

Resolución Prueba U.D.2.

- ① a) Sea $a_n = 5 + 7 \cdot (n-1)$, si $n=10$, entonces:

$$a_{10} = 5 + 7 \cdot 9 = 68 \neq 50$$

Por tanto: Falso.

- b) El enunciado es falso pues hay excepciones en las indeterminaciones $\infty - \infty$.

- c) Sea $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$a_{n+k-1} = a_1 \cdot r^{(n+k-1)-1} = a_1 \cdot r^{n+k-2}$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a_{n+k-1}}{a_n} = \frac{a_1 \cdot r^{n+k-2}}{a_1 \cdot r^{n-1}} = r^{(n+k-2)-(n-1)} = \boxed{r^{k-1}}$$

Por tanto, es falso que $\frac{a_{n+k-1}}{a_n} = r^{k+1}$.

- ② a) $\{a_n\} = \{n, 1, \frac{1}{n}, \dots\} \Rightarrow$ Es una P. Geom. de razón $r = \frac{1}{n}$ y $a_1 = n$.

$$\Rightarrow a_n = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Usando la fórmula de la suma de las P. Geom, tenemos que:

$$S_{20} = n \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{n}} \right) = n \cdot \left(\frac{\frac{n^{20}-1}{n^{20}}}{\frac{n-1}{n}} \right) = n \cdot \left(\frac{n^{20}-1}{n^{20}} \cdot \frac{n}{n-1} \right) = \left(\frac{n^{21}-n}{n^{21}-n^{20}} \right) \cdot n =$$
$$= \frac{n^{21}-n}{n^{20}-n^{19}} = \boxed{\frac{n^{20}-1}{n^{19}-n^{18}}}$$

- b) $\{b_n\} = \{3\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \dots\} \Rightarrow$ Es una P. Arit. de diferencia $d = -2\sqrt{5}$ y $a_1 = 3\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow a_n = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \cdot (n-1) \Rightarrow a_{20} = 3\sqrt{5} - 19 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = -35\sqrt{5}$$

Usando la fórmula de la suma de las P. Arit., tenemos que:

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_{20} + a_1) = 10 \cdot (-35\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) = \boxed{-320\sqrt{5}}$$

$$c) \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} \cdot \left(\frac{r^2-1}{r+1} \right) + a_{n-1} \quad ; r \neq -1. \end{cases}$$

Como $r^2-1 = (r+1)(r-1)$ podemos simplificar:

$$a_n = a_{n-1} \cdot \left(\frac{\cancel{(r+1)} \cdot (r-1)}{\cancel{(r+1)}} \right) + a_{n-1} = a_{n-1} \cdot r - a_{n-1} + a_{n-1} = a_{n-1} \cdot r.$$

$\Rightarrow$ Luego la sucesión bien escrita sería:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} \cdot r \end{cases} \Rightarrow \text{Es una P. Geom. de razón } r \text{ y término inicial } 5.$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 5 \cdot r^{n-1}}$$

$$\text{De nuevo, } S_{20} = a_1 \cdot \left(\frac{1-r^{20}}{1-r} \right) = \boxed{5 \cdot \left(\frac{1-r^{20}}{1-r} \right)}$$

③ Datos:

- Escalera con 15 peldaños
- altura de cada peldaño en p. aritmética.
- Primer peldaño 12 cm, último 38 cm.
- ¿Altura total? ¿Altura que diferencia cada escalón?

Operación:

Sea $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ la p. aritm. que define el problema.

$$\Rightarrow a_1 = 12 \quad ; \quad a_{15} = 38 \text{ cm}$$

$$\text{La suma sería: } S_{15} = \frac{15}{2} \cdot (38 + 12) = 15 \cdot 25 = \boxed{375}$$

Ahora, para calcular d vemos que:

$$a_{15} = 38 = 12 + d \cdot (14) \Rightarrow \frac{26}{14} = d$$

Conclusión:

- La suma total es 375 cm.
- La diferencia entre cada escalón es: $\frac{26}{14} \approx 1.85$ cm.

4.

a) $\lim \frac{4n^3 + 3n + 1}{4n^3 + n^2 + n + n^4} = 0$; porque el grado del denominador es mayor que el del numerador.

$$b) \lim \left(\frac{3n+2}{3n+8} \right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = \boxed{1^\infty} \text{ ind.}$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{3n+2}{3n+8} \right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = e^L$$

$$\text{donde } L = \lim \left(\frac{n^2+3}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{3n+2}{3n+8} - 1 \right) = \lim \left(\frac{n^2+3}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{3n+2-3n-8}{3n+8} \right) =$$

$$= \lim \left(\frac{n^2+3}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{-6}{3n+8} \right) = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}$$

$$\text{Por tanto: } \lim \left(\frac{3n+2}{3n+8} \right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = \boxed{e^{-2}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2+1} \right) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot (\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim \frac{n^2+n-1 - n^2-1}{\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n-2}{\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$