

EXAMEN 2023/2024: LOS NÚMEROS REALES, TEMA 1

Ejercicio 1.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{Q} / x < y < x+1$

"Para todo número real "x", existe un único número racional "y" tal que "x" sea menor "y" e "y" menor que x+1"

→ Tomamos como $x \in \mathbb{R} \rightarrow 1$
 $x+1 = 2$

$\text{¿} 1 < y < 2 \text{?}$

$\text{¿} \exists! y \in \mathbb{Q} \text{?}$ **Falso.**

Esto es falso, ya que entre el 1 y el 2 por ejemplo, existen infinitos números reales (1.1; 1.2; 1.5; 1.75...)

b) Si $\forall x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{R} / p|x \wedge (x \text{ es primo}) \Rightarrow p = x \vee p = 1$

"Si para todo número real "x", existe otro real "p", tal que "p" divide a "x" (siendo "x" primo), entonces "p" tiene que ser igual que "x" o 1"

Tomamos como $x \in \mathbb{R} \rightarrow 7 \text{ (primo)}$ $p|x \Rightarrow \text{¿} p = x \vee p = 1 \text{?}$

VERDAD, ya que un número primo solo puede dividirse entre el mismo o entre 1.

Ejercicio 2.

$$(\sqrt[3]{343})^{-1/2} = (\sqrt[3]{7^3})^{-1/2} = 7^{-1/2} = \frac{1}{7^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \rightarrow \mathbb{II}$$

$$12^{1/5} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt[5]{2^{10}})^5 = (2^{10/5})^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024 \rightarrow \mathbb{IV}$$

$$2'001'001'001 \dots \rightarrow \mathbb{Q}$$

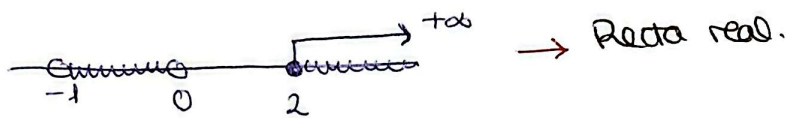
$$\log\left(\frac{1}{100}\right) = \log 100^{-1} = -\log 100 = -2 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\ln(e^2) = 2 \rightarrow \mathbb{N}$$

El mayor es $(\sqrt[5]{2^{10}})^5$ ya que es 1024

Ejercicio 3.

a) $(-1, 0) \cup [2, +\infty) \rightarrow$ Forma de intervalos.



$\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0 \vee x \geq 2\} \rightarrow$ Formalmente.

b) $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1 \vee x = 2\} \rightarrow$ Formalmente.



$(0, 1] \cup [2, 2] \rightarrow$ Forma de intervalos.

c) $|2x - 12| < 6$

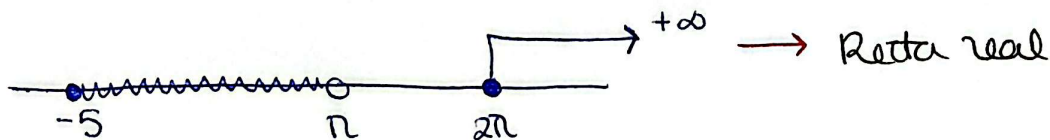
$$\begin{cases} 2x - 12 < 6 \\ 2x - 12 > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x > 3 \end{cases}$$



$(3, 9) \rightarrow$ Forma de intervalos

$\{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 9\} \rightarrow$ formalmente

d) $\{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x < \pi \vee x \geq 2\pi\} \rightarrow$ Formalmente



$[-5, \pi) \cup [2\pi, \infty) \rightarrow$ Forma de intervalos

④

a) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - 1$

$$\frac{(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \Rightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{9} - 3 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6} + \cancel{3} - \cancel{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} \right) - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2}{2}}$$

b) $\frac{1-3\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1+3\sqrt{5}}{\sqrt[3]{25}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1-45}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow$

$$\frac{-44}{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \xrightarrow{* \text{ Inverso: }} \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-44}{5} + \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{25} - 44}{5}}$$

c) $\frac{7\sqrt{7}-1}{3\sqrt{7}+2\sqrt{3}} = \frac{(7\sqrt{7}-1)(3\sqrt{7}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{7}+2\sqrt{3})(3\sqrt{7}-2\sqrt{3})} \Rightarrow \frac{(7\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7}) - 3\sqrt{7} - (7\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}}{(3\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2}$

$$\Rightarrow \frac{(7\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7}) - (7\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}) - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}{9 \cdot 7 - 4 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\frac{21 \cdot 7 - 14\sqrt{21} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}{63-12} \Rightarrow \boxed{\frac{147 - 14\sqrt{21} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}{51}}$$

⑤ Sabemos que: $\ln(A) = 0,1$ / $\ln(B) = 1,2$ / $\ln(C) = 6$.

$$a) \ln\left(\frac{AB}{\sqrt[3]{C}}\right) \stackrel{(2)}{=} \ln(AB) - \ln(\sqrt[3]{C}) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1,3)}{\Rightarrow} \ln(A) + \ln(B) - \ln(C)^{1/3} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \ln(A) + \ln(B) - \frac{1}{3}\ln(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1 + 1,2 - \frac{1}{3} \cdot 6 = 0,1 + 1,2 - 2 = \underline{\underline{-0,7}}$$

$$b) \sqrt{2023} \cdot \ln\left(\frac{e \cdot B^2}{\sqrt{C}}\right)^{\frac{A}{\sqrt{2023}}} \stackrel{(4)}{=} \sqrt{2023} \cdot \frac{A}{\sqrt{2023}} \cdot \ln\left(\frac{e \cdot B^2}{\sqrt{C}}\right) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A [\ln(e \cdot B^2) - \ln(\sqrt{C})] \stackrel{(1,3)}{\Rightarrow} A [\ln(e) + \ln(B)^2 - \ln(C)^{1/2}] \Rightarrow$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A [\cancel{\ln(e)}^1 + 2 \cdot \ln(B) - \frac{1}{2} \cdot \ln(C)] \Rightarrow A [1 + 2\ln(B) - \frac{1}{2}\ln(C)]$$

$$\Rightarrow A (1 + 2 \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 6) \Rightarrow A (1 + 2,4 - 3) = 0,4A = \underline{\underline{0,4 \cdot e^{0,1}}}$$

Propiedades Logarítmicas

$$\log(A \cdot B) = \log(A) + \log(B) \quad (1)$$

$$\log(A/B) = \log(A) - \log(B) \quad (2)$$

$$\log \sqrt[n]{A^m} = \log A^{m/n} \quad (3)$$

$$\log(A)^k = k \cdot \log(A) \quad (4)$$

⑥

$$a) \log(x^3) + \log(x^2) + \log(x) = 6 \Rightarrow$$

$$\log(x^3 \cdot x^2 \cdot x) = 6 \Rightarrow \log x^6 = 6 \Rightarrow 10^6 = x^6$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10}$$

$$b) \log_x(81) - \log_x\left(\frac{1}{3}\right) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\log_x(3^4) - \log_x(3^{-1}) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\log_x(3^4 : 3^{-1}) - 5 = 0 \Rightarrow \log_x(3^5) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\log_x(3^5) = 5 \Rightarrow \log_x 243 = 5 \Rightarrow x^5 = 243$$

$$\Rightarrow x^5 = 3^5$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3}$$