9 Inferencia estadística. Distribuciones muestrales

En la Estadística se distinguen dos partes perfectamente diferenciadas. Una de ellas se conoce con el nombre de Estadística Descriptiva y tiene como objetivo la recogida, organización y análisis de datos; y obtener a partir de ellos unos valores llamados parámetros, que los identifican, y además permiten hacer comparaciones con otros conjuntos de datos y establecer relaciones entre ellos.

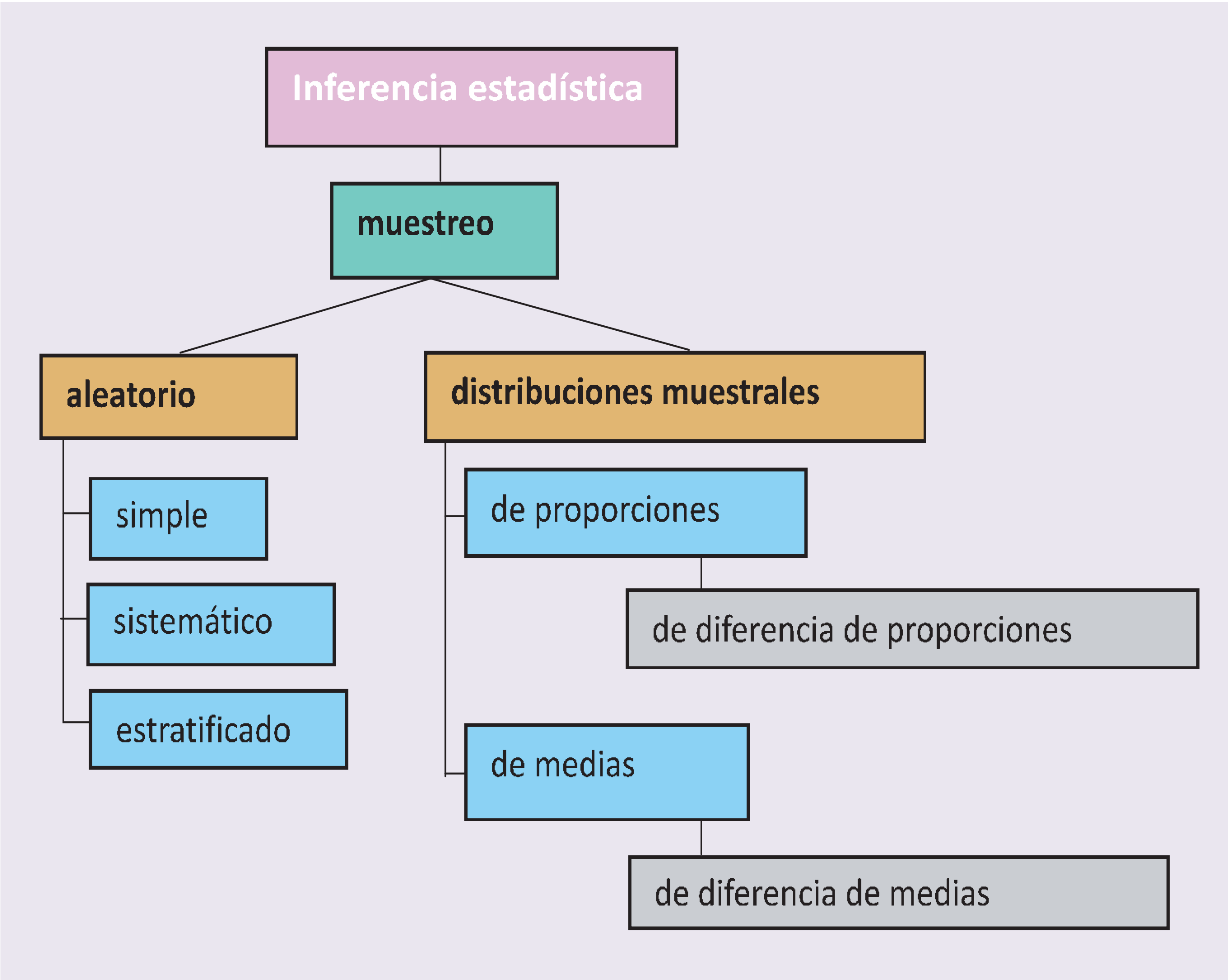
Pierre Simon Laplace (Wikipedia.org.Dominio público)

Otra parte de la Estadística llamada Estadística Inferencial trata de elaborar conclusiones de una población a partir de los datos recogidos de una parte de la misma llamada muestra. La representatividad de la muestra será de suma importancia para la fiabilidad de las conclusiones. Las muestras tomadas en una población tienen una media y una desviación típica que están relacionadas con la media y desviación típica de toda la población; y esta relación está basada en la distribución normal estudiada en el curso pasado. Se debe al matemático francés Pierre Simon Laplace (1749 -1827) el descubrimiento del importante papel que juega la distribución normal en la teoría de la probabilidad, y la primera demostración de un teorema fundamental en estadística: el teorema central del límite.

Las aplicaciones de la Estadística Inferencial abarcan campos muy diversos. En Medicina se emplean para investigar los resultados de tratamientos con nuevos fármacos. En Sociología se usan para hacer encuestas de opinión a los contribuyentes. En Industria, para mejorar la calidad de los productos con los métodos de control de calidad y conocer el grado de aceptación de los consumidores.

Esta unidad didáctica tiene como **objetivos** los siguientes:

1. Estudiar los conceptos básicos de la Estadística Inferencial.
2. Analizar los diferentes tipos de muestreos.
3. Establecer relaciones entre los parámetros de la población y los obtenidos de la muestra.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Variables aleatorias

Una variable cuyos valores se determinan sobre los resultados de un experimento aleatorio se llama una variable aleatoria. Por ejemplo, en un colegio de 300 alumnos, elegimos un alumno al azar (experimento aleatorio), anotamos su edad (variable aleatoria discreta), medimos su estatura (variable aleatoria continua), registramos el número de hermanos que tiene (variable aleatoria discreta) y su peso (variable aleatoria continua).

Los valores de una variable aleatoria discreta son números enteros positivos, los valores de una variable aleatoria continua son números reales comprendidos en un intervalo real. Las variables aleatorias se simbolizan por una letra mayúscula como X o Y o Z.

1.1. Variables aleatorias discretas. Distribución binomial

En las variables aleatorias discretas a cada valor x de la variable X se le asocia la probabilidad de que x ocurra, $P[X = x]$; esta asociación se llama ley de probabilidad. Una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es semejante a una distribución de frecuencias de una variable estadística, sólo que en vez de frecuencias relativas tenemos probabilidades.

El curso pasado estudiamos las variables aleatorias discretas que siguen la distribución binomial. Supongamos un experimento aleatorio que se pueda repetir indefinidamente y que en cada prueba sólo tenga dos resultados: éxito (E) y fallo (F). Experimentos de este tipo son: tirar una moneda, donde únicamente sale cara o cruz; tirar un dado y observar si sale 5 o no, etc.

Supondremos que p es la probabilidad de éxito en cada prueba y, por tanto, 1-p será la probabilidad de fallo en cada prueba. Si el experimento se repite n veces, al anotar los resultados, obtenemos una palabra de longitud n formada por las letras E y F

$$E\,E\,F\,F\,E\,F\,E\,E\,F\,E\,F\,F\,F\,E\ldots$$

¿Cuántas palabras de este tipo contienen x veces la letra E? Esto es equivalente a decir: si tenemos n cajas, ¿de cuántas maneras distintas podemos situar x letras E, una por caja? O, ¿ de cuántas maneras podemos elegir x cajas entre n dadas? Esta última pregunta tiene una respuesta conocida, y es el número $C_{n,x}$ o $\binom{n}{x}$.

Si ahora nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de obtener x éxitos en n pruebas? O, ¿cuál es la probabilidad del suceso

$$A = \overbrace{E\cap\ldots\cap E}^{x\ veces}\cap\overbrace{F\cap\ldots\cap F}^{n-x\ veces}\ldots?$$

Como las pruebas son independientes, la probabilidad no varía de una a otra prueba, entonces:

$$P(A) = \overbrace{P(E)\cdot\ldots\cdot P(E)}^{x\ veces}\cdot\overbrace{P(F)\cdot\ldots\cdot P(F)}^{n-x\ veces}$$

$$P(A) = \overbrace{p\cdot\ldots\cdot p}^{x\ veces}\cdot\overbrace{(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}^{n-x\ veces} = p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

Como hay $\binom{n}{x}$ palabras de longitud n con x letras E y cada palabra tiene una probabilidad de $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, definimos una función de probabilidad para la variable aleatoria X, que cuenta el número de éxitos en n pruebas, así:

$$P[X=x]=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

Esta función recibe el nombre de función de probabilidad de una **distribución binomial** de n pruebas con probabilidad de éxito p, simbólicamente $B(n,p)$.

Ejemplo

1. En una ciudad, el 40% del alumnado que promocionan a bachillerato tiene suspensa alguna asignatura de 4º de ESO. Se eligen 6 alumnos-as de 1º de Bachillerato al azar, ¿cuál es le probabilidad de que la mitad de seleccionados-as tenga alguna asignatura suspensa de ESO?

   Solución: Se trata de distribución binomial: 1º) en cada prueba hay dos únicos resultados: tener alguna suspensa o no, 2º) el resultado de cada prueba es independiente del anterior, 3º) la probabilidad de encontrar un-a alumno-a con algún suspenso es constante $p = 0{,}4$. Es, por tanto, una distribución binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0{,}4$, $B(6; 0{,}4)$.

   La mitad de 6 es 3, la probabilidad buscada es $P[X=3]=\binom{6}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^3=0{,}2765$.

Actividades

1. La probabilidad de que un jugador de baloncesto haga canasta en los tiros libres es 1/4. Si lanza 6 tiros libres, ¿cuál es la probabilidad de que haga al menos 3 canastas?
2. La probabilidad de que un misil alcance su objetivo es 0,8. Si se lanzan 4 misiles, ¿cuál es le probabilidad de que como máximo dos de ellos den en el blanco?
3. Cinco personas de 30 años suscriben una póliza de vida con una compañía de seguros. Según las previsiones de esa compañía, la probabilidad de que una persona sana de 30 años esté viva dentro de 35 años es 0,88. Calcula la probabilidad de que dentro de 35 años vivan:
   a) las 5 personas que han suscrito la póliza;
   b) sólo 3 de esas personas;
   c) al menos 2 de esas personas.

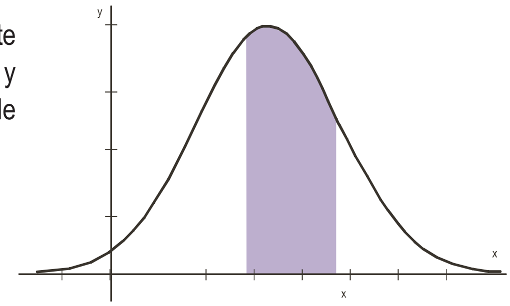
1.2. Variable aleatoria continua. La distribución normal

Las variables aleatorias continuas se caracterizan por que la probabilidad atribuida a cada valor x de la variable aleatoria X es cero. ¿Cómo se atribuyen entonces probabilidades? Pues, en vez de asignar probabilidades a cada valor determinado de X, se hace a intervalos de valores de la variable, así:

$$P[a\le X\le b]=\int_a^b f(x).$$

De este modo, calcular probabilidades equivale a calcular áreas como la de la región sombreada de la figura.

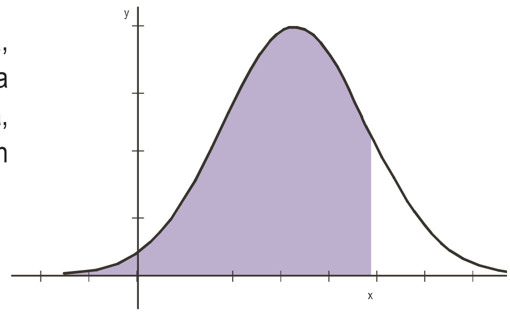
Una variable aleatoria continua, X, se dice que está normalmente distribuida o que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, y se simboliza por $N(\mu, \sigma)$, si la función $f(x)$ de la integral es:



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si X está normalmente distribuida, la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que x, $P[X \le x]$, es el área de la región sombreada en la figura, sabiendo que el área bajo toda la curva es 1.

El cálculo de esa área se hace mediante una integral definida, pero estas integrales están tabuladas para $N(0,1)$. Entonces para hallar $P[X \le x]$, con X, $N(\mu, \sigma)$, transformamos la variable X en otra, que simbolizamos por Z, que sea $N(0,1)$. En realidad, consiste en cambiar la variable X por Z, donde



$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Esta transformación se llama tipificación de la variable, y se cumple que

$$P[X \le x] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right]$$

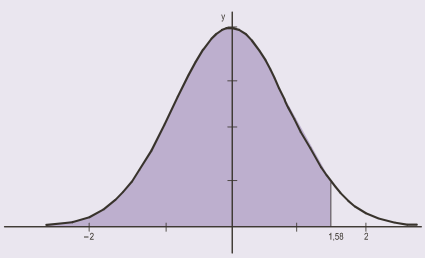
En los ejemplos recordamos algunos casos que se pueden presentar en el manejo de las tablas de la $N(0,1)$, que aparecen al final de la unidad.

Ejemplos

2. En una distribución normal $N(0,1)$, hallar: **a)** $P[Z \le 1{,}58]$; **b)** $P[Z \ge 0{,}46]$; **c)** $P[Z \le -1{,}79]$; **d)** $P[Z \ge -1{,}79]$; **e)** $P[-0{,}89 \le Z \le 1{,}98]$.

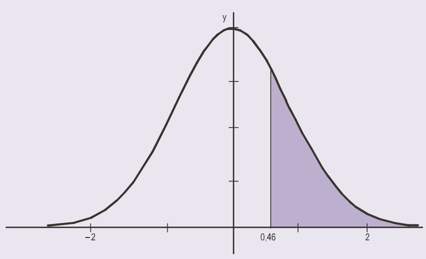
Solución:

a) $P[Z \le 1{,}58] = 0{,}9429$.



El número 0,9429 aparece en la tabla en la intersección de la fila que empieza por 1,5 y la columna que encabeza 0,08; y significa que el 94,29% de los valores de Z están comprendidos entre $-\infty$ y 1,58.

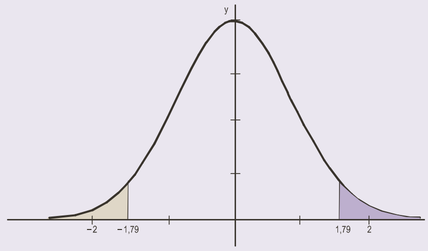
b) $P[Z \ge 0{,}46] = 1 - P[Z \le 0{,}46] = 1 - 0{,}6772 = 0{,}3228$.



En la gráfica vemos que la probabilidad buscada corresponde al área sombreada y es igual al área total, 1, menos el área de $P[Z \le 0{,}46]$.

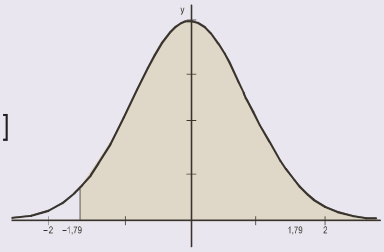
c) $P[Z \leq -1{,}79] = P[Z \geq 1{,}79] = 1 - P[Z \leq 1{,}79] = 1 - 0{,}9633 = 0{,}0367$.

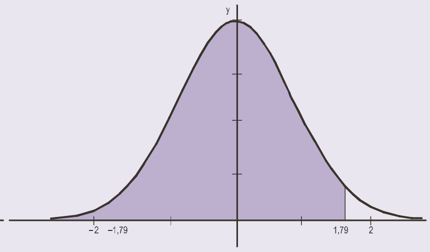
En la gráfica observamos que por simetría el área $P[Z \leq -1{,}79]$ es igual que $P[Z \geq 1{,}79]$.



d) $P[Z \geq -1{,}79] = P[Z \leq 1{,}79] = 0{,}9633$.

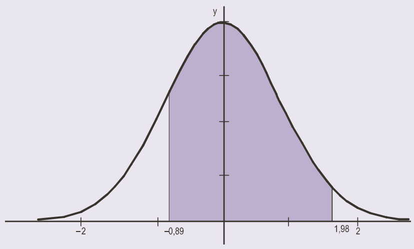
Por simetría el área de $P[Z \geq -1{,}79]$ es igual que $P[Z \leq 1{,}79]$.





e) $P[-0{,}89 \leq Z \leq 1{,}98] = P[Z \leq 1{,}98] - P[Z \leq -0{,}89] =$

$= P[Z \leq 1{,}98] - (1 - P[Z \leq 0{,}89]) = 0{,}9761 - (1 - 0{,}8133) = 0{,}7894$.

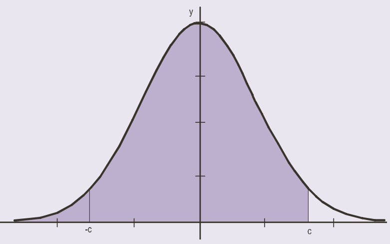


3. En una distribución $N(0,1)$ calcula el valor de c que cumple la igualdad $P[-c \leq Z \leq c] = P[|Z| \leq c] = 0{,}95$.

Solución: Según la figura el área sombreada a la derecha de c es

$\frac{1-0{,}95}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$.

Luego de la igualdad $P[Z \leq c] = 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$ obtenemos en las tablas que el valor de c que corresponde a 0,975 y es 1,9 en la columna 0,06, es decir, $c = 1{,}96$.



4. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(60,12)$, calcula $P[X < 65]$.

Solución:

$$P[X < 65] = P\left[\frac{X-60}{12} \leq \frac{65-60}{12}\right] = P\left[Z \leq \frac{5}{12}\right] = P[Z \leq 0{,}42] = 0{,}6628.$$

5. Sabiendo que X es una variable aleatoria que sigue una distribución N(10,3) halla el valor de x en $P[X < x] = 0{,}9761$.

Solución: Como $P[X < x] = 0{,}9761 = P\left[\frac{X-10}{3} < \frac{x-10}{3}\right] = P[Z < z]$;

de $P[Z < z] = 0{,}9761$, averiguamos el valor de z con ayuda de las tablas y resulta que a 0,9761 le corresponde 1,98, luego z = 1,98. Dado que $z = \frac{x-10}{3} = 1{,}98$ despejando x obtenemos $x = 3 \cdot 1{,}98 + 10 = 15{,}94$.

6. Las estaturas de 500 estudiantes de un colegio se distribuyen normalmente con media 148 cm y desviación típica 12 cm. Calcular cuántos estudiantes no alcanzan los 160 cm y cuántos hay cuya talla está comprendida entre los 140 y los 160 cm.

Solución: Las estaturas se distribuyen según una $N(148, 12)$.

En primer lugar, nos piden $P[X < 160]$ y $P[X < 160] = P\left[\frac{X-148}{12} < \frac{160-148}{12}\right] = P[Z < 1] = 0{,}8413$, es decir, el 84,13% de los estudiantes no llega a los 160 cm. Como el 84,13% de 500 es 0,8413 · 500 = 420,65, truncando la parte decimal, podemos decir que 420 estudiantes no llegan a los 160 cm de altura.

En segundo lugar, $P\left[140 \le X \le 160\right] = P\left[\frac{140-148}{12} \le \frac{X-148}{12} \le \frac{160-148}{12}\right] =$ = $P[-0,66 \le Z \le 1]$ =

= $P[Z \le 1]$ - (1 - $P[Z \le 0,66]$) = 0,8413 - (1 - 0,7454) = 0,5867.

Es decir, el 58,67% tiene una altura en el intervalo [140, 160] y como 0,5867·500 = 293,35 hay 293 estudiantes cuya talla está comprendida entre los 140 y los 160 cm.

7. El 45% de los habitantes de un municipio son contrarios a un proyecto de la alcaldía y el resto son partidarios. Se toma una muestra de 64 habitantes, ¿cuál es la probabilidad de que más de la mitad de los individuos de la muestra sean contrarios al proyecto del alcalde?

Solución: El número x de los habitantes contrarios al proyecto en muestras de 64 individuos se distribuye según una binomial B (64; 0,45); es decir, tenemos que calcular $P[X > 32]$. Este cálculo nos obliga a determinar 32 números combinatorios del tipo $\binom{64}{x}$, pero este monumental trabajo puede abreviarse recordando que una binomial, X, puede aproximarse por una normal, Y, cuando n es grande o $n \cdot p > 5$ y $n \cdot (1-p) > 5$. En este caso la binomial $B(n,p)$ puede aproximarse por la normal $N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})$. Luego la binomial $B(64; 0,45)$ es muy parecida a la normal $N(64 \cdot 0,45; \sqrt{64 \cdot 0,45 \cdot (1-0,45)}) = N(28,8; 3,98)$. Por tanto, recordando que al pasar de una distribución discreta a una continua añadimos y restamos un factor de corrección de 0,5, $P[a \le X \le b] = P[a - 0,5 \le Y \le b + 0,5]$, resulta $P[X > 32] \approx P[Y > 32 - 0,5] = P[Y > 31,5] = P[Z > \frac{31,5-28,8}{3,98} = P[Z > 0,68] = 1 - P[Z < 0,68] = 0,2483$.

Actividades

4. La duración en años de la placa base de los ordenadores de una determinada marca sigue una distribución normal de parámetros μ = 10 años y σ = 2 años. Calcular la probabilidad de que la placa base dure más de 12 años.

5. En una $N(0,1)$ calcular los valores de z correspondientes a:

a) $P[|Z| \le z] = 0,9$;

b) $P[|Z| \le z] = 0,99$.

6. El 20% de las personas que concurren a una oposición pueden conseguir un puesto de trabajo en la Administración. Las notas medias finales de los exámenes de la oposición se distribuyen según una $N(5,8; 2)$. ¿Cuál es la nota media mínima que se debe obtener para conseguir un puesto de trabajo?

7. Si la presión sanguínea sistólica de los individuos de una población A sigue una distribución normal $N(127, 24)$, calcula:

a) ¿Qué porcentaje de individuos de A supera el valor 179?

b) ¿Qué porcentaje de individuos de A está por debajo del valor 71,2?

8. La duración de cierto tipo de motor es una variable normal, con media de 10 años y desviación típica de dos años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un período de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que cumpla la garantía?

2. Muestreo

Cuando se quiere estudiar una característica de una población, en muchas ocasiones, resulta imposible analizar todos los individuos de la población. Hay muchas causas de esta imposibilidad: una población muy numerosa, que haría costoso e interminable el estudio, o muy dispersa; también es importante la naturaleza de los individuos porque el estudio puede suponer su destrucción. Por estas razones resulta indicado elegir un subconjunto de individuos de la población para hacer el estudio. A este subconjunto se llama **muestra** y denominamos tamaño de la muestra al número de individuos que la componen.

Para extender los resultados obtenidos de la muestra al total de la población, es necesario que ésta sea representativa. Ahora, la representatividad de la muestra depende del tipo de muestreo empleado. Vamos a describir algunos tipos de muestreo.

2.1. Tipos de muestreo

Mencionaremos los tipos de muestreo más habituales.

Muestreo aleatorio simple. Se realiza este tipo de muestreo cuando cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser escogido en la muestra.

Muestreo aleatorio sistemático. Consiste en ordenar numéricamente todos los individuos de la población y elegir, al azar, uno de ellos; y a partir de él escoger sistemáticamente de k en k los restantes individuos, hasta completar la muestra.

Muestreo aleatorio estratificado. Consiste en dividir previamente la población en grupos homogéneos o estratos, en los que los individuos comparten alguna característica común, y elegir muestras aleatorias simples en cada estrato.

Cuando hay k estratos cada uno con diferentes poblaciones: $N_1, N_2, \ldots, N_k$, entonces para conformar una muestra de tamaño n tomamos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ individuos en cada estrato de modo que

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

y además cada uno de los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ha de ser proporcional a los tamaños de los estratos: $N_1, N_2, \ldots, N_k$.

Aún hay otro tipo de muestreo; el *muestreo aleatorio por conglomerados*, consiste en dividir previamente la población en subconjuntos o conglomerados. Se eligen a continuación al azar algunos de estos conglomerados. La muestra se conforma eligiendo muestras aleatorias simples en los conglomerados escogidos.

Ejemplo

8. En un colegio hay 1500 estudiantes: 600 en Primaria, 500 en la ESO y 400 en Bachillerato. Se quiere extraer una muestra de 50 estudiantes para realizar un estudio, ¿cómo se seleccionará dicha muestra?

Solución: Hay tres estratos con poblaciones diferentes entre todos los estudiantes del colegio: N_1 = Primaria, N_2 = ESO y N_3 = Bachillerato,

$$N_1 + N_2 + N_3 = 600 + 500 + 400 = 1500$$

Extraemos tres muestras n_1, n_2 y n_3, una en cada estrato, de manera que $n_1 + n_2 + n_3 = 50$,

y además n_1, n_2, y n_3 sean proporcionales a 600, 500, y 400 respectivamente. Es decir,

$$\frac{n_1}{600} = \frac{50}{1500} \Rightarrow n_1 = 50 \cdot \frac{600}{1500} = 20 \; ; \; \frac{n_2}{500} = \frac{50}{1500} \Rightarrow n_2 = 50 \cdot \frac{500}{1500} = 16,\widehat{6} \text{ , redondeando, 17 ;}$$

$$\frac{n_3}{400} = \frac{50}{1500} \Rightarrow n_3 = 50 \cdot \frac{400}{1500} = 13,\widehat{3} \text{ , redondeando, 13.}$$

La muestra estaría formada por 20 de primaria, 17 de ESO y 13 de Bachillerato.

Actividades

9. Una sociedad recreativa quiere extraer una muestra de 100 individuos entre sus socios para programar futuras actividades. Se sabe que los socios se reparten en tres estratos: 800 niños y jóvenes, 3500 adultos en edad laboral y 1800 jubilados. ¿Cómo se seleccionará dicha muestra?

2.2. Parámetros y estadísticos

Llamamos **estimación** al procedimiento por el cual los resultados de la muestra permiten deducir resultados relativos al total de la población.

El valor desconocido de una población, que estimamos a partir de una muestra, se llama **parámetro poblacional**. Los parámetros que se suelen estimar son la media, la proporción o porcentaje, la desviación típica, la varianza, etc. Por ejemplo, el salario medio de los madrileños es un parámetro de toda la población de Madrid, mientras que el salario medio de una muestra de los madrileños, que es un parámetro de la muestra, se llama un **estadístico**.

Los símbolos de los parámetros de la población son: la media, μ (se lee mu), la desviación típica, σ (se lee sigma), la proporción o porcentaje, p, mientras que para los parámetros de la muestra o estadísticos se utilizan los símbolos: $\overline{x}$, media muestral, y $\hat{p}$ para la proporción o porcentaje.

Cuando tomamos los parámetros de la población por los estadísticos correspondientes a las muestras estamos haciendo una estimación por punto del parámetro de la población; en estas estimaciones el margen de error puede ser grande y por tanto el grado de fiabilidad, pequeño. En la unidad didáctica próxima veremos que resulta más fiable establecer un intervalo en el que se encuentre el parámetro poblacional buscado. Este tipo de estimación se llama **estimación por intervalos**.

3. Distribución de las medias muestrales

Estamos interesados, por ejemplo, en conocer la media de los gastos mensuales en alimentación de los hogares de un barrio de Madrid. Tenemos, pues, una población: los hogares de un barrio particular, y una variable aleatoria, *X*, que asigna a cada hogar la cantidad de dinero dedicada mensualmente a la alimentación. Queremos hallar μ, valor medio de esta variable aleatoria.

Podemos hacer una estimación de μ a partir de la media obtenida de una muestra aleatoria de la población, $\overline{x}$. Es evidente que este valor $\overline{x}$ puede variar si tomamos otra muestra. Algo nos dice que la media $\overline{x}$, de una muestra determinada, no corresponde exactamente con la media μ de la población.

¿Existe alguna relación entre la media de las muestras $\overline{x}$ y la media de la población μ? Sí existe.

Si tomamos una muestra de tamaño *n* de la población y calculamos la media muestral, $\overline{x}_1$, a continuación elegimos otra muestra de tamaño *n* y calculamos su media obtenemos otro número, $\overline{x}_2$; procediendo de la misma manera hasta elegir *k* muestras diferentes obtenemos una serie de *k* medias muestrales

$$\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3,\ .....,\ \overline{x}_k$$

Considerando los valores de las medias muestrales como una variable aleatoria que simbolizaremos por $\overline{X}$, vamos a estudiar esta variable y su relación con la variable *X* de los gastos mensuales en alimentación de nuestra población.

A esta nueva variable aleatoria $\overline{X}$ se llama variable de las medias muestrales y a la distribución de los valores de $\overline{X}$ sobre el conjunto de las muestras de tamaño *n* se llama **distribución de las medias muestrales**. Esta variable $\overline{X}$ tiene una media $\mu_{\overline{X}}$ y una desviación típica que simbolizamos por $\sigma_{\overline{X}}$. ¿Qué relación existe entre $\mu_{\overline{X}}$ y $\sigma_{\overline{X}}$ con μ y σ, media y desviación típica de toda la población?

Se pueden demostrar las afirmaciones que siguen.

1ª) Si la variable *X* sigue una distribución normal, $N(\mu,\sigma)$, entonces la variable aleatoria de la medias muestrales, $\overline{X}$, sigue también una distribución normal $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Es decir, tiene la misma media que X, $\mu_{\overline{X}} = \mu$, y su desviación típica es menor, $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

2ª) Si la variable *X* sigue una distribución desconocida o no es normal, y el tamaño de la muestra $n \geq 30$, entonces $\overline{X}$ sigue también una distribución normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

En la demostración de la segunda afirmación se emplea el llamado Teorema Central del Límite, uno de los resultados más importantes en estadística. Este teorema, cuyo contenido escapa de este Curso, pone de relieve la importancia de la distribución normal, que aparece asociada a cualquier distribución, tanto si es normal como si no lo es, dado que la distribución de las medias muestrales se aproxima siempre a una distribución normal.

Las dos afirmaciones anteriores se pueden resumir de la forma siguiente:

$$\begin{cases} Si\ \ X\ \ es\ \ N(\mu,\sigma) \Rightarrow \overline{X}\ \ es\ \ N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}). \\ Si\ \ X\ \ no\ \ es\ \ normal\ \ o\ \ es\ \ desconocida \Rightarrow \overline{X}\ \ es\ \ N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}),\ cuando\ \ n \geq 30. \end{cases}$$

¿Qué ocurre cuando $n < 30$? Bueno, cuando las muestras son pequeñas, las cosas se complican un poco más, no mucho, pero no es un objetivo de este curso.

Ejemplos

9. En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable aleatoria normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan un día concreto. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?

b) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, al tomar muestras aleatorias de 64 clientes? Especificar sus parámetros.

Solución: **a)** Las muestras de cualquier tamaño n, mayor o menor que 30, de una población $N(\mu,\sigma)$ se distribuyen según la normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. En este caso, n = 25 y X es una normal $N(10,2)$; por lo que la distribución de $\overline{X}$ de las medias muestrales es una normal $N(10, 2/\sqrt{25})$ o $N(10, 2/5)$. En consecuencia, tenemos que calcular:

$$P\left[\overline{X}<9\right]=P\left[\frac{\overline{X}-10}{2/5}<\frac{9-10}{2/5}\right]=P\left[Z<-2{,}5\right]=1-P\left[Z<2{,}5\right]=1-0{,}9938=0{,}0062.$$

b) Si n = 64 la variable aleatoria de las medias muestrales se distribuye según la normal $N(10;\ 2/\sqrt{64}\,)$ o $N(10;\ 0{,}25)$, es decir, con μ = 10 y σ = 0,25.

10. Se admite que el perímetro craneal de una cierta especie animal sigue una distribución normal con σ = 12,8 cm. Se toma una muestra de 10 individuos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{x}$, difiera de μ, media poblacional, 4,5 cm?

Solución:

Como X se distribuye según una normal N(μ; 12,8), $\overline{X}$ se distribuye según la normal $N(\mu; 12{,}8/\sqrt{10}\,)$, independientemente del tamaño de la muestra. Tenemos que calcular $P[|\overline{X} - \mu|] \geq 4{,}5$. Dividiendo por $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{12{,}8}{\sqrt{10}}$ tipificamos la variable y tenemos

$$P\left[\frac{|X-\mu|}{12{,}8/\sqrt{10}}>\frac{4{,}5}{12{,}8/\sqrt{10}}\right]=P\left[|Z|>\frac{4{,}5}{12{,}8/\sqrt{10}}\right]=P\left[|Z|>1{,}11\right]=2\cdot P[Z<-1{,}11]=2[1-0{,}8865]\ =\ 2\cdot 0.1335=0{,}267.$$

11. Se ha registrado el peso de los recién nacidos de una maternidad durante un año y se ha observado que se distribuyen con media μ = 3250 g y desviación típica σ = 250 g. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de 100 recién nacidos sea superior a 3300 g?

Solución:

Desconocemos la naturaleza de la distribución de la variable X, que nos da los pesos de los recién nacidos, pero como el tamaño de la muestra es n = 100, mayor que 30, entonces la variable $\overline{X}$ sigue una distribución normal $N(3250, \frac{250}{\sqrt{100}})$ = $N(3250, 25)$. Tenemos que calcular

$$P\left[\overline{X}>3300\right]=P\left[\frac{\overline{X}-3250}{25}>\frac{3300-3250}{25}\right]=P\left[Z>2\right]=0{,}0228.$$

12. En un examen tipo test de 100 preguntas, calificado a punto por pregunta correcta, las calificaciones se distribuyen con media μ = 65 puntos y desviación típica σ = 14 puntos. Calcula la probabilidad de que una muestra de 50 exámenes elegidos al azar tenga nota media superior a 70 puntos.

Solución:

Desconocemos la naturaleza de la distribución de la variable X, que nos da las calificaciones de los exámenes, pero como el tamaño de la muestra es n = 50, mayor que 30, entonces la variable sigue una distribución normal $N(65;\ 14/\sqrt{50}) = N(65;\ 1{,}97)$.

Tenemos que calcular

$$P\left[\overline{X} > 70\right] = P\left[\frac{\overline{X}-65}{1{,}97} > \frac{70-65}{1{,}97}\right] = P\left[Z > 2{,}53\right] = 1 - P\left[Z < 2{,}53\right] = 0{,}0057.$$

Actividades

10. Se supone que la vida de las bombillas de un determinado tipo sigue una distribución normal de media 1000 horas y desviación típica 60 horas. Se toma una muestra al azar de 225 bombillas y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea menor que 996 horas?

11. Las calificaciones del alumnado de una prueba de acceso a la universidad se distribuyen con media μ = 5,6 y desviación típica σ = 2,8. Si se elige una muestra de 40 individuos presentados a la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea menor que 5?

12. Calcula la probabilidad de que al extraer una muestra de tamaño 60 de una población que se distribuye normalmente según N(12, 5) la media de la muestra esté comprendida entre 10 y 14.

13. El coeficiente intelectual de los alumnos de una determinada universidad sigue una normal N(95, 28). **a)** Calcula la probabilidad de que una muestra de 64 alumnos tenga un coeficiente intelectual medio inferior a 92. **b)** Calcula la probabilidad de que la misma muestra tenga un coeficiente intelectual superior a 100.

DISTRIBUCIÓN DE LA DIFERENCIA DE MEDIAS

Supongamos que queremos estudiar una característica en dos poblaciones diferentes, digamos la altura del alumnado en dos colegios. En el primer colegio, la variable aleatoria X_1, asigna un valor a la altura de cada alumno-na, tiene media μ_1 y desviación típica σ_1. En el segundo colegio, la variable aleatoria X_2, que nos da la estatura del alumnado, tiene media μ_2 y desviación típica σ_2, no necesariamente iguales a la anterior.

Sabemos que la variable $\overline{X}_1$ de las medias muestrales de X_1, de tamaño n_1, si n_1 es suficiente grande o X_1 es normal, sigue una distribución normal de media μ_1 y desviación típica $\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$. Es decir, $\overline{X}_1$ es una $N(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$. Del mismo modo, la variable de la medias muestrales $\overline{X}_2$, de tamaño n_2, de la variable X_2, si n_2 es grande o X_2 es normal, es una $N(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$.

Imaginemos que tomamos una muestra del primer colegio y otra en el segundo colegio y calculamos la diferencia de las dos medias muestrales. Si repetimos la operación varias veces, obtenemos una serie de números que corresponden a los valores de una nueva variable aleatoria que simbolizamos por $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

¿Cómo se distribuye $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$? Pues ocurre que $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ se distribuye como una normal de media $\mu_1 - \mu_2$ y desviación típica $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$; en una palabra, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ es una $N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$. Esto es lo que se conoce como la **distribución de la diferencia de dos medias muestrales**.

En la Unidad 10 emplearemos la variable $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ y su distribución para comparar medias de dos poblaciones independientes.

Ejemplo

13. Se sabe que el peso de todos los niños de 5º curso en un colegio de primaria sigue una distribución normal de media μ_1 = 45 kg. y σ_1= 7,5 kg., mientras que el peso de las niñas, del mismo nivel educativo, se distribuye también normalmente con media μ_2= 40 kg. y σ_2 = 6,9 kg. Si la variable $\overline{X}_1$ nos da las medias muestrales del peso de las muestras de 20 niños y $\overline{X}_2$ las medias muestrales de muestras de 18 niñas, hallar la probabilidad de que el peso medio de una muestra de niños supere en 5 kg. o más al peso medio de una muestra de las niñas.

Solución:

Sabemos que μ_1 = 45 kg. y σ_1= 7,5 kg., y que μ_2= 40 kg. y σ_2 = 6,9 kg. Además, n_1= 20 y n_2 = 18 y queremos calcular la probabilidad siguiente:

$$P[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 5]$$

Sabemos que $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ es una $N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$. En este caso es una $N(5;\ 2,3)$. Por tanto:

$$P[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 5] = P\left[\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 5}{2,3} > \frac{5-5}{2,3}\right] = P[Z \geq 0] = 1 - P[Z < 0] = 0,5, \text{ es decir, el } 50\%.$$

Actividades

14. Las lámparas de bajo consumo de la marca A tienen una vida media de 12000 horas y una desviación típica de 450 horas, mientras que las lámparas del mismo tipo de la marca B tienen una vida media de 11200 horas con una desviación de 650 horas. Hallar la probabilidad de que una muestra de 36 lámparas de la marca A tenga una vida media superior en más de 500 horas a la vida media de una muestra de 40 lámparas de la marca B.

4. Distribución de proporciones muestrales

Si al hacer el estudio de una característica de una población nos encontramos que la variable únicamente puede tomar dos valores: éxito o fracaso, la población que tratamos de estudiar sigue una distribución binomial, pero cuando el número de pruebas es grande esta binomial se puede aproximar por una normal.

Consideremos entonces una población numerosa de N individuos; por ejemplo, todos los profesores de matemáticas de la Comunidad de Madrid y una característica: *ser seguidor del Atlético de Madrid* ; e interroguemos a cada profesor si es ,o no, seguidor del Atlético. Sea n_A el número de respuestas afirmativas, entonces el cociente

$$p = \frac{n_A}{N}$$

nos da la **proporción poblacional** o porcentaje poblacional de seguidores del Atlético entre los profesores de matemáticas madrileños.

Imaginemos que de la mencionada población tomamos una muestra de tamaño n, llamémosle M_1, y calculemos la proporción de atléticos: $p_1 = \frac{n_1}{n}$. Si a continuación obtenemos todas las muestras posibles, de tamaño n, M_2, M_3, M_4,…, entonces veremos que las proporciones de atléticos $p_2 = \frac{n_2}{n}$, $p_3 = \frac{n_3}{n}$, $p_4 = \frac{n_4}{n}$, ... variarán de una muestra a otra.

Todas estas proporciones p_1, p_2, p_3, …son valores de una nueva variable aleatoria que llamaremos **proporción muestral** y simbolizaremos por $\hat{p}$. Esta variable a su vez tendrá una media $\mu_{\hat{p}}$ y una desviación típica $\sigma_{\hat{p}}$. ¿Qué relación tienen la media y la desviación típica de la proporción muestral con la proporción poblacional p?

Bueno, pues se puede demostrar la siguiente afirmación para la **distribución de las proporciones muestrales**:

Si una población numerosa tiene una proporción poblacional p de una determinada característica, entonces la variable aleatoria $\hat{p}$, de las proporciones muestrales extraídas de esa población, cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande $n \geq 30$, se aproxima a una distribución normal de media $\mu_{\hat{p}} = p$ y desviación típica $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$; es decir, $\hat{p}$ se distribuye casi según una $N\left(p,\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Ejemplos

14. En una empresa fuma el 40% de sus trabajadores. Si elegimos una muestra de 30 personas, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de fumadores en la muestra sea mayor que el 50%?

Solución:

La muestra es de tamaño n = 30 y la proporción poblacional de fumadores es p = 0,4, luego $\hat{p}$ es una normal $N\left(0{,}4;\ \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{30}}\right) = N(0{,}4;\ 0{,}089)$.

Tenemos que calcular:

$$P\left[\hat{p} > 0,5\right] = P\left[\frac{\hat{p} - 0,4}{0,089} > \frac{0,5 - 0,4}{0,089}\right] = P\left[Z > \frac{0,5 - 0,4}{0,089}\right] = P\left[Z > 1,12\right] = 1 - P[Z < 1,12] = 0,1314.$$

15. En unas elecciones municipales la lista del alcalde salió con el 35% de los votos. Si antes de las elecciones se hubiese hecho un sondeo con una muestra de 400 vecinos, ¿cuál hubiera sido, de mantenerse la misma intención de voto, la probabilidad de obtener menos del 30% de los votos para la citada lista?

Solución:

Tamaño de la muestra n = 400 y p = 0,35, luego $\hat{p}$ sigue una distribución normal

$$N\left(0,35;\ \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{400}}\right) = N(0,35;\ 0,023).$$

Tenemos que calcular:

$$P\left[\hat{p} < 0,3\right] = P\left[\frac{\hat{p} - 0,35}{0,023} < \frac{0,3 - 0,35}{0,023}\right] = P\left[Z < \frac{-0,05}{0,023}\right] = P\left[Z < -2,17\right] = 1 - P[Z < 2,17] = 1 - 0,985 = 0,015.$$

Sólo en el 1,5% de las muestras se obtendría menos del 30% de los votos.

Actividades

15. En una determinada población el 20% de sus habitantes usa gafas graduadas. Tomamos una muestra de 256 personas, ¿cuál es la probabilidad de que el porcentaje de personas de la muestra que usan gafas graduadas esté entre el 15% y el 25%?

16. Una vacuna contra cierta enfermedad inmuniza al 95% de las personas que se la ponen. Si elegimos una muestra de 64 personas, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de gente inmunizada al ponerse la vacuna sea menor que el 92%?

17. Se sabe que el 30% de los estudiantes de una universidad no hace nunca botellón. Se toma una muestra de 200 estudiantes de esa universidad y se pide calcular la probabilidad de que más de las tres cuartas partes de los estudiantes de la muestra haga alguna vez botellón.

Distribución de la diferencia de proporciones

Supongamos que en un colegio el porcentaje de alumnado con miopía es p_1 y en otro colegio es p_2. Simbolizamos por $\hat{p}_1$ la variable aleatoria de las proporciones muestrales en el primer colegio y $\hat{p}_2$ la variable aleatoria de las proporciones muestrales en el segundo. Sabemos que si el tamaño de las muestras, digamos n_1 y n_2, son grandes entonces $\hat{p}_1$ es una $N(p_1, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}})$ y $\hat{p}_2$ es una $N(p_2, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$.

Imaginemos que tomamos una muestra en el primer colegio y otra en el segundo colegio y calculamos la diferencia entre las proporciones muestrales. Repitiendo la operación una serie de veces, obtenemos un conjunto de números que corresponden a los valores de una nueva variable que simbolizamos por $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$. Y, como en el apartado 3.1, nos preguntamos cómo se distribuye esta nueva variable. Pues bien, sucede que $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, **distribución de la diferencia de dos proporciones muestrales**, se distribuye como una normal de media $p_1 - p_2$ y desviación típica $\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}} + \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$; es decir, $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ es una $N(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}} + \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$.

En la próxima unidad didáctica haremos uso de la variable $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ para comparar la proporción de individuos con una determinada característica en dos poblaciones independientes.

Ejemplos

16. En cierta universidad el porcentaje de mujeres matriculadas que superan las pruebas de acceso es el 85%, mientras que el de hombres es el 81%. Si tomamos una muestra de 40 mujeres y otra de 35 hombres entre los matriculados en las pruebas de acceso, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de mujeres aprobadas supere como mínimo en un 5% al de hombres aprobados?

Solución:

Sabemos que p_1 = 85% = 0,85 y p_2 = 81% = 0,81; además, n_1= 40 y n_2 = 35 y queremos calcular la probabilidad siguiente:

$$P[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \geq 0,05]$$

Sabemos que $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ es una $N(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}} + \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$. En este caso es una N(0,04; 0,123). Por tanto

$$P[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0,05] = P\left[\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0,04}{0,123} > \frac{0,05-0,04}{0,123}\right] = P\left[Z > \frac{0,01}{0,123}\right] = P[Z > 0,81] =$$

$$= P[Z \leq 0,81] = 1 - P[Z < 0,81] = 0,209.$$

Actividades

18. Una máquina produce 12 artículos cada hora de los que 3 salen con algún defecto. En la misma fábrica disponen de otra máquina que produce los mismos artículos, pero a un ritmo de 10 cada hora y de los que sólo 2 presentan algún defecto. Se toman muestras de 40 artículos de cada máquina y se pide:

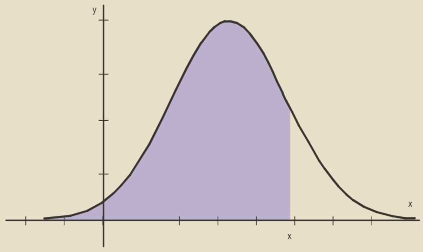
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la primer máquina exceda en más del 10% a los defectuosos fabricados por la segunda?

b) ¿Cuál la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la segunda exceda en más del 5% a los de la primera?

RECUERDA

- **Distribución binomial** de n pruebas con probabilidad de éxito p, simbólicamente se expresa así:

$$B(n,\ p),\quad P[X=x]=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}.$$



- **Distribución normal** de media μ y desviación típica σ, $N(¼, \sigma)$, es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que x, $P[X\leq x]$, y corresponde al área de la región sombreada en la figura. El cálculo de esa área se hace mediante una integral definida y todas estas áreas están tabuladas para $N(0,1)$. Hallamos $P[X\leq x]$ cambiando la variable X por Z, que es N(0,1), y donde $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ y, por tanto: $P[X\leq x]=P\left[\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leq\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right]=P\left[Z\leq\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right]$.

- **La variable aleatoria** $\overline{X}$ **de las medias muestrales** de una variable X sigue una distribución normal $N(\mu,\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, tanto si X es normal como si no lo es, aunque en este último caso es preciso que el tamaño de la muestra sea mayor o igual que 30.

- **La variable aleatoria** $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ **de la diferencia de las medias muestrales** se distribuye como una normal de media $\mu_1-\mu_2$ y desviación típica $\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$; es decir, es una $N(\mu_1-\mu_2,\ \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}})$.

- **La variable aleatoria** $\hat{p}$ **de las proporciones muestrales** extraídas de una población, cuando el tamaño de la muestra es $n\geq 30$, se distribuye casi según una $N(p,\ \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}})$.

- **La variable aleatoria de la diferencia de proporciones** $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ es una $N(p_1-p_2,\ \sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}}+\sqrt{\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$.

Tabla de la distribución normal, N(0,1)

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000