LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Mañana del viernes 21 de enero de 2022

Sesión única

Problema 1. Un número n de siete cifras es *bonito* si se puede expresar como la suma de dos números de siete cifras s y t, tales que todas las cifras de s son impares y todas las cifras de t son pares.
Determinar cuáles de los siguientes números son bonitos:

$$6204773, 6372538, 7343053, 8993267, 9652393.$$

Problema 2. Sea ABC un triángulo isósceles con $\angle BAC = 100°$. La bisectriz del ángulo $\angle CBA$ corta al lado AC en el punto D.
Demostrar que $BD + DA = BC$.

Problema 3. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ números reales diferentes, de manera que ninguno de ellos es igual a 0. Supongamos que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2)\,(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_5a_6)^2.$$

Demostrar que los números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ están en progresión geométrica.

Problema 4. Un grupo de 12 piratas de edades diferentes se reparte 2022 monedas, de manera que cada pirata (salvo el más joven) tiene una moneda más que el siguiente más joven. A continuación, cada día se procede de la siguiente manera: se escoge a un pirata que tenga al menos 11 monedas, y ese da una moneda a todos los demás.
Encontrar el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener.

No está permitido el uso de calculadoras,
libros, o dispositivos electrónicos.
Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo: 4 horas.

LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Tarde del viernes 21 de enero de 2022

Sesión única

Problema 1 . En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha".
Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.

Problema 2 . Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que

$$\text{área}(PAB) \cdot \text{área}(PCD) = \text{área}(PBC) \cdot \text{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Problema 3 . Hallar todas las ternas de números reales (a, b, c) que cumplan el sistema

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Problema 4 . Encontrar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$

para cualesquiera números reales x, y, z.

No está permitido el uso de calculadoras,
libros, o dispositivos electrónicos.
Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo: 4 horas.

LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Soluciones - Mañana del viernes

Problema 1. *Un número n de siete cifras es bonito si se puede expresar como la suma de dos números de siete cifras s y t, tales que todas las cifras de s son impares y todas las cifras de t son pares. Determinar cuáles de los siguientes números son bonitos: 6204773, 6372538, 7343053, 8993267, 9652393.*

Solución. Afirmamos que los números 6204773 y 9652393 son bonitos, mientras que 6372538, 7343053 y 8993267 no lo son.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & {\scriptstyle \ell_1} & {\scriptstyle \ell_2} & {\scriptstyle \ell_3} & {\scriptstyle \ell_4} & {\scriptstyle \ell_5} & {\scriptstyle \ell_6} & {\scriptstyle \ell_7} \\
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\
+ & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 \\
\hline
 & n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & n_7
\end{array}$$

Escribimos la suma $s + t = n$ de la forma mostrada, la habitual para realizar la suma manualmente. El número ℓ_i es 1 si se tiene llevada de la columna $i + 1$, y 0 en caso contrario. Como en el método habitual, se tiene que $n_i = s_i + t_i + \ell_i$ si no se tiene llevada a la columna siguiente (es decir, $\ell_{i-1} = 0$) y $n_i = s_i + t_i + \ell_i - 10$ si se tiene llevada ($\ell_{i-1} = 1$). Como $s_i + t_i$ es siempre impar, tendremos que $\ell_i = 1$ si n_i es par, y $\ell_i = 0$ si n_i es impar. Esto nos permite descartar los tres números que no son bonitos. Supongamos que es posible escribir estos tres números como $s + t$:

- Para 6372538, como n_7 es par tenemos que $\ell_7 = 1$, pero esto es imposible porque no existe una octava columna de la que traer llevada.
- Para 7343053, como n_4 es impar tenemos que $\ell_4 = 0$, y así obtenemos una contradicción porque $0 = n_5 = s_5 + t_5 + \ell_5 \geq 1 + 0 + 0 = 1$.
- Para 8993267, como n_1 es par tenemos que $\ell_1 = 1$, y así obtenemos una contradicción porque $9 = n_2 = s_2 + t_2 + \ell_2 - 10 \leq 9 + 8 + 1 - 10 = 8$.

En los dos casos en los que el número es bonito, usando la información anterior se pueden hallar los valores de $s_i + t_i$, a partir de lo cual encontrar valores de s y t resulta sencillo. Por ejemplo, uno puede escribir 6204773=3715971+2488802 y 9652393=3371551+6280842.

Problema 2. *Sea ABC un triángulo isósceles con $\angle BAC = 100°$. La bisectriz del ángulo $\angle CBA$ corta al lado AC en el punto D. Probar que $BD + DA = BC$.*

Solución 1 (con trigonometría). Usando el teorema del seno en los dos primeros casos sobre el triángulo BDA y en el tercero sobre el triángulo BCA se tiene que

$$BD = \frac{\sin 80° \cdot BA}{\sin 60°}, \quad DA = \frac{\sin 20° \cdot BA}{\sin 60°}, \quad BC = \frac{\sin 80° \cdot BA}{\sin 40°}.$$

Obsérvese que hemos utilizado también que $\sin 80° = \sin 100°$.
Por lo tanto, la igualdad del enunciado se reduce a establecer que

$$\sin 80° + \sin 20° = \frac{\sin 80° \sin 60°}{\sin 40°}.$$

Para ello, hacemos uso de la fórmula para la suma de senos, que afirma que

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Por tanto,

$$\sin 80° + \sin 20° = 2 \sin 50° \cos 30° = 2 \cos 40° \sin 60° = \frac{\sin 80°}{\sin 40°} \sin 60°,$$

donde se ha usado para concluir la fórmula del seno del ángulo doble.

Solución 2 (sintética). Sea E el único punto del segmento BC tal que $BD = BE$. Si establecemos que $AD = EC$ el enunciado quedará probado. Para ello, veremos que $AD = DE = EC$.
Comenzamos observando que $ADEB$ es cíclico, puesto que $\angle BAD + \angle DEB = 100° + 80° = 180°$. Aquí hemos usado que $BD = BE$ por construcción, y por tanto el triángulo BDE es isósceles con $\angle EBD = 20°$. De aquí tenemos que ADE es isósceles puesto que $\angle DEA = \angle DBA = 20°$ y $\angle DAE = \angle DBE = 20°$.
Por otro lado, $\angle DEC = 100°$, lo que muestra que EDC es isósceles con $ED = EC$, tal y como se quería.

Problema 3. *Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ números reales diferentes, de manera que ninguno de ellos es igual a 0. Supongamos que*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2\right) = \left(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_5 a_6\right)^2.$$

Probar que los números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ están en progresión geométrica.

Solución. Sea

$$\Delta = \left(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_5 a_6\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2\right).$$

Entonces Δ es el discriminante del polinomio de segundo grado

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2)x^2 - 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_5 a_6)x + (a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2) = 0.$$

Reagrupando términos,

$$(a_1 x^2 - 2a_1 a_2 x + a_2^2) + (a_2 x^2 - 2a_2 a_3 x + a_2^2) + \ldots + (a_5 x^2 - 2a_5 a_6 x + a_6^2) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$(a_1 x - a_2)^2 + (a_2 x - a_3)^2 + \ldots + (a_5 x - a_6)^2 = 0.$$

Como $\Delta = 0$, el polinomio tiene una raíz doble, digamos r, y entonces

$$(a_1 r - a_2)^2 + (a_2 r - a_3)^2 + \ldots + (a_5 r - a_6)^2 = 0.$$

De aquí tendremos que $a_2 = a_1 r, a_3 = a_2 r, a_4 = a_3 r, a_5 = a_4 r, a_6 = a_5 r$, y por lo tanto los números están en progresión geométrica.

Problema 4. *Un grupo de 12 piratas de edades diferentes se reparte 2022 monedas, de manera que cada pirata (salvo el más joven) tiene una moneda más que el siguiente más joven. A continuación, cada día se procede de la siguiente manera. Se escoge a un pirata que tenga al menos 11 monedas, y ese da una moneda a todos los demás. Encontrar el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener.*

Solución. La respuesta es $2022 - (0+1+2+\ldots+10) = 1967$. Observemos que en cada paso las cantidades que tienen los piratas son siempre módulo 12 una permutación de los números $0, 1, 2, \ldots, 11$. En el momento inicial eso está claro. Para los pasos siguientes podemos proceder por inducción, dado que si en un momento las cantidades son $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$, en el siguiente serán

$$(a_1 - 11, a_2 + 1, \ldots, a_{12} + 1) \equiv (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{12} + 1) \pmod{11}.$$

Por tanto, la mejor opción posible es llegar a la configuración

$$(0, 1, 2, \ldots, 1967).$$

Numeramos a los piratas por orden de edad como $p_1, \ldots, p_{12}$, siendo p_1 el más joven. Para conseguir la configuración donde un pirata acaba con 1967 monedas, procedemos de la siguiente manera: primero se escoge a p_{11}, luego a p_{10} y así sucesivamente hasta llegar a p_1, de manera que después de 11 turnos todos los piratas salvo el que empezaba con más monedas habrán perdido exactamente una (en una ocasión pierden once y en diez ocasiones ganan una). Este proceso se puede repetir hasta que estos once piratas tengan como cantidades $0, 1, \ldots, 10$ y el mayor de todos atesore 1967 monedas.

Soluciones - Tarde del viernes

Problema 1. *En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha". Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.*

Solución. Vamos a numerar a las personas de izquierda a derecha según su posición en la fila como $p_1, p_2, \ldots, p_{2022}$. En primer lugar, probaremos que todos los p_i con $1 \leq i \leq 1011$ son mentirosos. En el caso de p_1, como no hay personas a su izquierda, sabemos que el enunciado no puede ser cierto, con lo que necesariamente p_1 ha de ser un mentiroso. Procederemos ahora por inducción, suponiendo probado que las k personas más a la izquierda son mentirosas, donde $1 < k < 1011$. Si p_{k+1} dijese la verdad, tendría k mentirosos a su izquierda y por tanto un máximo de $k-1$ personas que dicen la verdad a su derecha, con lo que hay estrictamente más de $2021 - 2k$ mentirosos a su derecha. Tomemos ahora el mentiroso más a la derecha. Este tendrá al menos $2021 - 2k + k = 2021 - k$ mentirosos a su izquierda y a lo sumo $k - 1$ que dicen la verdad a su derecha. Como es un mentiroso, ha de pasar que $2021 - k \leq k - 1$, lo cual implica que $k \geq 1011$, lo cual es una contradicción.
Vamos a probar ahora que las 1011 personas restantes dicen la verdad. Tomemos a un individuo cualquiera p_k, con $1012 \leq k \leq 2021$. Esta persona tendrá al menos a 1011 mentirosos a su izquierda, que siempre serán más que los que tenga a su derecha. Así que necesariamente deberá decir la verdad.
Por tanto, se concluye que 1011 personas mienten y 1011 dicen la verdad.

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que*

$$\textit{área}(PAB) \cdot \textit{área}(PCD) = \textit{área}(PBC) \cdot \textit{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Solución. Podemos reescribir la igualdad del enunciado como

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)}.$$

Sea E el punto donde AP corta a BD, y sea F el punto donde CP corta a BD. Dado que PAB y PBC tienen un lado común, se tiene que

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{altura de } B \text{ sobre } AP}{\text{altura de } D \text{ sobre } AP} = \frac{BE}{DE},$$

donde la segunda igualdad se cumple por semejanza de triángulos. Igualmente se cumple que

$$\frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)} = \frac{BF}{DF}.$$

Por lo tanto tenemos que $BE/DE = BF/DF$. Si desplazamos E desde B hasta D, el numerador de la fracción crece y el denominador decrece, por lo que la fracción es creciente. Deducimos así que $E = F$.
Si P está sobre AC, hemos acabado. Si no lo está, las rectas AP y CP son distintas, y se cortan como mucho en un punto. Dado que se cortan en P y en E, se deduce que $P = E$, y por tanto P está en BD, como queríamos demostrar.

Problema 3. *Hallar todas las ternas de números reales* (a, b, c) *que cumplan el sistema*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Solución. Denotamos $u = 2^a$, $v = 2^b$ y $w = 2^c$. La segunda ecuación del sistema puede escribirse como $u + v + w = 7$, y la tercera como $u^{-1} + v^{-1} = 3/4$. También podemos obtener una relación entre u, v y w de la primera ecuación:

$$uvw = 2^a 2^b 2^c = 2^{a+b+c} = 2^3 = 8.$$

En la tercera ecuación, sustituimos a partir de la primera y la segunda:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}.$$

Esta última igualdad se puede escribir como $w^2 - 7w + 6 = 0$, que tiene como soluciones $w = 6$ y $w = 1$. Consideramos ambos casos:

- Si $w = 6$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 4/3$ y $u + v = 1$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(1 - u) = 4/3$, o $u^2 - u + 4/3 = 0$, que no tiene solución real.
- Si $w = 1$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 8$ y $u + v = 6$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(6 - u) = 8$, o $u^2 - 6u + 8 = 0$, que tiene soluciones $u = 4$ y $u = 2$. Esto lleva a las posibles soluciones $(u, v, w) = (4, 2, 1)$ y $(u, v, w) = (2, 4, 1)$. Tomando logaritmos, se obtiene $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 2, 0)$. Se comprueba que ambas soluciones satisfacen el sistema inicial.

Problema 4. *Encontrar todos los polinomios* $p(x)$ *con coeficientes reales tales que*

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$

para cualesquiera números reales x, y, z.

Solución. Comenzamos observando que cuando $x = y = z = 0$ la ecuación dada se escribe como

$$4p(0) = 3p(0),$$

que automáticamente implica que $p(0) = 0$. Sustituimos ahora (x, y, z) por $(x, x, -x)$. Entonces,

$$3p(x) + p(-x) = p(2x). \tag{1}$$

Sea n el grado de p, y escribamos $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Entonces, el coeficiente con x^n en el lado izquierdo de (1) es $a_n \cdot (3 + (-1)^n)$, y en el lado derecho es $a_n \cdot 2^n$. Esto implica que

$$3 + (-1)^n = 2^n.$$

Si n es par, entonces $3 + 1 = 2^n$, que es cierto si $n = 2$. Si n es impar, tendremos que $n = 1$. Entonces, los únicos posibles candidatos con los polinomios de grado a lo sumo 2 y cuyo término constante es 0, esto es,

$$p(x) = ax^2 + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos ahora que estos polinomios cumplen las condiciones del enunciado. Como la condición es linear, es suficiente comprobar que tanto $p_1(x) = x$ como $p_2(x) = x^2$ funcionan. Esto se sigue de la comprobación

$$x + y + z + (x + y + z) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$$

y

$$x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = x^2+y^2+2xy+y^2+z^2+2zx+z^2+x^2+2zx.$$

Por tanto, cualquier polinomio de la forma $p(x) = ax^2 + bx$, con $a, b \in \mathbb{R}$, satisfacen la condición dada, y estos son los únicos.