

Resolución - Tema 2 Sucesiones

Ejercicio 1 (Resolución)

- a) **El enunciado es falso**, pues existen sucesiones cuyo término no siguen reglas que son imposibles de expresar con una fórmula. Ej: $\rightarrow$ Sucesión de los dígitos de π : $\{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, \dots\}$.
- b) **Verdadero**, ya que una progresión geométrica se define como una sucesión en la que la razón (r) es constante, es decir, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.
- c) **Verdadero**, pues la parte $(-1)^n$ oscila entre valores cercanos a -1 y 1 y no tiene un único límite.
- d) Sea $a_n = 2 + (n-1)2$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{49} &= 98 \implies S_{49} = \frac{(a_1 + a_{49}) \cdot 49}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 49}{2} \\ &= [2450], \text{ no } 2500. \end{aligned}$$

Por tanto, el enunciado es **falso**.

Ejercicio 2

- a) $\{a_n\} = \{3, 4, \frac{16}{3}, \dots\} \rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{4}{3}$ y $a_1 = 3$.
Utilizando: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \rightarrow$ sacar r

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &= \frac{16/3}{4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}. \\ a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}. \\ a_{10} &= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^9 = \frac{4^9}{3^8}. \end{aligned}$$

- b) $\{b_n\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \dots\} \rightarrow$ Es una progresión aritmética de $d = \sqrt{2}$ y $a_1 = \sqrt{2}$.
Utilizando: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \rightarrow$ sacar d

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}. \\ a_3 - a_2 &= \sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}. \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = \sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = n\sqrt{2}. \\ a_{10} &= \sqrt{2} + (9)\sqrt{2} = [10\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

- c) $\{c_n\} = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\} \rightarrow$ progresión aritmética orden 2
En este caso, tenemos la sucesión desde $n = 0$: $a_n = an^2 + bn + c$. **Sistema de Ecuaciones:**

$$\begin{aligned} a_0 &= c = \frac{1}{2} \\ a_1 &= a + b + c = 1 \implies a + b = \frac{1}{2} \quad (1) \\ a_2 &= 4a + 2b + c = \frac{3}{2} \implies 4a + 2b = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Coefficientes determinados:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Término General ($a_n = an^2 + bn + c$):

$$a_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}.$$

Cálculo del décimo número (a_{10}):

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{1}{4}(10)^2 + \frac{1}{4}(10) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{100}{4} + \frac{10}{4} + \frac{2}{4} = \frac{112}{4} = [28]. \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Datos: $a_5 + a_{10} + a_{12} = 54$. Progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

Operación:

$$\begin{aligned} a_5 + a_{10} + a_{12} &= 54 \implies 3a_1 + 24d = 54 \\ \implies a_1 + 8d &= 18. \end{aligned}$$

Solución:

$$a_9 = [18].$$

Ejercicio 4

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \\ b_n &= \frac{1}{n^2} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, calculamos el límite de la sucesión resultante de la división $\frac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Ejercicio 5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+5}}{\sqrt{9n^4+5n-7}} = [0]$, porque el grado del denominador es mayor que el del numerador.

b) $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{\frac{n^3}{5n^3}}$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{1/5} = [1].$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+5n}-2n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2+5n}-2n)(\sqrt{4n^2+5n}+2n)}{(\sqrt{4n^2+5n}+2n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+5n-4n^2}{(\sqrt{4n^2+5n}+2n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{\sqrt{4n^2+5n}+2n} = \left[\frac{5}{4} \right]. \end{aligned}$$

- d) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{5n^2+n+1}{3n^2+8n+2}$
(Tiende a cero, por eso se sustituye n por 0).

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{5n^2+n+1}{3n^2+8n+2} = \frac{5(0)^2+0+1}{3(0)^2+8(0)+2} = \left[\frac{1}{2}\right].$$