

RESOLUCIÓN UD 2 - SUCESSIONES

Ejercicio 1

a) Este enunciado es falso porque existen algunas sucesiones, como la sucesión de los números decimales de π que no se pueden expresar en término general

b) Para comprobar si el enunciado es cierto o no, tomemos una progresión geométrica

$$\{a_n\} = \{3, 9, 27, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 9 \\ a_3 = 27 \end{cases}$$

$$\text{Si } \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = 3 = r (\text{razón})$$

Por lo tanto, el enunciado es cierto porque se cumple la igualdad y es la definición de una progresión geométrica

c) Verdadero porque es una progresión que su límite oscila entre -1 y 1 , nunca tiende a un sólo número

d) Comprobemos si es verdadero o falso

$$99 : 2 = 49,5 \Rightarrow a_{49} = 98 \rightarrow \text{último múltiplo de 2 entre } 99 \text{ y } 1$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow \text{primer múltiplo de 2 entre } 99 \text{ y } 1$$

Reducemos la suma de los 49 términos que se encuentran entre el 99 y 1, utilizando la fórmula de la suma de los n -términos de una progresión aritmética.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{49} = \frac{(2 + 98) \cdot 49}{2} = 2450$$

Por lo tanto, el enunciado es falso.

Ejercicio 2

$$a) \{a_n\} = \left\{3, 4, \frac{16}{3}\right\} \quad r = \frac{4}{3}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Calculamos a_{10}

$$a_{10} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{10-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^9 =$$

$$b) \{a_n\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}^3, \sqrt{2 \cdot 3^2}, \dots\} \Rightarrow \{a_n\} = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$$

$$d = \sqrt{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = \sqrt{2} + (n-1) \cdot \sqrt{2}$$

Calculamos a_{10}

$$a_{10} = \sqrt{2} + (10-1) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$c) \{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{7}{2}, \dots\right\}$$

progresión aritmética
de grado 2

$$\begin{array}{ccc} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ +0,5 & +1 & +1,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{} & \boxed{} \\ +0,5 & +0,5 \end{array}$$

$$a_n = an^2 + bn + c$$

(*) empezamos a nombrar por $n=0$

$$a_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = a + b + \frac{1}{2} = 1$$

$$a_1 = a + b = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \Rightarrow a_2 = 4a + 2b + c = 2$$

$$a_2 = 4a + 2b = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{-4r_1} \begin{cases} -4a - 4b = -\frac{4}{2} \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\underline{-2b = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{a = \frac{1}{4}}$$

conclusion $\rightarrow a_n = a_n^2 + bn + c$

$$a_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}$$

calculemos a_{10}

$$a_{10} = \frac{1}{4} \cdot 10^2 + \frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{1}{2} = \frac{100}{4} + \frac{10}{4} + \frac{1}{2} = 28$$

Ejercicio 3

$$a_5 + a_{10} + a_{12} = 54$$

fórmula general de una progresión aritmética $\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\cdot a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d = a_1 + 4d$$

$$\cdot a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d = a_1 + 9d$$

$$\cdot a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot d = a_1 + 11d$$

Por lo tanto,

$$(a_1 + 4d) + (a_1 + 9d) + (a_1 + 11d) = 54$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 24d = 54$$

$$\text{Si } a_9 = a_1 + (9-1) \cdot d = a_1 + 8d$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 24d = 54 & \stackrel{(1)}{\Rightarrow} d = \frac{54 - 3a_1}{24} \\ a_9 = a_1 + 8d & \stackrel{(2)}{\Rightarrow} d = \frac{a_9 - a_1}{8} \end{cases}$$

Igualamos (1) y (2)

$$\frac{54 - 3a_1}{24} = \frac{a_9 - a_1}{8} \Rightarrow 8(54 - 3a_1) = 24(a_9 - a_1)$$

$$\Rightarrow 432 - 24a_1 = 24a_9 - 24a_1 \Rightarrow 432 = 24a_9$$

$$\Rightarrow a_9 = \frac{432}{24} = 18$$

Solución: a_9 es 18

Ejercicio 4

$$\text{Sea } a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{Sea } b_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty^2} = 0$$

$$\text{Por lo tanto, si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Ejercicio 5

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+5}}{\sqrt{9n^2+5n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot (2n+5)}{\frac{1}{2} \cdot (9n^2+5n-1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2n+5}{3}}{\frac{9n^2+5n-1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+10}{27n^2+15n-3} = 0$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)^{\frac{n+3}{5n+3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^{\frac{1}{5}} = 1$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{4n^2+5n} - 2n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{4n^2+5n} - 2n) \cdot \frac{(\sqrt{4n^2+5n} + 2n)}{(\sqrt{4n^2+5n} + 2n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4n^2+5n})^2 - (2n)^2}{(\sqrt{4n^2+5n} + 2n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2+5n - 4n^2}{\sqrt{4n^2+5n} + 2n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{\sqrt{4n^2+5n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5n}{n^2}}{\sqrt{\frac{4n^2+5n}{n^2}} + \frac{2n}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{4+\frac{5}{n}} + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{4+0} + 2} = \frac{5}{4}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{5n^2 + n + 1}{3n^2 + 3n + 2} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 0^2 + 0 + 1}{3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2}$$