8 Probabilidad

El origen del estudio de la probabilidad se encuentra en los juegos de azar. Los primeros problemas fueron planteados por jugadores. El gran duque de Toscana mostró en el siglo XVI su sorpresa al advertir que al tirar tres dados se obtenía con más frecuencia 10 que 9 puntos, cuando ambas cifras – 10 y 9 – se descomponían, según él, de 6 maneras diferentes. El problema del gran duque fue resuelto por Galileo.

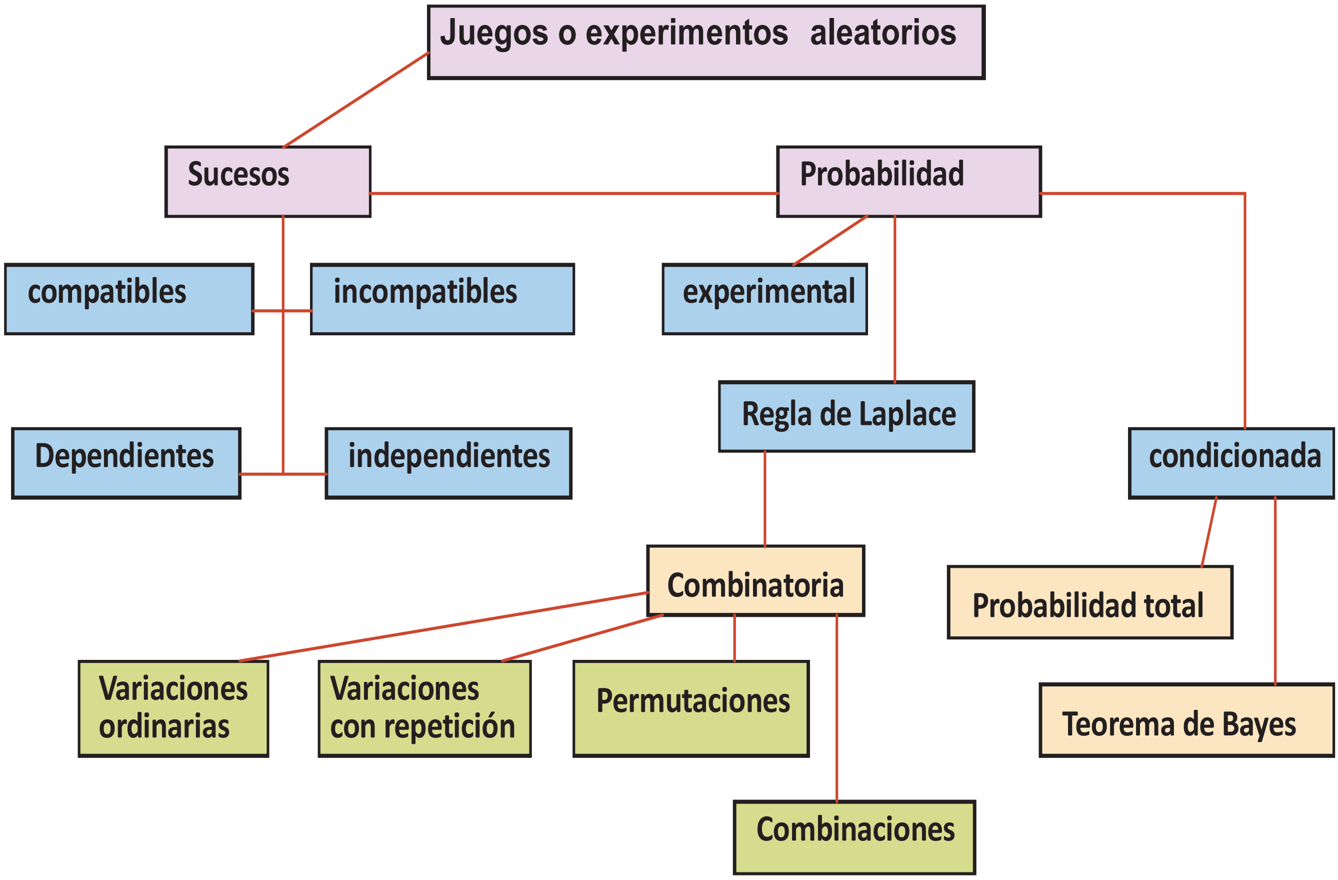
Otro problema famoso planteado a mediados de siglo XVII por el caballero de Meré, un cortesano francés, a Blaise Pascal dio lugar a una relación epistolar entre el jurista y matemático Pierre de Fermat y el propio Pascal en la que se fijaron los fundamentos del cálculo de probabilidades.

El estudio de probabilidad alcanzó un gran desarrollo, durante el siglo XIX, de la mano de los físicos Maxwell, Gibbs y Boltzmann. Creadores de lo que se conoce como Mecánica Estadística, en la que asignan probabilidades a los estados de las moléculas de un gas contenido en un recipiente. Estos estudios condujeron a James Clerk Maxwell (1831 – 1879) a afirmar que la verdadera lógica del mundo está en el cálculo de probabilidades. Sin ánimo de ir tan lejos, en esta Unidad didáctica sólo nos ceñiremos al estudio de la probabilidad en juegos o experimentos aleatorios sencillos. También introduciremos el concepto de probabilidad condicionada y sucesos independientes, útiles importantes para la resolución de muchos problemas de probabilidad. La Unidad termina con el estudio de la probabilidad total y el teorema de Bayes, éste último es un intento de cuantificar en qué grado varias causas contribuyen a la aparición de un efecto. Hemos dejado, a modo de apéndice, dos apartados al final para resolver algunos de los problemas de probabilidad con ayuda de la combinatoria.

• Juego de mesa *(ISFTIC. Banco de imágenes)*

En esta Unidad nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Recordar en qué consiste un experimento aleatorio.
2. Conocer qué es un suceso y las operaciones con sucesos.
3. Aprender a aplicar la regla de Laplace.
4. Identificar sucesos independientes y calcular probabilidades condicionadas.
5. Calcular probabilidades totales y la de que un efecto tenga determinada causa.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. ESPACIO MUESTRAL, SUCESOS Y OPERACIONES CON SUCESOS. PROPIEDADES . . . 150
2. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD DE UN SUCESO . . . 153
2.1. Propiedades de la probabilidad de un suceso . . . 153
2.2. Asignación de probabilidades por la frecuencia relativa . . . 155
2.3. Asignación de probabilidades en experimentos aleatorios con resultados equiprobables. Regla de Laplace . . . 156
3. DIAGRAMAS EN ÁRBOL Y LA RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS SENCILLOS DE PROBABILIDAD . . . 158
3.1. Principio de multiplicación y diagramas en árbol . . . 158
3.2. Diagramas en árbol y problemas de probabilidad . . . 159
4. PROBABILIDAD CONDICIONADA . . . 161
5. SUCESOS INDEPENDIENTES . . . 163
Sucesos independientes en pruebas independientes . . . 163
6. PROBABILIDAD CONDICIONADA Y PROBABILIDAD TOTAL . . . 166
6.1. Probabilidad condicionada y diagramas en árbol . . . 166
6.2. Probabilidad total . . . 168
7. TEOREMA DE BAYES . . . 170
8. COMBINATORIA . . . 173
8.1. Factoriales . . . 173
8.2. Variaciones con repetición . . . 173
8.3. Variaciones ordinarias . . . 174
8.4. Permutaciones ordinarias . . . 176
8.5. Combinaciones . . . 176
9. PROBABILIDAD Y COMBINATORIA . . . 179
9.1. Elecciones simultáneas al azar . . . 179
9.2. Elecciones sucesivas al azar . . . 180

1. Espacio muestral, sucesos y operaciones con sucesos. Propiedades

Sabemos, lo hemos visto el curso pasado, que un experimento aleatorio se caracteriza por la imposibilidad de prever el resultado a pesar de que se realice siempre en las mismas condiciones. Recordamos, en el cuadro siguiente, la terminología básica en torno al experimento aleatorio de tirar un dado una única vez (una única prueba).

Concepto	Significado	Ejemplo
Espacio muestral	Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.	$E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Suceso	Cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.	A = {*sacar número par*} = {2,4,6}
Suceso elemental	Suceso constituido por un único resultado.	C = {*sacar el número* 3} = {3}
Suceso seguro	Suceso constituido por todos los resultados de la prueba.	E = {*sacar número menor que* 7} = {1,2,3,4,5,6}
Suceso imposible	Suceso que no se realiza nunca; es el suceso que no contiene resultado alguno.	D = {*sacar un número mayor que* 7} = Φ *El suceso imposible se simboliza por* Φ
Intersección de sucesos	Suceso constituido por el conjunto de resultados comunes a A y a B.	A = {*sacar número par*} = {2,4,6} *y* B = {*sacar número mayor que* 4} = {5,6} $A \cap B$ = {*número par y mayor que* 4} = {6}
Unión de sucesos	Suceso constituido por sucesos elementales de A o de B.	$A \cup B$ = {*número par o mayor que* 4} = {2,4,5,6}
Sucesos incompatibles	Sucesos cuya realización simultánea es imposible, es decir, su intersección es el suceso imposible.	A = {*sacar número par*} y B = {3}, *entonces* $A \cap B = \Phi$
Sucesos contrarios o complementarios	Son dos sucesos incompatibles cuya unión es el suceso seguro.	A = {*sacar número par*} y $\bar{A}$ = {*sacar número impar*} $A \cap \bar{A} = \Phi$ *y* $A \cup \bar{A} = E$. Es evidente que todos los elementos de $\bar{A}$ son los elementos de E que no pertenecen a A. Los sucesos E y Φ son complementarios, ya que $\bar{E} = \Phi$ y $E \cap \Phi = \Phi$.

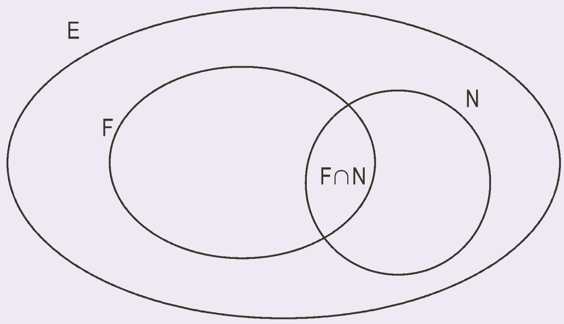
La letra “o” que aparece en la definición de la unión de sucesos no es una “o exclusiva”, sino una “o inclusiva” como se ve en algunos escritos “o/y”.

Ejemplo

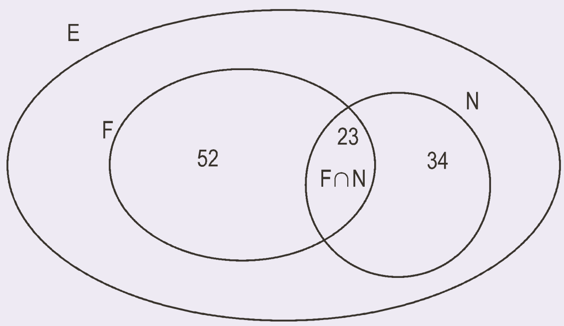
1. En un campamento de verano se practican dos deportes: fútbol y natación. De los 120 jóvenes inscritos, 75 se han apuntado a fútbol y 57 a natación, mientras 23 se han apuntado a ambos deportes. ¿Cuántos han ignorado el fútbol? ¿Cuántos han desechado la natación? ¿Cuántos practican el fútbol pero no la natación? ¿Cuántos practican la natación pero no el fútbol? ¿Cuántos jóvenes se han inscrito en fútbol o natación?¿Cuántos no se han apuntado a fútbol ni a natación?

   Solución:

   Se suelen representar estos datos por diagramas, llamados diagramas de Venn. El conjunto *E* representa el total de jóvenes. Dentro hemos dibujado dos óvalos, *F* y *N*, que corresponden a los jóvenes que practican fútbol y natación respectivamente.



   La parte común a *F* y *N* simboliza los jóvenes que se han apuntado a fútbol y natación, es decir, $F \cap N$. Los que han ignorado el fútbol pertenecen al conjunto $\overline{F}$ y son 120 – 75 = 45. Los que no han escogido natación constituyen el conjunto expresado por $\overline{N}$ y son 120 – 57 = 63.



   Los que practican fútbol y no natación, es decir, el conjunto $F \cap \overline{N}$ está constituido por 75 – 23 = 52, mientras que los que practican natación y no fútbol, los del conjunto $N \cap \overline{F}$, son 57 – 23 = 34. Es evidente que *F* es unión de dos conjuntos incompatibles $N \cap \overline{F}$ y $F \cap N$, ya que los que se han apuntado a fútbol pueden dividirse en dos grupos: los que practican también natación y los que no, luego $F = (F \cap N) \cup (F \cap \overline{N})$; y lo mismo ocurre con *N*, $N = (N \cap F) \cup (N \cap \overline{F})$.

   Por otra parte, $F \cup N$ está formado por $F \cap \overline{N}$, $F \cap N$ y $N \cap \overline{F}$, en consecuencia está compuesto por 52 + 23 + 34 = 109 jóvenes. Finalmente, el conjunto $\overline{F} \cap \overline{N}$, los que no se han apuntado a fútbol y no se han apuntado a natación, constituye el complementario de los que se han inscrito en algo, $F \cup N$, y en consecuencia $\overline{F \cup N} = \overline{F} \cap \overline{N}$; además resultan ser : 120 – 109 = 11.

Vamos a deducir algunas propiedades de las operaciones con sucesos mencionadas antes.

Aunque no es una nueva operación definimos la **diferencia de sucesos** $A-B$ como el suceso $A\cap\overline{B}$, es decir, los elementos de A que no pertenecen a B. Según esto los elementos de A se dividen en dos sucesos incompatibles: los que pertenecen también a B y los que no pertenecen a B, pero sí a $\overline{B}$. Luego $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. Del mismo modo, resulta fácil de ver que el complementario del complementario de A , $\overline{\overline{A}}$, es el propio A.

Mayor dificultad e interés ofrecen las **leyes de De Morgan**, las hemos visto en la última pregunta del ejemplo 1, que enunciamos así:

1ª $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$, el complementario de la unión es igual a la intersección de complementarios.

2ª $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$, el complementario de la intersección es igual a la unión de complementarios.

El nombre de estas leyes proviene del lógico británico que las estudió, Augustus de Morgan (1806 - 1871).

Ejemplo

2. Comprobar las leyes de De Morgan en el juego de tirar un dado, sabiendo que $A=\{2,4,6\}$ y $B=\{5,6\}$.

Solución:

En el juego de tirar un dado, el espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Si $A=\{2,4,6\}$, $\overline{A}=\{1,3,5\}$; y como $B=\{5,6\}$, entonces $\overline{B}=\{1,2,3,4\}$. Por otra parte $A\cap B=\{6\}$.

Primera ley de De Morgan: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Dado que $A\cup B=\{2,4,5,6\}$, $\overline{A\cup B}=\{1,3\}$; y por otro lado $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,3\}$. Luego la igualdad se cumple.

Segunda ley de De Morgan: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Dado que $A\cap B=\{6\}$, $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5\}$; y por otra parte $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,5\}$. Luego la igualdad también se cumple.

Actividades

1. En un sondeo hecho a 200 personas se les preguntó por sus hábitos. A la pregunta de si fumaban regularmente, 92 han respondido que sí, 68 han admitido que consumen regularmente bebidas alcohólicas y 45 que fuman y beben. ¿Cuántas personas son fumadoras, pero no consumen alcohol? ¿Cuántas consumen regularmente alcohol y no son fumadoras? ¿Cuántas no son fumadoras ni consumen alcohol? ¿Cuántas son fumadoras o consumen alcohol con regularidad?

2. Dado un espacio muestral $E = \{r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ y dos subconjuntos o sucesos de este espacio muestral $A = \{r,s,t,u,v\}$ y $B = \{t,v,x\}$ comprobar las leyes de Morgan:

1ª $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

2ª $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup B$.

2. Definición de probabilidad de un suceso

Al realizar un experimento aleatorio desconocemos cuál va ser el resultado, por lo que no tenemos la certeza de que ocurra o no un determinado suceso A; pero sí podemos asignar al suceso A un número que mida la posibilidad de que ocurra. Este número se llama probabilidad del suceso A y se simboliza por $P(A)$.

2.1. Propiedades de la probabilidad de un suceso

Antes de asignar un número a cada uno de los sucesos de un experimento aleatorio, vamos a establecer algunas propiedades deseables de esa asignación. Para cada suceso A, es decir, para cada subconjunto del espacio muestral E, al número $P(A)$, que mide la probabilidad de que A ocurra, le vamos a imponer que cumpla las siguientes exigencias (o axiomas):

1. Para cada suceso A, $P(A) \geq 0$.
2. La probabilidad del suceso seguro, E, es igual a 1, $P(E) = 1$.
3. Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \Phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Aún sin saber cómo asignaremos probabilidades a un suceso, nos encontramos ya con algunas consecuencias de los axiomas anteriores, y que nada tienen que ver con el modo de calcular $P(A)$. Veámoslas, son las consecuencias siguientes:

1. Para cada suceso A, la probabilidad del complementario, $\overline{A}$, es igual a 1 menos la probabilidad de A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración: Como $E = A \cup \overline{A}$ y $A \cap \overline{A} = \Phi$, según el axioma 3, $P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ y por el axioma 2, $1 = P(A) + P(\overline{A})$. Despejando $P(\overline{A})$, resulta $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Esta fórmula es sumamente útil porque en muchos problemas resulta más fácil el cálculo de la probabilidad de $\overline{A}$ que la de A.

2. La probabilidad del suceso imposible es 0, $P(\Phi) = 0$.

Demostración: Como E y Φ son complementarios, de la consecuencia anterior, $P(\Phi) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

3. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos, entonces
   $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$

Demostración: Es una consecuencia directa del axioma 3.

4. Para cada par de sucesos A y B, se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demostración: Sabemos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, y que $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son incompatibles, luego $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ y $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Por otra parte $A \cup B = (A - B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ y como $A \cap \overline{B}$ y B son incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$. Sustituyendo $P(A \cap \overline{B})$ por la expresión calculada antes, obtenemos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Esta fórmula se emplea en muchos problemas sencillos de probabilidad.

Ejemplos

3. Si A y B son sucesos de un espacio muestral con $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

Calcular: **a)** $P(A\cup B)$, **b)** $P(\bar{A})$, **c)** $P(\bar{B})$, **d)** $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ y **e)** $P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

Solución:

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{17}{30}$.

b) $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

c) $P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

d) Utilizamos la 1ª ley de De Morgan: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$, luego

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{17}{30}=\frac{13}{30}.$$

e) Utilizamos la 2ª ley de De Morgan: $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$, luego

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

4. En un Instituto, la probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0,6 y de que apruebe economía es 0,4, mientras que la probabilidad de que apruebe las dos es 0,3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe matemáticas o economía o, lo que es lo mismo, de que apruebe al menos una de estas dos asignaturas?

b) ¿Y de que no apruebe ninguna?

c) ¿Y de que no apruebe matemáticas ni economía? (Es otra forma de plantear el apartado anterior).

Solución:

Sea A el suceso aprobar matemáticas y B el aprobar economía. Lógicamente $\bar{A}$ es suspender matemáticas y $\bar{B}$ es suspender economía.

a) El suceso A $\cup$ B es aprobar al menos una asignatura,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}6+0{,}4-0{,}3=0{,}7.$$

b) No aprobar ninguna es el suceso complementario de A $\cup$ B, luego

$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}7=0{,}3.$$

c) No aprobar matemáticas ni economía es el suceso $\bar{A}\cap\bar{B}$, que por la 1ª ley de De Morgan es igual que $\overline{A\cup B}$,

luego $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}7=0{,}3$.

Actividades

3. Dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}8$. Calcular $P(A \cap B)$.

4. De los sucesos de un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

   Calcular **a)** $P(\bar{A})$; **b)** $P(\bar{B})$; **c)** $P(A \cap B)$ y **d)** $P(A \cap \bar{B})$.

5. En un experimento aleatorio sabemos que $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ y $P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$.

   Calcular las probabilidades de los sucesos A, B y $\bar{A} \cap B$.

2.2. Asignación de probabilidades por la frecuencia relativa

La **frecuencia relativa** del suceso A, f_r, es el cociente que resulta al dividir el número de veces que ocurre A, n_A, entre el número de veces que realizamos el experimento aleatorio, N,

$$f_r(A) = \frac{\text{número de veces que ocurre } A}{\text{número de veces que realizamos el experimento}} = \frac{n_A}{N}$$

La frecuencia relativa de un suceso, al aumentar el número de veces que realizamos el experimento, converge o tiende a estabilizarse alrededor de un número fijo. Esto es tanto más notorio cuantas más veces realicemos el experimento. Esta aproximación de la frecuencias relativas a un número fijo está garantizada por la llamada Ley de los Grandes Números. De este modo atribuimos como probabilidad del suceso A el número $f_r(A)$. Esta forma de atribuir probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio se dice por experimentación o empírica.

Ejemplo

5. Una cadena de montaje de una fábrica está dotada de un sistema de alarma que se activa cuando se produce un incidente. Se sabe por experiencia que la probabilidad diaria de que la alarma se active sin que haya incidente es 1/50; la probabilidad diaria de que haya un incidente y la alarma no se active es 1/500; y la probabilidad de que en un día surja un incidente es 1/100. **a)** Calcular la probabilidad diaria de que ocurra un incidente y la alarma se active. **b)** Calcular la probabilidad diaria de que la alarma se active.

   Solución:

   Llamaremos A al suceso la alarma se activa, I al suceso se produce un incidente y a los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{I}$, no se activa la alarma y no se produce incidente. Según esto sabemos que $P(A \cap \bar{I}) = \frac{1}{50}, P(I \cap \bar{A}) = \frac{1}{500}$ y $P(I) = \frac{1}{100}$.

   a) Si la alarma salta y se produce un incidente, estamos ante el suceso $A \cap I$. Por otra parte, sabemos que $I = (I \cap \bar{A}) \cup (I \cap A)$, siendo $(I \cap \bar{A})$ y $(I \cap A)$ incompatibles. Luego

   $$P(I) = P((I \cap \bar{A}) \cup (I \cap A)) = P(I \cap \bar{A}) + P(I \cap A)$$

   Sustituyendo los valores conocidos en la igualdad anterior,

   $$\frac{1}{100} = \frac{1}{500} + P(I \cap A) \Rightarrow P(I \cap A) = \frac{1}{100} - \frac{1}{500} = \frac{1}{125} = 0{,}008.$$

b) Queremos conocer $P(A)$ y sabemos que $A = (I \cap \overline{A}) \cup (\overline{I} \cap A)$, siendo $(I \cap A)$ y $(\overline{I} \cap A)$ sucesos incompatibles.

Por tanto, $P(A) = P((I \cap A) \cup (\overline{I} \cap A)) = P(I \cap A) + P(\overline{I} \cap A) = \frac{1}{125} + \frac{1}{50} = \frac{7}{250} = 0{,}028$.

Actividades

6. Se lanza un dado de 6 caras mal construido y experimentalmente se determina que $P(1) = 0{,}1$; $P(2) = 0{,}2$; $P(3) = 0{,}3$; $P(4) = 0{,}1$ y $P(5) = 0{,}15$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de salir un 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar con este dado?

7. La probabilidad de que un equipo de fútbol gane un partido es 0,5 y la de que pierda es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de que empate?

2.3. Asignación de probabilidades en experimentos aleatorios con resultados equiprobables. Regla de Laplace

Cuando es previsible que todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio tengan la misma disponibilidad de salir podemos atribuir, como probabilidad, a cada uno de ellos el número

$$\frac{1}{n^{o}\ total\ sucesos\ elementales}$$

Esta asignación de probabilidades que sólo podemos hacer en experimentos aleatorios con resultados o sucesos elementales equiprobables, es decir, todos tienen la misma probabilidad, nos permite disponer de una regla para hallar la probabilidad de cualquier otro suceso. Veamos cómo se hace.

Si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es un suceso constituido por n sucesos elementales, entonces es posible escribir este suceso como unión de sucesos incompatibles dos a dos, así: $A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}$.

La probabilidad de A, si empleamos la consecuencia 3, será:

$$P(A) = P(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}) == P\{a_1\} + P\{a_2\} + ... + P\{a_n\} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + ... + \frac{1}{m} = \frac{n}{m}.$$

En donde hemos supuesto que m es el número total de sucesos elementales del experimento aleatorio. Luego,

$$P(A) = \frac{n^{o}\ de\ sucesos\ elementales\ de\ A}{n^{o}\ de\ sucesos\ elementales\ de\ E}$$

A los elementos de A se les suele llamar resultados favorables a la realización del suceso A y a los de E, resultados posibles; por lo que la fórmula anterior se acostumbra a escribir así:

$$P(A) = \frac{n^{o}\text{ de casos favorables}}{n^{o}\text{ de casos posibles}}$$

A este cociente se le llama **Regla de Laplace**, y será la fórmula que emplearemos en la mayor parte de los problemas, salvo en aquellos en que las probabilidades vengan asignadas ya en el enunciado.

Ejemplo

6. El control de calidad de una fábrica descubre que cada 2.000.000 de piezas producidas hay 10000 defectuosas. Si no se modifican las condiciones de fabricación, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?

Solución:

$P(\textit{pieza defectuosa}) = \frac{10000}{2000000} = \frac{1}{200} = 0{,}005$. El número 0,005 se puede leer como un porcentaje:

0,005 = 0,5/100 = 0,5%. La probabilidad indica un porcentaje, es decir, el porcentaje de éxito o de ocurrencia de un suceso.

Actividades

8. Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) A = {se obtiene al menos un 5}.

b) B = {se obtiene un doble}.

c) $A \cap B$.

d) $A \cup B$.

9. Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

3. Diagramas en árbol y la resolución de algunos problemas sencillos de probabilidad

3.1. Principio de multiplicación y diagramas en árbol

En los problemas de probabilidad, a veces, nos dan la probabilidad de algunos sucesos y nos piden calcular la de otros sin hacer referencia a la naturaleza del experimento aleatorio al que pertenecen. En otros, conocemos la naturaleza del experimento aleatorio, casi siempre con resultados equiprobables, y nos piden calcular la probabilidad de determinados sucesos. En este último caso, al aplicar la regla de Laplace, tenemos que contar sucesos elementales o casos favorables y casos posibles. Si el experimento aleatorio es simple como tirar un dado, extraer una carta de una baraja, contar chicos a los que les gusta el fútbol o la natación, etc., la enumeración directa de los sucesos elementales es suficiente.

Cuando el experimento aleatorio consta de varias pruebas, es decir, consiste en tirar varios dados, una moneda y un dado, extraer varias cartas, extraer varias bolas de una urna, escoger varias personas, etc., la enumeración de los sucesos elementales no es tan sencilla. Sin embargo, el principio de la multiplicación facilita mucho las cosas.

Principio de la multiplicación: Si un experimento aleatorio está constituido por p pruebas, teniendo cada una de ellas n_1, n_2, n_3,…, n_p resultados, entonces el número total de resultados del experimento aleatorio es

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_p$$

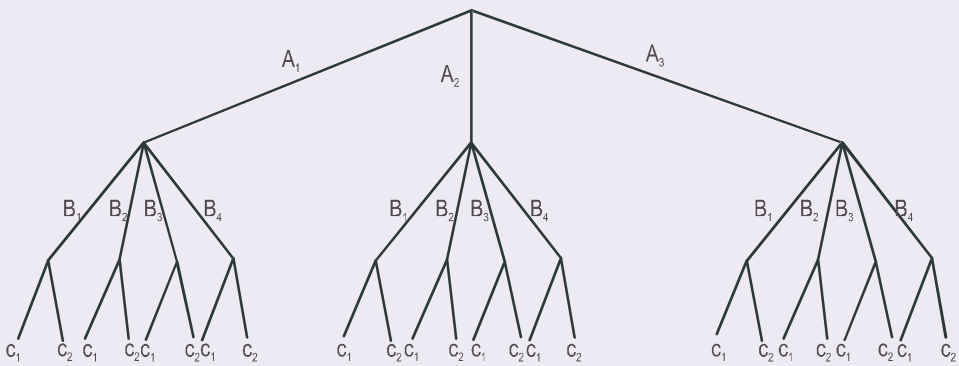
Los ejemplos que vienen a continuación nos ayudarán a comprender y utilizar este principio.

El ejemplo muestra que los diagramas en árbol son muy útiles no sólo para contar el número de sucesos elementales de un suceso en un experimento de varias pruebas, sino también para identificar cada uno de esos sucesos elementales del espacio muestral.

Ejemplo

7. Un restaurante ofrece a sus clientes una carta en la que hay 3 primeros platos, 4 segundos y 2 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

Solución: Podemos pedir $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús. Si empleamos un diagrama en árbol, podemos, además de determinar el número de menús, identificar cada uno de ellos. Supongamos que A_1, A_2, A_3, son los primeros platos y B_1, B_2, B_3 y B_4, los segundos y C_1 y C_2, los postres. Disponemos un diagrama en árbol así:



Recorriendo las ramas del árbol de arriba abajo obtenemos todos los menús posibles: $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1$,…, $A_3B_4C_2$, en total 24.

Actividades

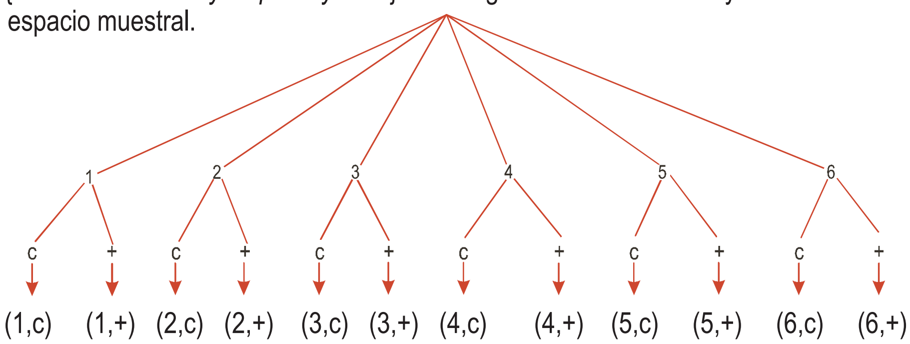
10. Un restaurante ofrece a sus clientes una carta en la que hay 3 primeros platos, 4 segundos y 2 postres, flan o helado. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir en los que el postre es flan?

11. Entre el pueblo A y el pueblo B hay 4 caminos, y de B salen 3 caminos para el pueblo C. ¿De cuántas maneras distintas se puede ir de A a C? Calcula el número de modos de hacer el trayecto de ida y vuelta A – C – A, empleando recorridos distintos a la ida y a la vuelta.

3.2. Diagramas en árbol y problemas de probabilidad

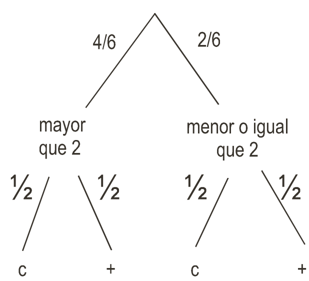
En buena parte de los problemas de probabilidad nos encontramos ante experimentos aleatorios de varias pruebas, y para resolverlos resultan sumamente útiles los diagramas en árbol.

Veamos, por ejemplo, un juego sencillo: se tira un dado y una moneda y queremos conocer la probabilidad del suceso A = {*sacar número mayor que 2 y cruz*}. Un diagrama en árbol nos ayuda a conocer los sucesos elementales del espacio muestral.



Por un sencillo recuento vemos que $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Si consideramos el dado primero, la probabilidad de obtener mayor que 2 es 4/6, es decir, que esperamos que salga *mayor que* 2 en los 4/6 de todas las tiradas, recuerda que la probabilidad es un porcentaje. Si a continuación tiramos la moneda es de esperar que salga *cruz* en la mitad de las tiradas. Por tanto, al tener dos porcentajes encadenados, es de esperar que salga *mayor que* 2 *y cruz* en los $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}$ de todas las tiradas que hagamos; en consecuencia, la probabilidad de A será: $P(A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Esto nos induce a emplear diagramas en árbol reducidos al suceso A que nos interesa, de modo que el diagrama anterior quedaría reducido a éste:



Podemos afirmar, por tanto, que la probabilidad de A es igual al producto de las probabilidades de las ramas que conducen a él. Este tipo de diagramas en árbol, reducidos al suceso que nos interesa, serán particularmente útiles cuando estudiemos la probabilidad condicionada.

Actividades

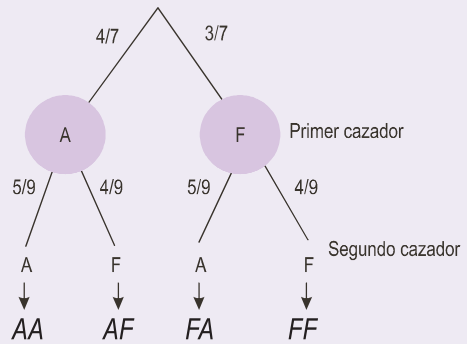
12. En una urna hay seis bolas negras y cuatro rojas. Se extraen dos bolas: **a)** si la primera se devuelve a la urna, calcula la probabilidad de que las dos sean de distinto color; **b)** calcular la probabilidad de que las dos sean del mismo color, si la primera no se devuelve a la urna.

13. Se extraen dos cartas de una baraja de 40. **a)** Calcula la probabilidad de que ambas sean ases. **b)** Calcula la probabilidad de que la primera sea un as y la segunda no. Considera el caso de que haya devolución de la primera carta y de que no la haya.

Ejemplos

8. Dos cazadores disparan sobre la misma liebre. Afortunadamente para la liebre se sabe por experiencia que la probabilidad de acertar de uno es 4/7 y del otro, 5/9. ¿Cuál es la probabilidad de que la liebre se salve? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno acierte?

Solución: Hacemos un diagrama de dos pruebas, una para cada cazador.



La liebre se salva si ambos fallan y $P(FF)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{21}=0{,}19$. La probabilidad de que al menos uno acierte corresponde a la probabilidad de que acierte el primero, el segundo o los dos a la vez, es decir, de los sucesos elementales: AF, FA y AA

$$P(AF\cup FA\cup AA)=P(AF)+P(FA)+P(AA)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{17}{21}$$

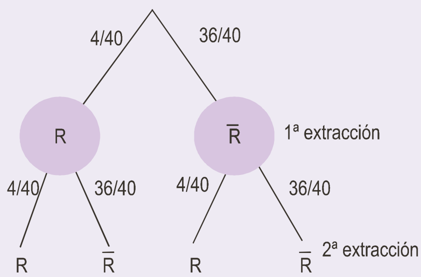
El mismo resultado se obtiene de $P(\{al\ menos\ uno\ acierta\}) = 1 - P(FF) = 1 - \frac{4}{21}=\frac{17}{21}$.

9. Se extraen dos cartas de una baraja de 40.

a) Si la primera carta se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean reyes.

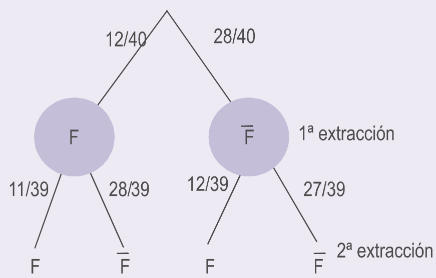
b) Si la primera carta no se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean figuras.

Solución: **a)** Simbolizamos por R salir rey y por $\overline{R}$ no salir rey.



$$P(RR)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}=0{,}01.$$

b) Hay 12 figuras: 4 sotas, 4 caballos y 4 reyes. Si no devolvemos la primera carta, en la segunda extracción hay sólo 39 disponibles. Sea F = {salir figura} y $\overline{F}$ = {no salir figura}



$$P(FF)=\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}=0{,}084.$$

4. Probabilidad condicionada

Cuando dos sucesos de un experimento aleatorio están relacionados, el conocimiento de que ha ocurrido uno de ellos puede modificar la probabilidad del otro. Veamos un ejemplo.

En un curso de 2º CCSS hay 30 alumnos de los cuales 17 son chicas y 13 chicos. En la evaluación de matemáticas han aprobado 7 chicas y 8 chicos.

Resumimos la información anterior en un cuadro, también llamado tabla de contingencia:

	Aprobados	Suspensos	Total
Chicas	7	10	17
Chicos	8	5	13
Total	15	15	30

Si elegimos al azar una persona de este curso estamos ante un experimento aleatorio cuyo espacio muestral tiene 30 sucesos elementales y la probabilidad de cada suceso elemental es $^1/_{30}$. Consideremos los sucesos

A = { *ser una chica* } y B = { *estar aprobado* }

entonces

$$P(A) = \frac{17}{30} \quad y \quad P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Si queremos hallar la probabilidad del suceso *ser chica* y *haber aprobado*, éste sería: $P(A \cap B) = \frac{7}{30}$

Imaginemos que, en este juego de elegir una persona del curso, alguien sabe que la persona elegida es una chica y quiere saber la probabilidad de que también haya aprobado. Simbolizaremos esta probabilidad por $P(B/A)$, que significa probabilidad de B sabiendo que A ha ocurrido o probabilidad de B condicionada a A. Según la tabla tenemos

$$P(B/A) = \frac{7}{17}$$

Dividiendo numerador y denominador de esta fracción por 30 se obtiene .

$$P(B/A) = \frac{7}{17} = \frac{7/30}{17/30} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Es decir, la **probabilidad de *B* condicionada a *A***, nos indica la proporción de veces que ocurre B de entre todas las que ocurre A y esta probabilidad se calcula por las fórmulas

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad o \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

De otro modo, la probabilidad de B condicionada a A indica en qué se convierte la probabilidad de B cuando se restringe el conjunto de resultados posibles de E a A.

Ejemplo

10. Al tirar dos dados se sabe que la suma de los resultados ha sido 8, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya salido un 5?

Solución:

El suceso A = {*la suma de los dos dados es* 8} = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)} y el suceso B = {*al menos sale un* 5}. Es evidente que $A \cap B = \{ (3,5),(5,3) \}$, luego

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

Sin embargo, observamos que la probabilidad de B es $P(B) = \frac{11}{36}$; ya que hay 11 resultados favorables a que salga al menos un 5 entre los 36 posibles:

(1,5), (5,1), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4), (5,5), (6,5) y (5,6).

Actividades

14. Sobre lo sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades : $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}45$.

Calcular:

a) $P(A/B)$;

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

15. Según la estadística del hotel de un balneario la distribución de clientes por sexo y edad es la siguiente: 23% hombres con más de 45 años, 7% hombres con menos de 45 años, 60% mujeres con más de 45 años, 10% mujeres con menos de 45 años.

La persona alojada en la habitación nº 222 se sabe que tiene 80 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

16. Una cadena de montaje de una fábrica está dotada de un sistema de alarma que se activa cuando se produce un incidente. Se sabe por experiencia que la probabilidad diaria de que la alarma se active sin que haya incidente es 1/50; la probabilidad diaria de que haya un incidente y la alarma no se active es 1/500; y la probabilidad de que en un día surja un incidente es 1/100. **a)** Calcular la probabilidad diaria de que ocurra un incidente y la alarma se active. **b)** Calcular la probabilidad diaria de que la alarma se active. **c)** La alarma se acaba de activar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente un incidente?

Nota : los apartados **a)** y **b)** están resueltos en el ejemplo 5.

5. Sucesos independientes

Sin duda los diagramas en árbol y la identificación de sucesos independientes son los mejores recursos para resolver problemas de probabilidad sencillos. Veamos qué caracteriza a los sucesos independientes. Consideremos el juego de tirar un dado y los sucesos

A = {*salir menor que* 5} = {1, 2, 3, 4}

B = {*salir impar*} = {1, 3, 5}

$A \cap B$ = {*salir impar y menor que* 5} = {1, 3}

La probabilidad de estos sucesos es

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\; P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \;\; y \;\; P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

La probabilidad de salir impar sabiendo que ha salido menor que 5, $P(B/A)$, sería

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/3}{2/3}=\frac{1}{2},$$

pero también $P(B)=\frac{1}{2}$, entonces $P(B/A) = P(B)$.

Es decir, la probabilidad de B condicionada a A es igual a la de B o, lo que es lo mismo, la probabilidad de B no está modificada por la información suministrada por A. En este caso se dice que A y B son independientes y, por tanto, la fórmula de la probabilidad condicionada

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

queda

$$P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \text{o} \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Esta última fórmula es importante porque garantiza que la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades de cada una de ellos.

Dos sucesos se llaman **sucesos independientes** cuando la realización de uno de ellos no suministra información sobre la realización del otro. Se pueden encontrar en un juego simple, como el del ejemplo anterior, o en experimentos aleatorios de varias pruebas. Es, en estos juegos, donde los sucesos independientes tienen más interés.

Sucesos independientes en pruebas independientes

En los juegos con varias pruebas puede ocurrir que los sucesos de una prueba sean independientes de los de otra o no. En un caso estamos ante pruebas independientes y en otro, ante pruebas dependientes. Veamos algunos experimentos aleatorios de uno y otro tipo:

1. Tirar una moneda y después un dado. Es evidente que el resultado de la moneda no influye en el resultado del dado. Son pruebas independientes y los sucesos relativos a cada prueba son independientes.

2. Extraer dos cartas de una baraja. Si al sacar la primera carta la devolvemos al mazo de cartas, tenemos dos pruebas independientes; el resultado de la primera no influye en el resultado de la segunda. Pero si no se devuelve la primera carta al mazo, entonces el resultado de la segunda va a depender del resultado de la primera.

Ejemplos

11. Se extraen dos cartas de una baraja de 40.

a) Si la primera carta se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean reyes.

b) Si la primera carta no se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean reyes.

Solución:

Este problema lo hemos resuelto mediante un diagrama, pero admite otra forma resolverlo. Consideremos los sucesos

$$A = \{ \text{sacar rey en la } 1^a\},\quad B = \{ \text{sacar rey en la } 2^a\} \text{ y}$$
$$A \cap B = \{ \text{sacar rey en la } 1^a \text{ y sacar rey en la } 2^a \}$$

a) Si A y B son independientes, y esto ocurre cuando devolvemos la primera carta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

b) Si A y B no son independientes, y esto ocurre cuando no devolvemos la primera carta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

12. Calcular la probabilidad de obtener al menos un 6 al tirar un dado cuatro veces.

Solución:

Cuando nos encontramos ante el suceso {*obtener al menos* 6} debemos pensar que es complementario de {*no sacar ningún* 6}. La probabilidad de {*no sacar* 6} en una tirada es

$$P(\{no\ 6\}) = \frac{5}{6}$$

Llamemos A_1 al suceso no sacar 6 en el primer lanzamiento del dado, A_2 al suceso no sacar 6 en el segundo lanzamiento y A_3 y A_4 , el mismo resultado en los lanzamientos tercero y cuarto. El suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ es no sacar 6 ni en el primero, ni en el segundo, ni en el tercero y ni en el cuarto lanzamiento, todos estos sucesos son independientes ya que lo que ocurra en un lanzamiento no influye en el siguiente, y su probabilidad será:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}482$$

Luego la probabilidad de obtener al menos un 6

P({*obtener al menos un* 6 *en cuatro tiradas*}) = 1- P({*no sacar* 6 en cuatro tiradas}) = 1 - 0,482 = 0,518.

13. Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo acierta en un blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0,3:

a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?

b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente al tercer intento?

Solución:

Los diagramas en árbol son muy engorrosos cuando tenemos más de tres pruebas; en estos casos resulta más práctico identificar sucesos independientes. Llamemos

A_1 = {*acertar con el primer dardo*} y $\overline{A}_1$ = {*no acertar con el primer dardo*},
A_2 = {*acertar con el segundo dardo*} y $\overline{A}_2$ = {*no acertar con el segundo dardo*},
A_3 = {*acertar con el tercer dardo*} y $\overline{A}_3$ = {*no acertar con el tercer dardo*};

además sabemos que

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}3 \text{ y } P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = 0{,}7.$$

Todos los sucesos mencionados anteriormente son independientes, como puede comprobarse al realizar la actividad 16. Por lo tanto,

a) se lleva el peluche si al menos acierta con un dardo, pero esto es el complementario de no acertar con ningún dardo

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 = 0{,}657;$$

b) se lleva el peluche en el tercer intento si falla el primero y el segundo, pero como $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ y A_3 son independientes, tenemos

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}147.$$

Actividades

17. Dados A y B sucesos de un experimento aleatorio, demuestra que si A y B son independientes, entonces

a) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes,

b) y también A y $\overline{B}$ son independientes.

18. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$. Calcular: **a)** $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes; **b)** $P(A \cup B)$.

19. Sacamos sucesivamente dos cartas de una baraja.

a) Vemos la primera y la devolvemos al mazo de cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean copas?

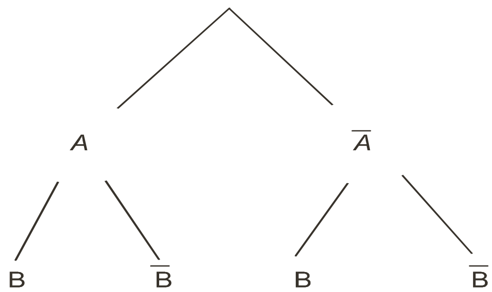
b) Después de ver la primera no la devolvemos al mazo de cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean copas?

6. Probabilidad condicionada y probabilidad total

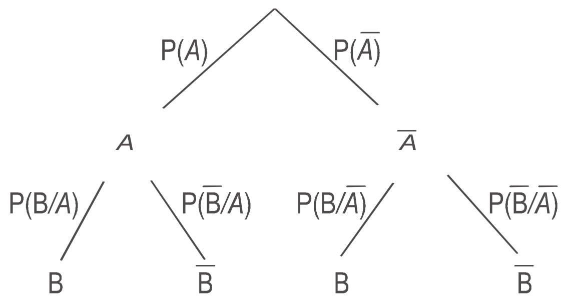
6.1. Probabilidad condicionada y diagramas en árbol

Al resolver problemas de probabilidad condicionada ayudan mucho los diagramas en árbol; tanto si son experimentos con varias pruebas, como si no.

Si nos encontramos con un juego de dos pruebas y A es un suceso de la primera y B es un suceso de la segunda, entonces es posible esquematizar el juego así:



En las ramas de este esquema podemos escribir:



Luego la probabilidad del suceso $A \cap B$ será: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, es decir, el producto de las ramas indica que se realiza A en la primera prueba y B en la segunda. Si embargo, la probabilidad de B, dado que

$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, será:

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}),$$

es decir, la suma de los productos de las ramas que conducen a él.

Ejemplos

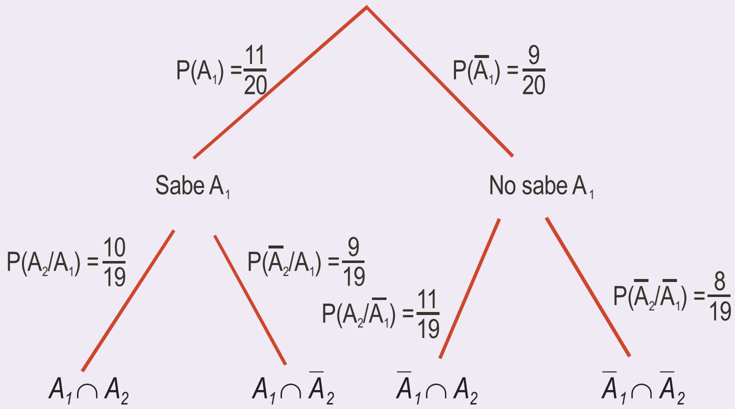
14. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de un programa de 20 y desarrollar uno de ellos. Un alumno sabe 11 temas.

a) ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene de saber un tema y otro no?

Solución: Los sucesos A_1 = {*sabe el 1º tema*} y A_2 = {*sabe el 2º tema*} no son independientes porque

$P(A_1) = 11/20$, pero $P(A_2) = 10/19$.



a) Aprueba si sabe al menos uno,

P({*sabe al menos uno*}) = 1- P({*no sabe ninguno*}) = $1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{77}{95}$.

Como $\frac{77}{95} = 0,8105$, tiene más de un 81% de posibilidades de aprobar. El mismo resultado obtendríamos sumando los productos de las ramas que conducen a $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \bar{A}_2$ y $\bar{A}_1 \cap A_2$.

b) La suma de las probabilidades de $A_1 \cap \bar{A}_2$ y $\bar{A}_1 \cap A_2$ nos da respuesta. Por consiguiente,

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{11}{20} \cdot \frac{9}{19} + \frac{9}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{99}{190} = 0,521.$$

En un experimento aleatorio en el que no está claro que existan varias pruebas, también resultan útiles los diagramas en árbol como se pone en evidencia en el ejemplo siguiente.

Ejemplos

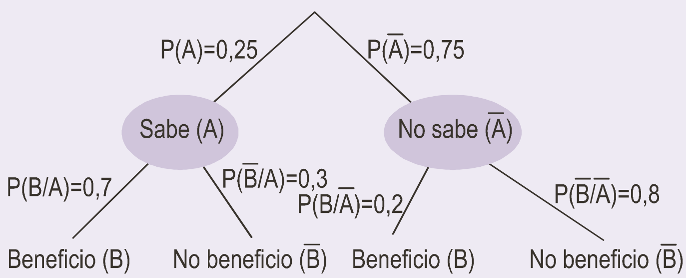
15. Los resultados de una encuesta indican que sólo un 25% de los que invierten en bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos el 70% obtiene plusvalías. Sin embargo, únicamente un 20% de los que compran acciones sin conocimiento del mercado de valores consigue ganancias. Se pide:

a) Probabilidad de que elegido un inversor al azar obtenga beneficios. ¿Qué porcentaje de los que compran acciones consigue plusvalías?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un inversor elegido al azar no tenga conocimientos de bolsa y no consiga ganancias?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que habiendo obtenido beneficios no tenga idea de la bolsa de valores?

Solución: Distinguiremos dos sucesos A = {*sabe de bolsa*} y B = {*obtiene beneficios*} y sus contrarios $\bar{A}$ y $\bar{B}$. Sobre el diagrama en árbol resolveremos los dos primeros apartados.



a) $P(B)=P(A)\cdot P(B/A)+P(\bar{A})\cdot P(B/\bar{A})=0{,}25\cdot 0{,}7+0{,}75\cdot 0{,}2=0{,}325$. Por consiguiente, el 32,5% de los inversores obtiene beneficios.

b) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}/\bar{A})=0{,}75\cdot 0{,}8=0{,}6$.

c) Se trata de hallar la probabilidad $P(\bar{A}/B)$, que por la definición de probabilidad condicionada nos conduce a

$$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\bar{A})\cdot P(B/\bar{A})}{P(B)}=\frac{0{,}75\cdot 0{,}2}{0{,}325}=0{,}46.$$

La generalización del apartado a) de este ejemplo nos conduce al teorema de la probabilidad total, que veremos en seguida, y la generalización del apartado c) nos conduce al teorema de Bayes que veremos en el próximo epígrafe.

6.2. Probabilidad total

En ocasiones, es posible calcular la probabilidad de un suceso en función de las probabilidades condicionadas de ese suceso con respecto a un conjunto de sucesos conocidos. Esto ocurre cuando el conjunto de sucesos conocidos constituye un sistema completo de sucesos. ¿Qué es un **sistema completo de sucesos**? Pues un conjunto de sucesos A_1, A_2, ..., A_n constituye un sistema completo de sucesos si cumple dos condiciones:

1ª) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \Phi$, siempre que $i \neq j$.

2ª) La unión de A_1, A_2, ..., A_n es el suceso seguro $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

El teorema de la probabilidad total dice así:

Si A_1, A_2, ..., A_n es un sistema completo de sucesos y B es un suceso del que únicamente conocemos las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la $P(B)$ viene dada por la fórmula:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Demostración: Como A_1, A_2, ..., A_n son incompatibles dos a dos, también lo son los sucesos

$A_1\cap B$, $A_2\cap B$, ..., $A_n\cap B$ y además $B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup \ldots \cup(A_n\cap B)$

y en consecuencia

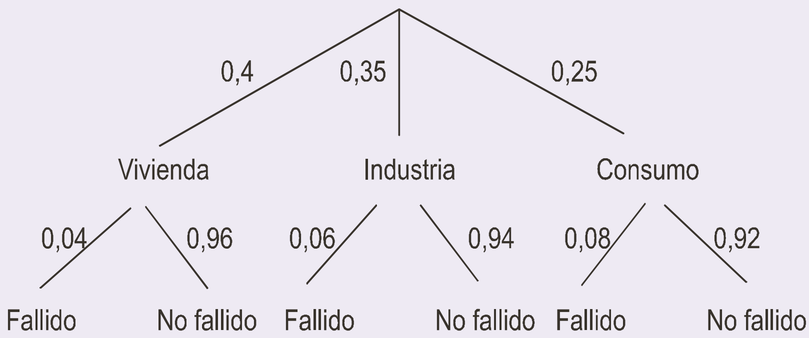
$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\ldots+P(A_n\cap B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n).$$

En los ejemplos veremos que ya sabíamos resolver problemas de la probabilidad total con un sencillo diagrama en árbol.

Ejemplo

16. El 40% de los créditos que concede un banco son para la vivienda, el 35% para la industria y 25% para el consumo. Resultan fallidos el 4% de los créditos a la vivienda, el 6% de los créditos a la industria y el 8% de los créditos al consumo. Se elige al azar un prestatario del banco, ¿cuál es la probabilidad de que no pague el crédito? ¿y cuál es la probabilidad de que pague el crédito?

Solución: Los créditos vivienda, industria y consumo forman un sistema completo de sucesos. Son incompatibles y su unión constituyen todos los créditos que concede el banco. Con un sencillo diagrama en árbol de dos pruebas veremos mejor las cosas.



Un crédito fallido es el que no se paga y sabemos por el teorema de la probabilidad total que la probabilidad de un suceso es la suma de los caminos que conducen a él:

$$P(Fallido) = P(Vivienda)\cdot P(Fallido / Vivienda) + P(Industria)\cdot P(Fallido / Industria) +$$
$$+P(Consumo)\cdot P(Fallido / Consumo) = 0{,}4\cdot 0{,}04 + 0{,}35\cdot 0{,}06 + 0{,}25\cdot 0{,}08 = 0{,}057.$$

Es decir, 5,7 % de los créditos resultan fallidos.

La probabilidad de que se pague, es decir, *No fallido*, será: $P(No\,fallido) = 1 - P(Fallido) = 1 - 0{,}057 = 0{,}943.$

El mismo resultado hubiéramos encontrado sumando las ramas que conducen a *No fallido*. En todo caso, no está bien eso de no pagar los préstamos.

Actividades

20. Tenemos 4 urnas. En la primera hay 5 bolas blancas y 3 negras; en la segunda 6 blancas y 7 negras; en la tercera hay 4 bolas blancas y 2 negras y en la cuarta hay 6 bolas negras. Si elegimos una urna al azar y extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

21. En un hotel hay tres cajas fuertes. En una de ellas hay 6 joyas buenas y 2 falsas; en otra, 5 joyas de valor y 1 falsa; y en la tercera, 8 joyas valiosas y 3 falsas. Suponiendo que un ladrón sólo puede abrir una caja fuerte y llevarse una joya, ¿cuál es la probabilidad de que se lleve bisutería?

22. En una empresa el 70% son empleados y el 30% directivos. El 80% de los primeros son casados, mientras que 40% de los segundos son solteros. Se elige una persona al azar en la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea soltera?

7. Teorema de Bayes

Si interpretamos un sistema completo de sucesos, A_1, A_2, ..., A_n , como las causas de que se produzcan ciertos efectos, y uno de esos efectos es un suceso B, entonces el **teorema de Bayes** permite calcular la probabilidad de que un efecto tenga una determinada causa. En otras palabras, permite calcular la probabilidad condicionada $P(A_i/B)$ interpretando ésta como la probabilidad de que la causa de B sea A_i.

El teorema de Bayes tiene este enunciado:

Si A_1, A_2, ..., A_n es un sistema completo de sucesos y B es un suceso cualquiera del que únicamente conocemos las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad de A_i condicionada a B viene dado por la fórmula

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_1)\cdot P(B/A_n)}$$

Demostración: De la definición de probabilidad condicionada podemos escribir

$$P(A_i\cap B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i) \qquad \text{y} \qquad P(A_i\cap B)=P(B)\cdot P(A_i/B)$$

Si dos cosas son iguales a una tercera, son también iguales entre sí; luego $P(A_i)\cdot P(B/A_i)=P(B)\cdot P(A_i/B)$

Despejando $P(A_i/B)$, se obtiene

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_1)\cdot P(B/A_n)}$$

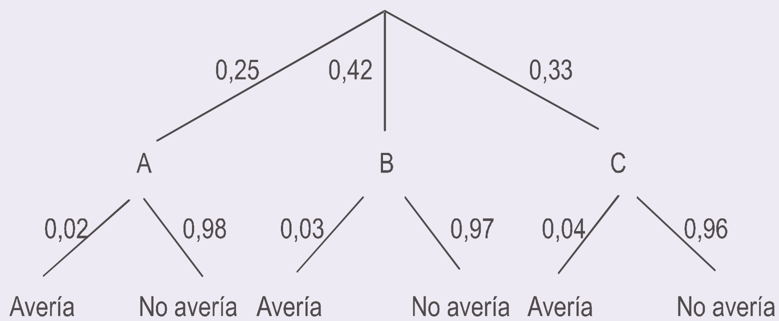
dado que $P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_1)\cdot P(B/A_n)$, (**teorema de la probabilidad total**).

Ejemplos

17. Un modelo de automóvil se fabrica en 3 factorías distintas: A, B y C. De A sale el 25% de la producción anual, en B se hace el 42% y en C el 33%.

El 2% de los coches fabricados en A sufre una avería en el primer mes de rodaje, lo mismo ocurre con el 3% de los fabricados en B y con el 4% de los fabricados en C. Un cliente tiene un coche que se ha averiado en el primer mes de uso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en C?

Solución: Los sucesos A, B y C están formados por los automóviles que se fabrican en cada una de las factorías. Además, constituyen un sistema completo de sucesos: son incompatibles y su unión es toda la producción anual de este modelo. Un diagrama en árbol facilita siempre las cosas.



Conocemos el suceso *el coche se ha averiado*, y queremos calcular la probabilidad de *haya sido fabricado en C*, se trata de hallar $P(C/\ Avería)$ y es, según la fórmula de Bayes,

$$P(C/Avería)=\frac{P(C)\cdot P(Avería/C)}{P(Avería)}=\frac{P(C)\cdot P(Avería/C)}{P(A)\cdot P(Avería/A)+P(B)\cdot P(Avería/B)+P(C)\cdot P(Avería/C)}=$$

$$=\frac{0{,}3\cdot 0{,}04}{0{,}25\cdot 0{,}02+0{,}42\cdot 0.03+0{,}3\cdot 0{,}04}=0{,}4054.$$

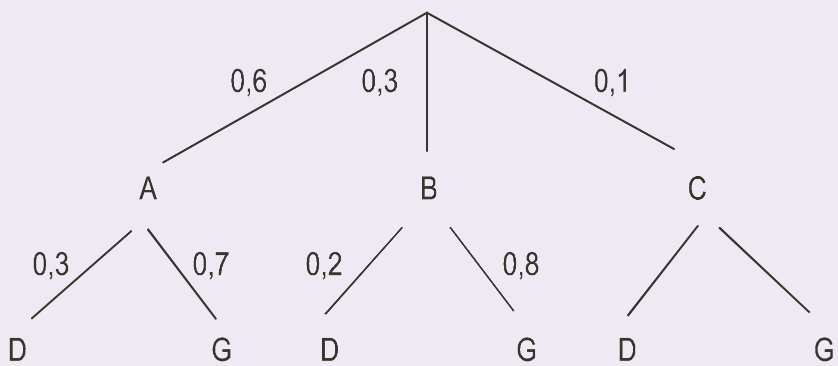
18. Seguimos en el sector del automóvil. Una fábrica produce tres modelos de coche: *A*, *B* y *C*. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60% de los modelos son de tipo *A* y el 30% de tipo *B*. El 30% de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30% de los coches del modelo *A* son de tipo diesel y el 20% de los coches del modelo *B* tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) El coche es del modelo *C*.

b) El coche es del modelo *A*, sabiendo que tiene motor diesel.

c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo *C*.

Solución: A pesar del galimatías que sugiere el enunciado, se trata de un problema de probabilidad total y fórmula de Bayes. Tal vez lo mejor sea organizar los datos en un diagrama en árbol. El dato "el 30% de los coches fabricados tienen motor diesel" se utilizará en el apartado b).



a) Los coches del modelo *A*, junto con los coches de los modelos *B* y *C*, constituyen un sistema completo de sucesos y, por tanto, los coches del modelo *C* serán el 10%. Esto es así porque 1 – (0,6 + 0,3) = 1 – 0,9 = 0,1.

b) Si *D* es el suceso tener motor diesel y nos piden calcular $P(A/D)$, por la fórmula de Bayes:

$$P(A/D)=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}3}{0{,}3}=0{,}6.$$

c) Como $P(D)$ = 0,3, empleando la fórmula de la probabilidad total, resulta

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)$$

$$0{,}3=0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot P(D/C)$$

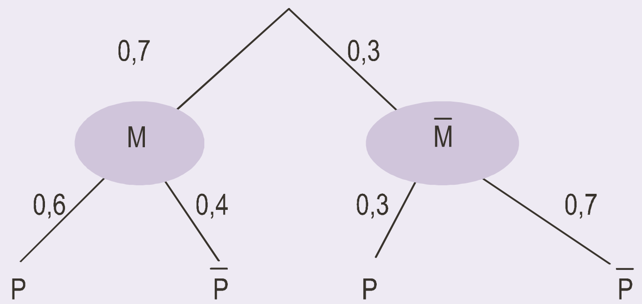
$$P(D/C)=\frac{0{,}3-0{,}18-0{,}06}{0{,}1}=0{,}6.$$

19. Continuamos en el sector del automóvil, pero ahora en el negocio del taxi. Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70% tiene más de 40 años y de éstos el 60% es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que, no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30%. Se pide:

a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce.

b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

Solución: Llamemos P al suceso ser propietario y $\overline{P}$ no ser propietario. Al suceso {*más de 40 años*} lo simbolizaremos por M y al suceso {*igual o menos de 40 años*} lo simbolizaremos por $\overline{M}$. Con un diagrama en árbol veremos las cosas con más claridad.



a) La probabilidad de P, como M y $\overline{M}$ son un sistema completo de sucesos, puede calcularse por el teorema de la probabilidad total $P(P)=P(M)\cdot P(P/M)+P(\overline{M})\cdot P(P/\overline{M})=0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}51.$

b) Se trata de hallar la probabilidad de M condicionada a P, $P(M/P)$, empleando la fórmula de Bayes obtenemos:

$$P(M/P)=\frac{P(M)\cdot P(P/M)}{P(P)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}51}=0{,}8235.$$

Actividades

23. En una empresa el 70% son empleados y el 30% directivos. El 80% de los primeros son casados, mientras que el 40% de los segundos son solteros. Se elige una persona al azar en la empresa. Sabiendo que se ha elegido una persona soltera, ¿cuál es la probabilidad de que sea directivo?

24. Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0,3; de que se remita al bufete B es 0,5 y de que se remita al bufete C es 0,2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0,6; para el bufete B esta probabilidad es 0,8 y para el bufete C es 0,7.

a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

25. Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de perderse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

8. Combinatoria

La regla de Laplace nos obliga a contar objetos de un conjunto, casos favorables y casos posibles. Esto no siempre es una labor fácil. Para estas situaciones, en las que no podemos contar fácilmente y los diagramas en árbol resultan engorrosos o insuficientes, existen técnicas de conteo que emplearemos para resolver algunos problemas de probabilidad.

8.1. Factoriales

Si n es un número natural mayor que 1, se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. El factorial de n se simboliza por $n!$ y será:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Si nos piden calcular 4 factorial y luego 6 factorial, escribimos:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Aceptaremos que 0! = 1 y también 1! = 1. En una calculadora científica, con las teclas SHIFT x! se hallan factoriales.

Actividades

26. Calcula: **a)** 5!; **b)** (9 – 2)!; **c)** (10 – 4)!.

27. Calcula $(n-p)!$ Cuando $n = 10$ y $p = 8$.

28. Calcula $\frac{n!}{(n-p)!}$ cuando $n = 12$ y $p = 4$.

29. Calcula $\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ cuando $n = 10$ y $p = 6$, y luego cuando $n = 10$ y $p = 4$. ¿Dan el mismo resultado?

8.2. Variaciones con repetición

Podíamos haber titulado este apartado así: ¿cómo elegir al azar, sucesivamente y con devolución, p objetos (o sucesos elementales) entre n disponibles?.

Se trata, en realidad, de elegir un objeto, registrarlo y devolverlo a la colección; y repetir esta operación hasta tener el registro de los p objetos. Un ejemplo nos ayudará a comprenderlo: *¿cuántos resultados distintos podemos obtener al extraer* 3 *cartas, de una baraja de* 40*, si devolvemos cada vez la carta extraída al mazo*?

Para la 1ª extracción tenemos 40 cartas posibles, pero si devolvemos la carta, para la 2ª tenemos también 40 y, al reponer ésta, para la 3ª tenemos igualmente 40.

	1ª extracción	2ª extracción	3ª extracción
Resultados posibles	40	40	40

Luego, por el principio de multiplicación, todos los posibles resultados del juego serán: $40 \cdot 40 \cdot 40 = 40^3$.

Otro ejemplo: *¿cuántos resultados distintos podemos obtener al tirar tres veces un dado*?

En la 1ª tirada pueden salir 6 resultados, en la 2ª tirada, como es independiente de la 1ª, pueden salir también 6; y en la 3ª también 6, porque es independiente de las anteriores.

	1ª tirada	2ª tirada	3ª tirada
Resultados posibles	6	6	6

Por el principio de multiplicación pueden salir: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ resultados.

De un modo general, las **variaciones con repetición** de *n* objetos tomados o elegidos de *p* en *p* son los grupos de *p* objetos en los que puede haber objetos diferentes o repetidos. Además dos grupos serán distintos si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente.

Las variaciones con repetición de *n* objetos tomados de *p* en *p* se simbolizan por $VR_{n,p}$, y su número viene dado por

$$VR_{n,p} = n^p$$

Ejemplo

20. ¿Cuántos números de teléfono fijo pueden empezar por 91?

Solución: Los números de teléfono fijo tienen 9 lugares, como tenemos los dos primeros fijos, con un 9 y un 1, disponemos de diez cifras, de 0 a 9, para llenar cada uno de los siete lugares restantes. Se trata de variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 7 en 7,

$$VR_{10,7} = 10^7 = 10000000$$

Hay, por tanto, posibilidad de tener hasta diez millones de números de teléfono fijo en la Comunidad de Madrid.

Actividades

30. a) ¿Cuántas columnas tenemos que cubrir a las quinielas para tener la certeza de acertar los catorce? **b)** ¿Y el pleno al quince?

31. ¿Cuántos números de teléfono móvil, de nueve cifras, hay que empiecen por el 6?

8.3. Variaciones ordinarias

Disponemos ahora *n* objetos de los que elegimos, sucesivamente y sin devolución, *p* objetos. Por ejemplo, *¿de cuántas maneras diferentes pueden extraerse* 3 *cartas de una baraja de* 40, *si no se devuelve ninguna al mazo después de cada extracción*?

Para la 1ª extracción disponemos de 40 resultados posibles; para la 2ª, 39 y para la 3ª únicamente 38, que son las cartas que quedan en el mazo después de las dos primeras extracciones.

	1ª extracción	2ª extracción	3ª extracción
Resultados posibles	40	39	38

Por el principio de multiplicación serán: $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$ maneras diferentes.

En general, las **variaciones ordinarias** de n objetos tomados de p en p son todos los grupos de p objetos que pueden formarse con los n disponibles. Además, dos variaciones son distintas si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente.

Simbolizaremos las variaciones simples de n objetos tomados de p en p por $V_{n,p}$. Para calcular su número, como vimos en el ejemplo, imaginemos que disponemos de p cajas

1ª caja	2ª caja	3ª caja	....	p-ésima caja

Para la primera podemos seleccionar n objetos. Hecho esto, nos quedan $n - 1$ para la segunda; $n - 2$ para tercera. Continuado de esta forma, para la última caja, la p-ésima, nos quedan $n - (p - 1)$, es decir, $n - p + 1$.

Aplicando ahora el principio de multiplicación:

$$V_{n,p} = n\cdot (n - 1)\cdot (n - 2)\cdot \ \dots \ \cdot (n - p + 1)$$

En ocasiones empleamos otra fórmula para calcular las variaciones. Si al segundo miembro de la igualdad anterior lo multiplicamos y dividimos por $(n - p)!$, resulta:

$$V_{n,p} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\cdot\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ejemplos

21. En una carrera de 100 m participan 6 corredores, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden repartir las medallas de oro, plata y bronce?

Solución: Indicamos los 3 primeros lugares de llegada con las palabras oro, plata y bronce.

1º oro	2º plata	3º bronce
6	5	4

Para el primer lugar puede elegirse cualquiera de los 6 corredores, para el segundo sólo pueden elegirse 5, porque uno ya llegó primero, y para el tercer lugar sólo pueden elegirse 4 corredores, los que quedan. Se trata de variaciones simples de 6 objetos tomados de 3 en 3,

$$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ maneras diferentes.}$$

Con la tecla $\boxed{\text{nPr}}$, precedida de la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$, es posible calcular variaciones ordinarias. El cálculo anterior se haría así: 6 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nPr}}$ 3 = 120.

22. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes mayores que 3000 es posible escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Solución: Los números de 4 cifras mayores que 3000 que podemos formar con { 1, 2, 3, 4, 5, 6} deben comenzar por 3, 4, 5 o 6,

3 __ __ __   4 __ __ __

5 __ __ __   6 __ __ __

para los otros tres lugares hay disponibles 5 cifras para agrupar de 3 en 3, y como las cifras han de ser diferentes estamos ante $V_{5,3}$. En consecuencia, el total de números mayores que 3000 será:

$$4 \cdot V_{5,3} = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240.$$

Actividades

32. En una clase de 24 alumnos se elige delegado y subdelegado. Si todos son candidatos, ¿cuántos resultados posibles habrá?

8.4. Permutaciones ordinarias

¿Qué ocurriría si dispusiésemos de n objetos y elegimos, sucesivamente y sin devolución, n objetos? Estaríamos ante el problema de calcular variaciones simples de n objetos tomados de n en n. Para resolverlo disponemos, como en el apartado anterior, de n cajas

☐	☐	☐	....	☐
1ª caja	2ª caja	3ª caja		n-ésima caja

Para la primera podemos seleccionar n objetos; para la segunda $n-1$; para la tercera $n-2$. Procediendo de la misma forma, cuando lleguemos a la n-ésima caja sólo nos quedará un objeto disponible, $n-n+1=1$. Aplicando la fórmula tenemos:

$$V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Las variaciones simples de n objetos tomados de n en n se llaman **permutaciones** de n objetos y corresponden a todas las posibles ordenaciones del conjunto de esos n objetos. Se simbolizan por P_n y hemos visto que su número es:

$$P_n = n!$$

Ejemplo

23. Dos chicos y dos chicas entran en una cafetería; si por la puerta sólo cabe una persona, ¿de cuántas formas posibles pueden entrar?

Solución: Son cuatro personas que únicamente pueden entrar de una en una, luego formas posibles de entrar son:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Actividades

33. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 5 libros diferentes en una estantería?

34. ¿De cuántas formas pueden entrar en la cafetería la pandilla del ejemplo 23 si las chicas entran una detrás de otra?

8.5. Combinaciones

Cuando el orden en el cual han sido elegidos los p objetos entre los n disponibles no nos interesa, estamos ante combinaciones de n objetos tomados de p en p. Emplearemos las combinaciones cuando hagamos extracciones simultáneas.

Por ejemplo, imaginemos una urna con ocho bolas iguales numeradas de 1 a 8. Extraemos 3 bolas, sin devolver ninguna. En este caso atendemos únicamente a los números que llevan las bolas extraídas y no reparamos en el orden de salida. Obtenemos así subconjuntos de 3 elementos de un conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} de ocho elementos.

El número de subconjuntos de 3 elementos que se pueden formar con un conjunto de ocho elementos se simboliza por $C_{8,3}$, y se lee combinaciones de 8 elementos tomados de 3 en 3. Es evidente que cada uno de estos subconjuntos de 3 elementos, digamos el {2, 5, 7}, puede ordenarse de 3! maneras diferentes; en consecuencia, hay 3! veces más subconjuntos de 3 elementos ordenados, $V_{5,3}$, que no ordenados, $C_{5,3}$; esto nos permite establecer la igualdad:

$$C_{5,3} \cdot 3! = V_{5,3}$$

de donde

$$C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{3!}$$

Generalizando, definimos **combinaciones** de *n* elementos, tomados de *p* en *p*, a los grupos de *p* elementos distintos, de modo que dos combinaciones son diferentes si se diferencian en algún elemento. Sin embargo, dos combinaciones son iguales si tienen los mismos elementos a pesar del orden en que aparezcan.

El número de combinaciones de *n* elementos tomados de *p* en *p* lo simbolizamos por $C_{n,p}$ o por $\binom{n}{p}$ y como hemos visto en el ejemplo se calculan por la fórmula:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!}$$

Por otra parte, como $V_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ podemos escribir

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Ejemplos

24. En un curso de 2º de bachillerato hay 26 alumnos y se debe elegir una comisión formada por tres alumnos. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

Solución: En una comisión no hay una jerarquía que implique un orden, luego se trata de combinaciones de 26 elementos tomados de 3 en 3, es decir, $C_{26,3} = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3! \cdot 23!} = 2600$. Las calculadoras científicas disponen de la tecla $\boxed{\text{nCr}}$ para calcular combinaciones. El cálculo se haría así: 26 $\boxed{\text{nCr}}$ 3 = 2600.

25. En un curso de 2º de bachillerato hay 12 chicos y 14 chicas y se debe elegir una comisión integrada por dos chicos y dos chicas ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

Solución: En las comisiones aplicamos combinaciones. Hay $C_{12,2} = 66$ maneras de elegir 2 chicos entre 12 y $C_{14,2} = 91$ de elegir 2 chicas entre 14. Por el principio de multiplicación habrá $C_{12,2} \cdot C_{14,2}$ comisiones formadas por 2 chicos y 2 chicas, es decir,

$$C_{12,2} \cdot C_{14,2} = 66 \cdot 91 = 6006 \text{ comisiones.}$$

26. Se reparten 4 cartas de una baraja de 40, es lo que los jugadores llaman una mano.

a) ¿Cuántas manos distintas se pueden dar?

b) ¿Cuántas de estas manos están formadas únicamente por bastos?
c) ¿En cuántas manos entran dos caballos?
d) ¿En cuántas manos entran dos copas y una espada?
e) ¿En cuántas manos aparecerán al menos tres copas?

Solución:

a) $C_{40,4} = \dfrac{40!}{4!\cdot 36!} = 91390$.

b) Hay 10 cartas de bastos y con ellas podemos formar $C_{10,4} = 210$ grupos de 4 bastos.

c) La baraja tiene 4 caballos y con ellos podemos formar $C_{4,2}$ grupos de 2 caballos. Nos quedan 40 – 4 = 36 cartas para elegir las otras 2 que faltan. Por el principio de multiplicación, habrá

$$C_{4,2}\cdot C_{36,2} = 3780 \text{ manos con dos caballos.}$$

d) Disponemos de 10 copas para tomar 2 y los podemos hacer de $C_{10,2}$ maneras y 10 espadas para tomar 1, esto lo podemos hacer $C_{10,1} = 10$ maneras. Nos quedan 40 – 10 – 10 = 20 cartas para elegir la cuarta, entonces por el principio de multiplicación tendremos:

$$C_{10,2}\cdot C_{10,1}\cdot C_{20,1} = C_{10,2}\cdot 10\cdot 20 = 9000 \text{ manos con 2 copas y 1 espada.}$$

e) Si en una mano entran al menos 3 copas, quiere decir que entrarán 3 o 4 copas. Entran 3 en $C_{10,3}\cdot C_{30,1} = C_{10,3}\cdot 30 = 3600$ manos. Entran 4 copas $C_{10,4} = 210$ manos. En total, entran 3 o 4 copas en

$$C_{10,3}\cdot 30 + C_{10,4} = 3600 + 210 = 3810 \text{ manos.}$$

27. Al tirar seis monedas diferentes , ¿de cuántas maneras pueden salir 4 caras y 2 cruces?

Solución: Se trata de formar, con los signos **c** y **+**, palabras de 6 signos, empleando 4 veces **c** y 2 el signo **+** , como esta **c c + c + c**

Imaginemos que tenemos 6 cajas

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª

y que podemos elegir cuatro de ellas para poner una letra **c**. Una elección podía ser 1ª , 2ª, 4ª y 6ª, pero sería lo mismo elegir 6ª, 4ª, 2ª y 1ª, porque el resultado es el mismo: poner una **c** en ellas. Las elecciones posibles no dependen del orden de elección se trata de $C_{6,4}$, es decir,

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = 15.$$

Este número será el mismo que si eligiéramos dos cajas, entre las seis, para poner el signo **+**. Porque poniendo la letra **c** en cuatro nos quedan dos para poner el signo **+**.

Actividades

35. Se reparten 5 cartas de una baraja de 40 cartas. **a)** ¿En cuántos manos sale exactamente un rey? **b)** ¿En cuántas salen dos copas? ¿En cuántas sale al menos un oro?

36. a) ¿De cuántas maneras distintas pueden elegirse 3 personas en un grupo de 6 mujeres y 10 hombres? **b)** ¿Y 3 personas de modo que 2 sean mujeres y 1 hombre?

9. Probabilidad y combinatoria

La combinatoria es útil en la resolución de problemas de probabilidad cuando se trata de hallar la probabilidad de sucesos en experimentos aleatorios con resultados equiprobables en los que podemos emplear la regla de Laplace.

Las técnicas de conteo que hemos estudiado en el apartado anterior facilitan el recuento de los casos favorables y posibles de la fórmula de Laplace. En este apartado resolveremos algunos problemas típicos de probabilidad.

9.1. Elecciones simultáneas al azar

El elegir *p* objetos en una colección de *n* objetos significa formar subconjuntos de *p* elementos de uno mayor de *n* elementos. ¿Cuántos subconjuntos de *p* elementos hay en otro mayor de *n*? Esto sabemos que son combinaciones de *n* elementos tomados de *p* en *p*, $C_{n,p}$, y la probabilidad de elegir cada uno de estos subconjuntos es:

$$\frac{1}{C_{n,p}}$$

Ejemplo

28. Se extraen simultáneamente 4 cartas de una baraja de 40. Calcula la probabilidad de que salgan:

a) cuatro caballos;

b) dos caballos y dos reyes;

c) al menos un rey.

Solución: El número de casos posibles es $C_{40,4} = 91390$. Veamos ahora cada apartado.

a) Una baraja tiene 4 caballos y hay $C_{4,4} = 1$ maneras de elegir 4 caballos entre 4 disponibles. Casos favorables = 1, luego

$$P(4\ caballos) = \frac{C_{4,4}}{C_{40,4}} = \frac{1}{91390}.$$

b) Una baraja posee 4 caballos y 4 reyes. Tenemos $C_{4,2}$ maneras de elegir 2 caballos y $C_{4,2}$ maneras de elegir 2 reyes. Y 2 caballos y 2 reyes, $C_{4,2} \cdot C_{4,2} = 6 \cdot 6 = 36$. Estos son los casos favorables, por tanto

$$P(2\ caballos\ y\ 2\ reyes) = \frac{C_{4,2} \cdot C_{4,2}}{C_{40,4}} = \frac{36}{91390}.$$

c) Al menos un rey quiere decir que pueden entrar 1, 2, 3 ó 4 reyes. Calculemos primero no salir ningún rey. Si sacamos los 4 reyes, quedan 36 cartas y con éstas podemos formar $C_{36,4}$ manos en las que no hay reyes. Si restamos esta cantidad al número total de manos, tendremos las manos en las que al menos hay un rey: $C_{40,4} - C_{36,4} = 32485$. Estos son los casos favorables; en consecuencia la probabilidad pedida es:

$$P(al\ menos\ un\ rey) = \frac{C_{40,4} - C_{36,4}}{C_{40,4}} = \frac{32485}{91390} = 0,3554.$$

9.2. Elecciones sucesivas al azar

Las elecciones sucesivas al azar se pueden hacer de dos formas: con devolución (o reemplazamiento) y sin devolución (o sin reemplazamiento).

En el primer caso, elegimos un objeto, lo registramos, y lo devolvemos a la colección; seguidamente elegimos otro objeto y hacemos las mismas operaciones; y repetimos el proceso hasta tener registros de *p* objetos. Estamos formando variaciones con repetición de *n* elementos tomados de *p* en *p*, $VR_{n,p} = n^p$, y la probabilidad de cada una de estas elecciones es:

$$\frac{1}{VR_{n,p}}$$

Si, por el contrario, elegimos un objeto, lo registramos, pero no lo devolvemos al conjunto, y repetimos estas operaciones hasta completar *p* objetos, entonces estamos ante variaciones simples de *n* elementos tomados de *p* en *p*; y la probabilidad de cada una de estas elecciones es

$$\frac{1}{V_{n,p}}$$

Ejemplos

29. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras al tirar 3 monedas?

Solución: Casos posibles $VR_{2,3} = 2^3 = 8$. Los casos favorables, las monedas son distintas o identificables, son: **cc+, c+c, +cc**. En total 3, luego

$$P(\text{dos caras}) = 3/8 = 0{,}375.$$

30. a) ¿ De cuántas maneras pueden hospedarse 6 viajeros en 10 habitaciones individuales de un hotel?

b) Si los viajeros se han instalado sin saber que 7 de las habitaciones tienen baño, ¿cuál es la probabilidad de que les haya correspondido a cada uno una habitación con baño?

Solución: **a)** Son variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6, ya que cada viajero toma una habitación distinta, y las habitaciones están ordenadas, tienen número, luego hay:

$$V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 151200.$$

maneras de hospedarse.

b) Si hay 7 habitaciones con baño los casos favorables son

$$V_{7,6} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 5040.$$

Los casos posibles ya los hemos calculado en el apartado a); por tanto, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{V_{7,6}}{V_{10,6}} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

Actividades

37. En una oposición entran 20 temas, de los que salen 3 por sorteo y el opositor escoge uno para contestar. Un opositor sabe los 7 primeros, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe?

38. Si un sufrido opositor, de la misma oposición del ejercicio anterior, sólo sabe los 6 últimos temas, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe?

39. Se barajan 10 tarjetas numeradas del 1 al 10, para que queden en un orden al azar. Calcular:

a) la probabilidad de que la primera sea 7;

b) la probabilidad de que la 7 y la 2 estén consecutivas.

RECUERDA

- **Leyes de De Morgan.** 1ª $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, el complementario de la unión es la intersección de complementarios;
  2ª $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, el complementario de la intersección es la unión de complementarios.
- **Regla de Laplace.** $P(A) = \dfrac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$.
- **Probabilidad de B condicionada a A.** $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ o $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.
- **Sucesos independientes.** Dos sucesos son independientes cuando la realización de uno de ellos no influye sobre la realización del otro y se cumple $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Probabilidad total.** Permite calcular la probabilidad de un suceso en función de las probabilidades condicionadas de ese suceso con respecto a un conjunto de sucesos conocidos:
  $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$.
- **Teorema de Bayes.** Permite calcular la probabilidad condicionada $P(A_i/B)$ interpretando ésta como la probabilidad de que la causa de B sea A_i.
  $$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$
- **Variaciones con repetición** de n objetos tomados o elegidos de p en p son los grupos de p objetos en los que puede haber objetos diferentes o repetidos. Además, dos grupos serán distintos si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente; su número viene dado por $VR_{n,p} = n^p$.
- **Variaciones ordinarias** de n objetos tomados de p en p son todos los grupos de p objetos que pueden formarse con los n disponibles. Además, dos variaciones son distintas si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente; su número es: $V_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-p+1)$.
- **Permutaciones** de n objetos y corresponden a todas las posibles ordenaciones del conjunto de esos n objetos. Se simbolizan por P_n y su número es: $P_n = n!$.
- **Combinaciones** de n elementos, tomados de p en p, son los grupos de p elementos distintos, de modo que dos combinaciones son diferentes si se diferencian en algún elemento y serán iguales si tienen los mismos elementos a pesar del orden en que aparezcan. El número de combinaciones de n elementos tomados de p en p vale: $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \dfrac{V_{n,p}}{p!}$.