martes, 15 de julio 2025

Problema 1. Una recta del plano se llama *soleada* si **no** es paralela ni al eje x, ni al eje y, ni a la recta $x + y = 0$.

Sea $n \geqslant 3$ un entero dado. Determine todos los enteros no negativos k para los que existen n rectas distintas del plano que satisfacen las dos condiciones siguientes:

- Para cualesquiera enteros positivos a y b con $a + b \leqslant n + 1$, el punto (a, b) está en al menos una de estas rectas; y
- Exactamente k de estas n rectas son soleadas.

Problema 2. Sean Ω y Γ circunferencias de centros M y N, respectivamente, tales que el radio de Ω es menor que el radio de Γ. Supongamos que las circunferencias Ω y Γ se cortan en dos puntos distintos A y B. La recta MN corta a Ω en C y a Γ en D, de forma que los puntos C, M, N y D están sobre esa recta en ese orden. Sea P el circuncentro del triángulo ACD. La recta AP corta de nuevo a Ω en $E \neq A$. La recta AP corta de nuevo a Γ en $F \neq A$. Sea H el ortocentro del triángulo PMN.

Demuestre que la recta paralela a AP que pasa por H es tangente al circuncírculo del triángulo BEF.

(El *ortocentro* de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.)

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se llama *genial* si

$$f(a) \ \text{ divide a } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

para todos los enteros positivos a y b.

Determine la menor constante real c tal que $f(n) \leqslant cn$, para todas las funciones geniales f y todos los enteros positivos n.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

miércoles, 16 de julio 2025

Problema 4. Un *divisor propio* de un entero positivo N es un divisor positivo de N distinto de N.

La sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ consiste de enteros positivos, cada uno de los cuales tiene al menos tres divisores propios. Para cada $n \geqslant 1$, el entero a_{n+1} es la suma de los tres mayores divisores propios de a_n.

Determine todos los valores posibles de a_1.

Problema 5. Alicia y Beto están jugando al *juego del koala*, un juego para dos jugadores cuyas reglas dependen de un número real positivo λ, que ambos jugadores conocen. En el n-ésimo turno del juego (comenzando con $n = 1$) ocurre lo siguiente:

- Si n es impar, Alicia elige un número real no negativo x_n tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Si n es par, Beto elige un número real no negativo x_n tal que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Si uno de los jugadores ya no puede elegir un número x_n, el juego termina y el otro jugador gana. Si el juego continúa indefinidamente, ninguno de los jugadores gana. Ambos jugadores siempre conocen los números elegidos.

Determine todos los valores de λ para los cuales Alicia tiene una estrategia ganadora, y todos los valores de λ para los cuales Beto tiene una estrategia ganadora.

Problema 6. Se considera una cuadrícula de 2025×2025 cuadrados unitarios. Matilde desea colocar algunas fichas rectangulares sobre la cuadrícula, que pueden ser de tamaños distintos, de modo que cada lado de cada ficha se encuentra sobre una línea de la cuadrícula y cada cuadrado unitario está cubierto por a lo más una ficha.

Determine el número mínimo de fichas que Matilde necesita colocar de modo que cada fila y cada columna de la cuadrícula tiene exactamente un cuadrado unitario que no está cubierto por ninguna ficha.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.