan los dos modelos de pisos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & V \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para ver las puertas y ventanas que se precisan en las construcciones realizadas en Madrid durante el año 2008, es necesario realizar las operaciones siguientes:

$$6\cdot 5 + 4\cdot 3 = 42 \text{ Puertas.}$$

$$6\cdot 9 + 4\cdot 7 = 82 \text{ Ventanas.}$$

Estos cálculos se pueden realizar para las dos ciudades restantes pero quedan resumidos mediante el producto de matrices:

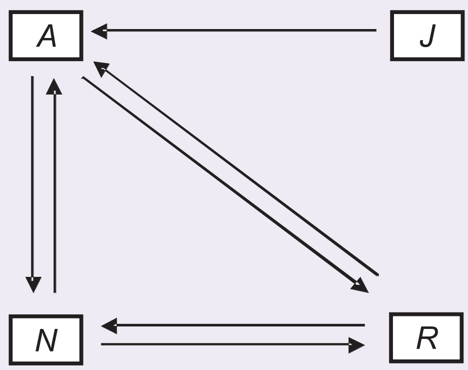
$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\cdot 5+4\cdot 3 & 6\cdot 9+4\cdot 7 \\ 4\cdot 5+4\cdot 3 & 4\cdot 9+4\cdot 7 \\ 2\cdot 5+2\cdot 3 & 2\cdot 9+2\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 42 & 82 \\ 32 & 74 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$$

6.3. Operaciones con matrices asociadas a un gráfico

Los resultados de algunas **operaciones entre matrices asociadas a gráficos** trasmiten nuevas informaciones, sobre las situaciones que el gráfico describe.

Ejemplos

13. Arabel,Julio, Nereida y Raúl se comunican a través de Internet como se indica en el siguiente gráfico:



A = Arabel; J = Julio; N = Nereida y R = Raúl.

Solución:

La matriz asociada al gráfico al asignar el número 1, a la flecha del que parte al que llega será la siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc} & A & J & N & R \\ \hline A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ J & 1 & 0 & 0 & 0 \\ N & 1 & 0 & 0 & 1 \\ R & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Se designa por G la matriz del gráfico.

Calculamos $G^2 = G \cdot G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El elemento a_{11}= 2 de la matriz G^2 indica que A se comunica con A de dos formas diferentes a través de otro; estas son $A-N-A$ y $A-R-A$.

El elemento a_{32} = 0 significa que N no puede comunicarse con J a través de otro.

El elemento a_{23} = 1 significa que J se puede comunicar con N a través de otro; $J-A-N$.

La matriz G^3 indica las formas de comunicarse cada persona con otra a través de otras dos.

$$G^3 = G \cdot G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento a_{13} = 3 informa de que Arabel y Nereida se pueden comunicar de tres formas a través de otros dos internautas: $A-R-A-N$; $A-N-R-N$ y $A-N-A-N$.

La matriz $G + G^2$ nos informa del número de formas que pueden comunicarse cada internauta con el resto directamente o a través de otro.

$$G + G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

14. A partir de la matriz de información $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ asociada a un gráfico de comunicaciones entre tres puestos de socorro, se pide:

a) Dibujar un grafico que se corresponda con la información que transmite la matriz

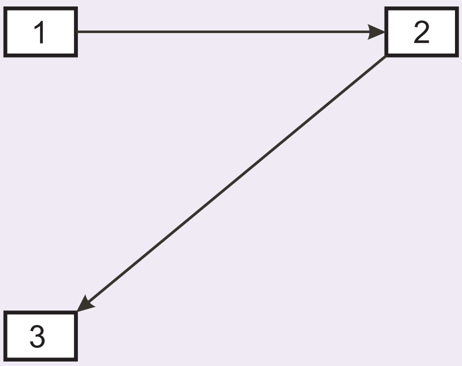
b) Calcula A^2 y $A + A^2$.

c) Comprueba que A^2 es la matriz de las comunicaciones que se pueden realizar entre dos puesto de socorro con la intervención de un tercero.

d) Comprueba que $A + A^2$ es la matriz que informa de las comunicaciones entres dos puestos directamente o a través de un tercero.

Solución:

a) Representación gráfica



Las flechas indican que el puesto 1 se comunica con el 2 y el puesto 2 se comunica con el 3.

b) Matrices que nos piden

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) El elemento $a_{13} = 1$ indica que el puesto 1 se puede comunicar con el 3 a través de otro puesto en este caso el 2.

d) Examinemos la información que nos dan algunos elementos de la matriz $A + A^2$.

a_{12} = 1, informa que el 1 se comunica directamente con el 2 .

a_{13} = 1, informa que el 1 se comunica con el 3 a través del 2.

a_{31} = 0, informa que puesto 3 no se comunica directamente con 1 ni a través de otro puesto.

Actividades

22. Un importador de CD los importa de dos calidades, normales (*N*) y extra (*E*). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios en euros.

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Normal *N*	0,4	0,8	1,2
Extra *E*	0,3	0,5	0,8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Normales *N*	Extras *E*
De 2 unidades	70000	5000
De 5 unidades	60000	4000
De 10 unidades	50000	50000

Se pide:

a) Resumir la información anterior en dos matrices *A* y *B*: *A* será una matriz 2 x 3 que recoja las ventas en un año y *B* una matriz 3 x 2 que recoja los precios.

b) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz *A* por *B* y dar su significado.

c) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz *B* por *A* y dar su significado.

d) Comparar la suma de los elementos de las dos diagonales.

23. En una acería se fabrican tres tipos de productos: acero en láminas, en rollos o aceros especiales. Estos productos requieren chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades que se indican en la tabla siguiente, por cada unidad de producto fabricado:

	Acero en láminas	Acero en rollos	Aceros especiales
Chatarra	8	6	6
Carbón	5	6	4
Aleaciones	2	1	3

a) Si durante el próximo mes se desean fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollos y 3 unidades de aceros especiales, obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias.

b) Si se dispone de 40 unidades de chatarra, 28 de carbón y 14 de aleaciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de acero se podrán fabricar con estos materiales?

24. Carmen trabaja como telefonista en una empresa de lunes a viernes entre las nueve de la mañana y las dos de la tarde. Además, cuida de un bebé de cuatro a siete de la tarde los lunes, miércoles y viernes y es mecanógrafa en un bufete de abogados los martes y jueves de cinco a nueve.

a) Escribir la matriz que expresa el número de horas que dedica a cada actividad a lo largo de los días de la semana.

b) Si le pagan 9 euros por hora como telefonista, 7 euros por cada hora que cuida al bebé y 12 euros por hora por su trabajo como mecanógrafa, expresar matricialmente los ingresos diarios de Carmen.

c) Si dejara de ir los lunes a cuidar al bebé y los jueves al bufete y le aumentaran su sueldo como telefonista un 5%, ¿cómo serán en este caso las dos matrices anteriores?

RECUERDA

✓ **Definición de matriz.**

Una matriz de orden m x n es una disposición en tabla rectangular de m x n números reales dispuestos en m filas y n columnas.

✓ **Igualdad de matrices.**

Dos matrices A y B son iguales si tienen la misma dimensión (o el mismo orden, si son cuadradas) y además son iguales todos los elementos que ocupan el mismo lugar.

✓ **Operaciones con matrices.**

- **Suma.** Dadas dos matrices A y B de dimensión m x n, la matriz suma (diferencia) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ se obtiene al sumar (restar) los elementos que ocupan el mismo lugar en una y otra matriz.
- **Producto de un número por una matriz.** El producto de un número por una matriz se obtiene al multiplicar por k cada elemento de $A = (a_{ij})$; es decir $kA = (ka_{ij})$
- **Producto de matrices.** Sean A una matriz de orden m x n, y B una matriz de orden n x p; las columnas de A coinciden con las filas de B, el producto de matrices A y B es otra matriz C de orden m x p con m filas (las del primar factor A) y p columnas (las del segundo factor B). El elemento c_{ij} de la matriz producto C es el resultado de multiplicar la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B consideradas ambas como matrices fila y columna respectivamente.

✓ **Matriz inversa.**

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama matriz inversa si existe a otra matriz B, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Cuando existe la matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por: A^{-1}; es decir, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

- Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman matrices regulares.
- Las matrices cuadradas que no tienen inversa se llaman matrices singulares.
- La matriz inversa se calcula a partir de la definición, para ello los elementos de la matriz inversa se consideran incógnitas.
- Por el método de Gauss se parte de la matriz (A I I_n) y mediante las trasformaciones se llega a la matriz (I_n I B); entonces la matriz $B = A^{-1}$ es la inversa de A.

✓ **Aplicaciones de la matriz inversa.**

Las operaciones con matrices y en particular el cálculo de la matriz inversa estudiadas en esta Unidad, permiten resolver situaciones problemáticas en las que aparecen matrices. En el caso de ecuaciones matriciales que se reducen a la forma $A \cdot X = B$ o $X \cdot A = B$ y A tiene inversa, la incógnita X se calcula respectivamente multiplicando a la izquierda o derecha por A^{-1} los dos miembros de la igualdad.

✓ **Las matrices en la resolución de problemas.**

Las matrices tienen aplicaciones en diversos campos de conocimientos, conforme hemos indicado en la Unidad.