LXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2024 - 2025

Mañana del viernes 17 de enero de 2025

Problema 1. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea M un punto en la diagonal BD que cumple $MD = 2BM$. Las rectas AM y BC se cortan en un punto N. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo MND y el área del paralelogramo $ABCD$?

Solución. Dado un polígono P, escribimos S_P para denotar su área. Como BN es una recta paralela a AD, se cumple que las perpendiculares desde B y N a AD tienen la misma longitud; por lo tanto, los triángulos ABD y AND tienen la misma área. Se tiene entonces que

$$S_{AND} = S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Por otro lado, los triángulos ADM y BNM son semejantes, por tener sus lados paralelos. Como $MD = 2BM$, se cumple también que $AM = 2MN$, o, lo que es lo mismo, $\frac{MN}{AN} = \frac{1}{3}$. Como los triángulos AMD y MND comparten la altura, se tiene que

$$\frac{S_{MND}}{S_{AND}} = \frac{1}{3}.$$

Finalmente,

$$S_{MND} = \frac{1}{3} S_{AND} = \frac{1}{6} S_{ABCD},$$

por lo que el cociente buscado es $1/6$.

Problema 2. Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple que $q(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 2024$. Halla el valor $q(2025)$.

Solución. Consideremos el polinomio $p(x) = xq(x) - 1$, que tiene grado 2024 y se anula en $x = 1, 2, \ldots, 2024$. Por lo tanto,

$$xq(x) - 1 = p(x) = c(x-1)\cdots(x-2024).$$

Evaluando en $x = 0$, nos queda que $-1 = c \cdot 2024!$. Por lo tanto,

$$p(x) = \frac{-1}{2024!}(x-1)\cdots(x-2024),$$

de donde se obtiene que $p(2025) = \frac{-1}{2024!} 2024! = -1$. Concluimos que $2025q(2025) - 1 = -1$, por lo que $q(2025) = 0$.

Problema 3. Dividimos cada lado de un triángulo equilátero en n partes iguales, uniendo cada vértice de la división con el vértice opuesto. Determina el número de puntos de intersección interiores al triángulo determinados por estos segmentos en los siguientes casos.

(a) n es un número primo impar.

(b) $n = 2p^2$, donde p es un número primo impar.

Solución. En cada lado hay $n-1$ puntos de división. Por lo tanto, tenemos $3n-3$ segmentos. Por cada punto de intersección pasan 2 o 3 segmentos. En el caso de que pasen exactamente 2, procedemos como sigue. Cada uno de los $3n-3$ segmentos contiene $2n-2$ puntos de intersección, lo que hace un total de $(3n-3)(2n-2)$ puntos de intersección; como cada uno se está contando dos veces, el número total es $3(n-1)^2$.

(a) En este caso vamos a demostrar que no hay tres segmentos que concurran en un mismo punto. Sea ABC el triángulo de referencia y sean X, Y y Z puntos en los lados BC, CA y AB, respectivamente, con $\frac{BX}{BC} = \frac{x}{n}$, $\frac{CY}{YA} = \frac{y}{n}$ y $\frac{AZ}{ZB} = \frac{z}{n}$. De existir tres segmentos concurrentes, tendríamos, por el teorema de Ceva, que

$$\frac{x}{n-x}\frac{y}{n-y}\frac{z}{n-z} = 1,$$

de donde se deduce que

$$2xyz = n^3 - n^2(x+y+z) + n(xy+yz+zx).$$

Como $1 \leq x, y, z < n$, tenemos que el lado derecho es múltiplo de n, mientras que el izquierdo no puede serlo, dado que n es primo. En este caso, por tanto, el número de puntos de intersección es $3(n-1)^2$.

(b) En este caso sí habrá puntos donde intersecan tres segmentos. Con las notaciones anteriores, partimos de

$$\frac{x}{2p^2-x}\frac{y}{2p^2-y}\frac{z}{2p^2-z} = 1.$$

Supongamos primero que $x = p^2$. Por lo tanto, la ecuación se reduce a

$$yz = 4p^4 - 2p^2(y+z) + yz,$$

o, lo que es lo mismo, $y + z = 2p^2$, que tiene $2p^2 - 1$ soluciones. Poniendo $y = p^2$ obtenemos $2p^2 - 2$ soluciones nuevas, dado que no consideramos de nuevo la $x = y = z = p^2$, y poniendo $z = p^2$ obtenemos así $2p^2 - 2$ soluciones más. Esto da un total de $6p^2 - 5$ soluciones, que se corresponden con puntos de intersección triple. Afirmamos que no hay más soluciones, esto es, que en cada solución uno de los números x, y, z vale p^2. Como

$$2xyz = (2p^2)^3 - (2p^2)^2(x+y+z) + 2p^2(xy+yz+zx),$$

tenemos que el lado de la derecha es múltiplo de p^2. Si ninguna de las variables vale p^2, al menos dos de ellas son múltiplo de p: $x = ap$, $y = bp$. En ese caso, dividiendo por p^2, nos queda que

$$2abz = 8p^4 - 4p^2(ap+bp+z) + 2(p^2ab + paz + pbz),$$

por lo que el lado izquierdo vuelve a ser múltiplo de p, lo que implica que $z = cp$. Por tanto,

$$2abc = 8p^3 - 4p^2(a+b+c) + 2p(ab+bc+ca),$$

lo que querría decir que abc es múltiplo de p, contradiciendo nuestra suposición inicial.

Por cada uno de los puntos de intersección triple, hay que restar 2 de los anteriores, pues estamos identificando tres intersecciones con una sola. Por lo tanto, tenemos

$$3(2p^2-1)^2 - (6p^2-5) = 12p^4 - 18p^2 + 8.$$

Tarde del viernes 17 de enero de 2025

Problema 4 o 1. Determina el menor entero positivo n que tiene al menos 4 divisores diferentes a, b, c, d, con $1 < a, b, c, d < n$, de forma que

$$a + b + c + d = 1001.$$

Solución. Supongamos que $1 < a < b < c < d < n$, de forma que existen enteros positivos d_1, d_2, d_3, d_4 de forma que

$$d_1 a = d_2 b = d_3 c = d_4 d = n,$$

con $1 < d_4 < d_3 < d_2 < d_1 < n$. En particular,

$$1001 = a + b + c + d = n\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}\right) \leq n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{77n}{60}.$$

Aislando n, se tiene que $n \geq 780$. Para $n = 780$, lo dicho en el enunciado es posible, ya que sus divisores 390, 260, 195 y 156 cumplen que

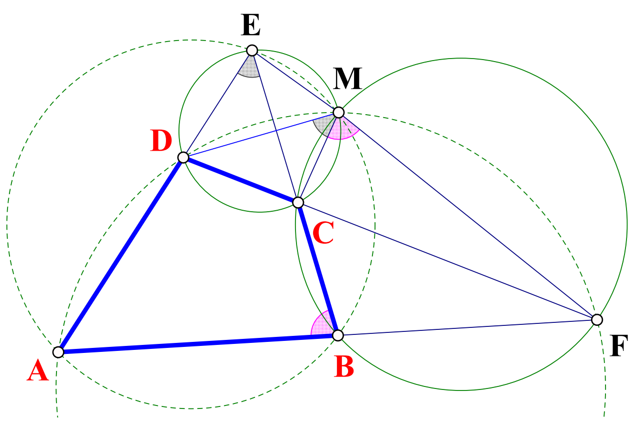
$$390 + 260 + 195 + 156 = 1001.$$

Problema 5 o 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de forma que $AB \cap CD = F$ y $AD \cap BC = E$. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos BFC, AFD, DCE y ABE tienen un punto en común.

Solución. Sean C y M los puntos de intersección de los circuncírculos de BFC y CDE. Como los cuadriláteros $BFCM$ y $CDEM$ son cíclicos, se cumple que

$$\angle DMF = \angle DMC + \angle CMF = \angle DEC + \angle CBA = 180^\circ - \angle BAE.$$

Por lo tanto, el cuadrilátero $AFMD$ es cíclico y, análogamente, el cuadrilátero $ABME$ también lo es. Por lo tanto, se concluye que el punto M es común a los cuatro circuncírculos.



Problema 6 o 3. Encuentra todas las funciones $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ que cumplen, para $x, y > 0$ cualesquiera, que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Solución. Sustituyendo x por $f(x)$, tenemos la ecuación

$$f(f(x)f(y)) = f(f(x)y) + f(x),$$

de donde se obtiene que

$$f(f(x)y) = f(f(x)f(y)) - f(x).$$

Cambiando los valores de x e y en la ecuación inicial, obtenemos que

$$f(yf(x)) = f(yx) + y.$$

Comparando ambas expresiones, tenemos la ecuación

$$f(f(x)f(y)) = f(yx) + y + f(x),$$

cuyo lado izquierdo es invariante al intercambiar los papeles de x e y. Por lo tanto,

$$f(xy) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y),$$

de donde se tiene que

$$f(x) - x = f(y) - y.$$

En otras palabras, se cumple que $f(x) - x = c \in (0,+\infty)$. Por lo tanto, cualquier función que pueda satisfacer la ecuación inicial es de la forma $f(x) = x + c$, con $c \in (0,+\infty)$. Para que esa función sea solución, ambos lados de la igualdad tienen que coincidir para cualquier para (x, y), esto es, las dos expresiones siguientes tienen que ser iguales:

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= xf(y) + c = x(y + c) = xy + cx + c, \\ f(xy) + x &= xy + c + x = xy + x + c. \end{aligned}$$

Eso ocurre si, y solamente si, $cx = x$ para todo $x > 0$, lo cual implica que $c = 1$. La única solución es, por lo tanto, $f(x) = x + 1$.